S. 731

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

S. 731.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

2.

TOME DEUXIÈME.

BRITISH MUSEUM

Mém. Soc. R. Sci. Liège. II(

Part 1 pp. 1 — 352 1845
2 353 — end 1846
Putzey's Clivina paper should be quoted "1846."
C. Davies Sherborn

BRIT. MUS. (NAT. HIST.), LONDON, S.W. SHERBORN'S "INDEX ANIMALIUM."

LIÉGE,

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS.
CHEZ RORET, LIB. — ÉD.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1845. — 1846.

S. 731.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE,

Nec temere nec timide.

2.

TOME DEUXIÈME.

LIÉGE,

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS.
CHEZ RORET, LIB.—ÉD.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1845. — 1846.

LISTE

DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 DÉCEMBRE 1845.

NOTA. Les noms des Membres fondateurs sont précédés d'un astérisque.

Composition du Bureau pour l'année 1846.

MM.

Président. DE SELYS-LONGCHAMPS, propr. à Liége.
Vice-Président. DE KONNINCK, prof. à l'Université.
Secrétaire général. TH. LACORDAIRE, id.
Trésorier. SPRING. id.

Membres titulaires.

MM.

1835. * LEMAIRE, prof. à l'Université.
* GLOESENER, id.
* DELVAUX, prof. émérite à l'Université.
* DUMONT, prof. à l'Université.
* LESOINNE, id.
* BRASSEUR, id.
* FRÉDÉRIX, colonel du génie, directeur de la fonderie de canons à Liége.
1842. LACORDAIRE, prof. à l'Université.
NOEL, id.
DE KONNINCK, id.
SPRING, id.
CHANDELON, id.
TIMMERHANS, colonel du génie à Liége.
DE SELYS-LONGCHAMPS (baron de), prop. à Liége.
NEUENS, capitaine d'artillerie id.
MARTINOWSKY, répétiteur à l'Université.
TRASENSTER, sous-ingénieur des Mines id.
LAGUESSE, id. id. id.
1844. SCHMIT, répétiteur à l'Université.
KUPFERRSCHLÆGER, id.
BIDAUT, ingénieur des Mines id.
1845. DELVAUX, id. id. id.
DE CHESNES, inspecteur des eaux à forets id.
LECLERCQ, agrégé à l'Université.

Membres titulaires qui, ayant quitté la province de Liége, sont devenus Membres correspondans, conformément à l'article 7 des statuts.

MM.

1835. Pagani, prof. à l'Université de Louvain.
Devaux, inspecteur-général des Mines, à Bruxelles.
1842. Maus, ingénieur en chef des ponts et chaussées id.
Navez, lieutenant d'artillerie id.
1843. Dandelin, colonel du génie id.
Michiels, capitaine d'artillerie, à Gand.
Coquilhat, id. id.

Membres correspondans.

1835. Omalius d'Halloy (baron d'), prop. à Halloy (Namur).
Dumortier, membre de la chambre des Représentans, à Tournay.
Guillery, ingénieur des ponts et chaussées, à Bruxelles.
Quetelet, directeur de l'observatoire royal, à Bruxelles.
Timmermans, professeur à l'Université de Gand.
Teichman, gouverneur de la province d'Anvers.
1842. Schwann, professeur à l'Université de Louvain.
Van Beneden, id. id.
1843. Decaisne, aide-naturaliste au Jardin des Plantes, à Paris.
Liebig, prof. de chimie à l'Université de Giesen.
Graham, id. id. de Londres.
Pelouze, membre de l'académie des Sciences, à Paris.
Stas, prof. de chimie à l'école militaire, à Bruxelles.
Mitscherlich, prof. de chimie à l'Université de Berlin.
L. De Buch (baron), Chambellan de S. M. le Roi de Prusse, à Berlin.
Nyst, contrôleur des matières d'or et d'argent à Louvain.
De Verneuil, membre de la Société géologique de France, à Paris.
Kayserling (comte de), à Saint-Pétersbourg.
De Martius, secrétaire perpét. de l'acad. des Sciences de Munich.
Kickx, prof. à l'Université de Gand.
Moll (Hugo), prof. à l'Université de Tübingen.
Gervais, agrégé à la faculté de médecine de Montpellier.
Géné, prof. à l'Université de Turin.
Sundewall, directeur du Muséum d'hist. nat., à Stockholm.
Putzeys, chef de division au Ministère de la Justice, à Bruxelles.

MM.

1843. Reichert, agrégé et prosecteur à l'Université de Berlin.
Valentin, prof. à l'Université de Berne.
Wagner (Rudolph), prof. à l'Université de Gœttingen.
Longet, chirurgien de la maison royale de St.-Denis, à Paris.
Steichen, prof. à l'école militaire, à Bruxelles.
Pioche, id. id.
Meyer, prof. à l'Université libre, à Bruxelles.
Lamarle, id. de Gand.
Breguet, mécanicien, à Paris.
Masson, prof. de physiologie à la Sorbonne, à Paris.
Simonoff, directeur de l'observatoire de Casan.
Tcheffkine (général), aide-de-camp de S. M. l'Empereur de Russie.
Berthier, prof. à l'école des Mines, à Paris.
Combes, id. id.
Simonis, répétiteur à l'Université de Gand.
Seyler, docteur en médecine, à Wiltz.
Galeotti, membre de l'académie de Bruxelles, à Bruxelles.

1844. Lecointe, prof. au collége d'Arlon.
Malherbe, juge au tribunal de Metz.
Carez, ingénieur des ponts et chaussées, à Bruxelles.

1845. Van Rees, prof. à l'Université d'Utrecht.
Lesson, prof. à l'école maritime de Rochefort.
Du Bus (vicomte), membre de la chambre des Représentans, à Bruxelles.
Hagen, docteur en médecine, à Kœnigsberg.
Olivier, prof. à l'école centrale, à Paris.
Chasles, prop. à Chartres.
Ambrosi, répétiteur à l'école militaire, à Bruxelles.
Perdonnet, ingénieur civil, à Paris.
Corda, botaniste, à Prague.

—

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

I. *Enumération des Insectes lépidoptères de la Belgique*

Par M. Edm. DE SELYS-LONGCHAMPS.

En 1837 j'ai commencé la publication d'un Catalogue raisonné des Lépidoptères de la Belgique. Je ne l'ai pas continué immédiatement ayant senti la nécessité de faire de nouvelles recherches sur plusieurs parties des Nocturnes et notamment sur les dernières familles composées des *Pyralis*, des *Tortrix*, des *Tinea* et des *Alucita* de Linné, que les Allemands nomment en commun *Microlépidoptères*, nom expressif qui paraît devoir être admis par les Naturalistes des autres pays.

J'ai aussi différé jusqu'ici la publication du travail que j'offre aujourd'hui afin d'obtenir la détermination exacte de plusieurs espèces douteuses. Je la dois à MM. Boisduval, Duponchel et Pierret qui ont bien voulu s'occuper de cet objet pendant un voyage que j'ai fait à Paris au printemps de 1843.

Le nombre total des Lépidoptères ou Papillons observés jusqu'ici en Belgique est de 1050 espèces environ, y compris une soixantaine de Microlépidoptères indéterminés consistant surtout en Tortricidées et en Tinéidées, les deux familles dont les espèces sont les plus difficiles à déterminer, et pour lesquelles les ouvrages existants laissent beaucoup à désirer. Comme il est probable que l'on observera encore plus d'une centaine au moins de petites espèces on arrive à estimer à 1200 environ le nombre des Lépidoptères de la Belgique.

J'ai indiqué en note afin de compléter cette Faune au point de vue géographique plusieurs espèces qui existent dans le nord et le nord-est de la France, vers nos frontières. J'ai aussi signalé en note quelques espèces que l'on dit avoir été trouvées en Belgique, mais que je n'ai pas vues.

J'ai adopté la nomenclature de M. le docteur Boisduval jusqu'à la fin des Phalénidées et celle de M. Duponchel pour les Microlépidoptères en régularisant toutefois les noms des familles et des tribus, suivant la coutume généralement adoptée, et en rétablissant, ne fut-ce que pour l'ordre, les familles Sphingidées et Bombycidées. Lorsqu'il y a eu exception à cet égard j'ai indiqué en synonymie les noms de l'index de M. Boisduval. En ce qui concerne le système et les genres en général, j'ai cru ne pas devoir m'écarter de ce qui a été proposé par les deux auteurs cités, bien que je considère le nombre des genres comme trop grand surtout parmi les Noctuélidées et les Phalénidées. Mais ce n'était pas ici le lieu de proposer des innovations et je n'ai d'ailleurs étudié cette partie que sous le rapport de la connaissance des espèces. J'aurais désiré aussi rétablir la priorité des noms génériques et spécifiques lorsqu'on s'en est écarté, mais j'ai hésité à le faire ici par la même raison.

A la fin de cette énumération j'ai donné la description des espèces présumées nouvelles et des notes sur plusieurs variétés remarquables ou qui ont donné lieu à des controverses parmi les Entomologistes.

Plus tard je me propose de publier un Catalogue raisonné avec des détails sur les mœurs des espèces, les localités où elles existent, l'époque d'apparition, etc.

Dans le spécimen que j'ai donné en 1837, j'ai soigneusement indiqué les secours que j'ai reçus de divers Entomologistes belges. — Parmi ceux qui ont continué à recueillir les Lépidoptères je citerai particulièrement M. Ch. Donckier-Huart, à Liége, dont la collection s'augmente tous les jours et qui a mis à ma disposition ses notes et ses insectes. MM. Pôlet de Faveaux à Namur, Charlier à Bruxelles et de Frey à Louvain m'ont aussi indiqué plusieurs espèces remarquables recueillies à Namur, dans le Brabant et en Campine. Que ces naturalistes reçoivent ici l'expression de ma gratitude pour leurs précieuses communications !

SECTION I. DIURNES.

(Rhopalocera Bdv.)

FAMILLE 1. PAPILIONIDÉES.

(Succinctæ Bdv.)

TRIBU 1. **Papilionina.**

G. PAPILIO *L. Latr. Bdv.*

1 podalirius. *L.*
var. *diluta.*
2 machaon. *L.*
var. *aurantiaca.*

TRIBU 2. **Pieridina.**

G. PIERIS. *Latr. Bdv.*

3 cratægi. *L.*
4 brassicæ *L.*
5 rapæ *L.*
6 napi *L.*
var. *nigrovenosa De Selys.*
7 daplidice *L.*

G. ANTHOCHARIS *Bdv.*

8 cardamines. *L.*

G. LEUCOPHASIA *Steph. Bdv.*

9 sinapis. *L.*
var. *erysimi Bork.*

G. COLIAS. *F. Bdv.*

10 edusa. *L.*
var. *helice H.*
11 hyale *L.*
var. *heliceides De Selys.*

G. RHODOCERA *Bdv.*

12 rhamni. *L.*

TRIBU 3. **Lycænina.**

G. THECLA *F. Bdv.*

13 betulæ *L.*
14 pruni *L.*
15 w-album *Illig*
16 spini *F.*
17 lynceus. *F.*
var. *cerri H.*
18 quercûs *L.*
19 rubi *L.*

G. POLYOMMATUS *Latr. Bdv.*

20 phlæas *L.*
21 xanthe *F.*
var. *obscurior.*
22 helle *F.*
23 virgaureæ. *L.*
24 chrysæis. (1) *F.*

G. LYCÆNA *F. Bdv.*

25 amyntas *F.*
var ? *Myrmidon Engr.*
26 alsus. *F.*
27 acis. *Wv.*

(1) *Pol. hippothoe* L. se trouve dans le nord et l'est de la France en Picardie et en Lorraine.

28 argiolus (2) *L.*
29 arion (3) *L.*
30 corydon *F.*
31 adonis *F.*
32 dorylas *H.*
33 alexis *F.*
var. *minor De Selys.*
var. *agestoides De Selys.*
34 agestis *Esp.*
35 ægon *Bork.* (4)

TRIBU 4. **Erycinina.**

G. NEMEOBIUS *Steph. Bdv.*

36 Lucina *L.*

FAMILLE II. NYMPHALIDÉES.

(Pendulæ Bdv.)

TRIBU 1. **Nymphalina.**

G. MELITÆA *F. Bdv.*

1 maturna *L.*
2 artemis *F.*
3 cinxia *F.*
4 dictynna. Esp.
5 athalia Bork.
var. *navarina De Selys.*
var. *hisopa. De Selys.*
var. *Asteria ? Treits.*

G. ARGYNNIS *Latr. Bdv.*

6 paphia *L.*
var. *valesina Esp.*
7 adippe *F.*
var. *cleodoxa Esp.*
8 niobe *L.*
9 aglaïa *L.*
10 lathonia *L.*
11 dia *L.*
12 ino Esp.
13 selene *F.*
14 euphrosine (5) *L.*

G. VANESSA *Ochs. Bdv.*

15 c-album *L.*
var.
var.
var.
16 urticæ. *L.*
var. *ichnusoides De Selys*
17 polychloros. *L.*
18 antiopa. *L.*
19 io. *L.*
20 atalanta *L.*
21 cardui *L.*
22 prorsa *L.*
var. *levana. L.*

G. NYMPHALIS. *Latr. Bdv.*

23 populi *L.*
var. *tremulæ Guénée.*

G. LIMENITIS. *F. Bdv.*

24 sibylla (6) *F.*
var. *nigrofusca Bdv.*

---

(2) *L. cyllarus* F. des environs de Metz d'après M. Holandre.
(3) *L. euphemus* H. idem idem.
(4) *L. hylas* F. de la Lorraine et du nord de la France.
(5) *Arg. aphirape* du nord de la France et même de la Belgique selon M Boisduval.
(6) *Lim. camilla* F. de la Lorraine selon M. Holandre.

TRIBU 2. **Apaturina.**

G. APTURA *Ochs. Bdv.*

25 iris *L.*
26 ilia *F.*
var. *Clytie H.*

TRIBU 3. **Satyrina.**

G. ARGE. *Esp. Bdv.*

27 galathea. *L.*

G. EREBIA *Dalm. Bdv.*

28 medusa (7) *F.*

G. SATYRUS *Latr. Bdv.*

29 semele (8) *L.*
30 janira *L.*
var. *hispulla Esp.*
31 tithonus *L.*
32 mæra *L.*
33 megæra *L.*
34 ægeria *L.*
35 hyperanthus *L*
var. *arete Müll.*
36 hero *L.*
37 arcanius. *L.*
38 davus. (9) *L.*
39 pamphilus. *L.*

FAMILLE III. HESPERIDÉES.

(Involutæ Bdv.)

Tribu des Hesperina.

G. STEROPES. *Bdv.*

1 paniscus. *F.*

G. HESPERIA *F. Bdv.*

2 comma. *L.*
3 sylvanus. *F.*
4 actæon. *Esp.*
5 linea. *L.*
6 lineola. *O.*

G. SYRICTHUS *Bdv.*

7 malvæ (10) *F.*
8 alveus *H.*
var. *A. Bdv. (major)* (11).
9 carthami *O.*
10 cirsii *Ramb.*
11 alveolus *H.*
var. *Tarras Bergstr.*
12 sao *H.*

G. THANAOS *Bdv.*

13 tages *L.*

---

(7) *Erebia Blandina* F. des environs de Metz selon M. Holandre.

(8) *Sat. Briseis* L. des Ardennes françaises et des environs de Metz.
Sat. Hermione L. idem idem.
Sat. Circe F. des environs de Metz selon M. Holandre.

(9) *Sat. iphis* H. de la Picardie.

(10) *S. altheæ* H. dunord de la France et même de la Belgique selon M de Koninck.

(11) Cette variété semble la même que celle figurée dans le supplément par M. Duponchel sous le faux nom de *Carthami* et qui provient du midi de la France. Un individu que j'ai pris en Ardenne me semble être le *S. Cacaliæ Ramb.* découvert dans les Alpes.

SECTION II. NOCTURNES.

(Heterocera Bdv.)

FAMILLE I. SPHINGIDÉES.

TRIBU 1. **Sesiina.**

G. THYRIS *Illig. Bdv.*

1 Fenestrina *F.*

G. SESIA *Latr. Bdv.*

2 tenthrediniformis *H.*
3 tipuliformis *L.*
4 nomadæformis. *Lasp.*
5 multillæformis *Lasp.*
6 ? culiciformis *L.*
7 cynipiformis *L.*
8 ichneumoniformis *F.*
9 chrysidiformis *Esp.*
10 hylæiformis *Lasp.*
11 spheciformis *H.*
12 asiliformis *F.*
13 apiformis (12) *L.*

TRIBU 2. **Sphingina.**

G. MACROGLOSSA *Ochs. Bdv.*

14 Fuciformis *L.*
15 bombyliformis *O.*
16 stellatarum *L.*

G. DEILEPHILA *Ochs Bdv.* (13)

17 nerii *L.*
18 elpenor *L.*
19 porcellus *L.*
20 celerio *L.*
21 lineata *F.*
22 galii *F.*
23 euphorbiæ *L.*

G. SPHINX *L. O. Bdv.*

24 ligustri *L.*
25 convolvuli *L.*
26 pinastri *L.*

G. ACHERONTIA *Ochs. Bdv.*

27 atropos *L.*

G. SMERINTHUS *Latr. Bdv.*

28 tiliæ *L.*
29 ocellata *L.*
30 populi *L.*
var. *rufescens.*

TRIBU 3. **Zygænina.**

G. ZYGÆNA *Fab. Latr. Bdv.*

31 trifolii *Esp.*
32 loniceræ *Esp.*
var. *minoides De Selys.*
33 filipendulæ (14) *L.*

---

(12) *Sesia Bembeciformis* O. a été trouvée en Belgique selon M. Boisduval.
(13) *Pterogon Ænotheræ* F. Bdv. de la Lorraine d'après M. Holandre.
(14) *Zyg. onobrychis* F. des environs de Metz selon M. Holandre,
Zyg. hippocrepidis O. idem idem.
Zyg. minos Wv. idem idem.

G. SYNTOMIS *Illig. Bdv.*

34 phegea *L*

G. PROCRIS *F. Bdv.*

35 statices *L.*
36 globulariæ *Esp.*

FAMILLE II. BOMBYCIDÉES.

TRIBU 1. **Lithosina.**

G. EUCHELIA *Bdv.* (14)

1 jacobeæ *L.*

G. LITHOSIA *Latr. Bdv.*

2 rubricollis *L.*
3 quadra *F.*
4 griseola *H.*
5 complana *L.*
6 complanula *Bdv.*
7 unita *H.*
8 aureola *H.*
9 muscerda *H.*
10 rosea *F.*
11 mesomella *L.*

G. SETINA *Schr. Steph. Bdv.*

12 irrorea. *H.*

G. NACLIA *Bdv.*

13 ancilla. *L.*

G. NUDARIA *Steph. Bdv.*

14 mundana (15) L.

TRIBU 2. **Chelonina.**

G. CALLIMORPHA *Latr. Bdv.*

15 dominula *L.*
16 hera *L.*

G. NEMEOPHILA *Steph. Bdv.*

17 russula *L.*
18 plantaginis *L.*
var. *Hospita Wv.*

G. CHELONIA *Latr. Bdv.*

19 villica (16) *L.*
20 caja *L.*
var. *A.*
var. *B.*

G. ARCTIA *Latr Bdv.*

21 fuliginosa *L.*
22 lubricipeda *F.*
23 urticæ *Esp.*
24 menthastri *F.*
25 mendica *L.*

TRIBU 3. **Liparidina.**

G. LIPARIS *L. Ochs. Bdv.*

26 monacha *L.*

---

(14) *Emydia cribrum* L. Bdv. des environs de Metz d'après M. Holandre.
E. grammica L. idem idem.
(15) *Nud. senex* H. de la Belgique selon M. Boisduval.
(16) *Chel. civica* H. du nord de la France.
Chel. aulica L. de Metz selon M. Holandre.
Chel. matronula L. idem idem.
Chel. hebe L. idem idem.

27 dispar *L*
var. *nigra.*
28 salicis *L.*
29 auriflua *F.*
30 chrysorrhæa *L.*

G. DEMAS *Steph. (Orgya Bdv.)*

31 v-nigrum *F.*
32 pudibunda *L.*
33 fascelina *L.*
34 coryli *L.*

G. ORGYA *Ochs. Bdv.*

35 antiqua *L.*
36 gonostigma *L.*

TRIBU 4. **Bombycina.**

G. BOMBYX *F. Latr. Bdv.*

37 neustria *L.*
var. *quercina De Selys.*
var. *confluens. De Selys.*
38 castrensis *L.*
39 lanestris (17) *L.*
40 processionea *L.*
41 cratægi *L.*
42 populi *L.*
43 dumeti *L.*
44 rubi *L*
45 quercûs *L.*
var. *A.*
46 ? trifolii *F.*

G. ODONESTIS *Germar. Bdv.*

47 potatoria *L*
var. *A.*

G. LASIOCAMPA *Latr. Bdv.*

48 pruni *L.*
49 quercifolia *L*
var. *alnifolia Ochs.*
50 populifolia *F.*
51 betulæfolia *F.*
52 ilicifolia *L.*

TRIBU 5. **Saturnina.**

G. SATURNIA *Schr. Bdv.*

53 carpini *Bdv.*

TRIBU 6. **Endromidina.**

G. AGLIA *Ochs. Bdv.*

54 tau *L.*

G. ENDROMIS *Ochs Bdv.*

55 versicolora *L.*

TRIBU 7. **Hepialina.**
(Zeuzerides. Bdv.)

G. COSSUS *Fab. Bdv.*

56 ligniperda *F.*

G. ZEUZERA *Latr. Bdv.*

57 æsculi *L.*

G HEPIALUS *Fab. Bdv.*

58 humuli *L.*
59 sylvinus *L.*
60 lupulinus *L.*
61 hectus *L.*

TRIBU 8. **Psychina.**

G. PSYCHE *Schr. Bdv. Steph.*

62 albida *Esp.*
63 ? muscella (18) *F.*

---

(17) *Bomb. everia* F. de Metz.

(18) *Psyche graminella* Wv. nord et est de la France ; environ de Metz.
Ps. plumigerella, B.lv. nord de la France selon MM. Boisduval et Duponchel.

G. FUMEA *Steph.* *(Psyche Bdv.)*

64 calvella *O.*
65 nitidella *H.*
66 pulla *Esp.*

TRIBU 9. **Limacodina.**

(Cochliopodes Bdv.)

G. LIMACODES *Latr. Bdv.*

67 testudo *F.*

TRIBU 10. **Platypterygina.**

(Drepanulides Bdv.)

G. CILIX *Leach. Bdv.*

68 spinula *H.*

G. PLATYPTERYX. *Lasp. Bdv.*

69 lacertula *H.*
70 sicula *H.*
71 curvatula *Lasp.*
72 falcula *H.*
73 hamula *Esp.*
74 unguicula *H.*

TRIBU 1. **Notodontina.**

G. DICRANURA *Latr. Bdv.*

75 furcula *L.*
76 bifida *H.*
77 erminea *Esp.*
78 vinula *L.*

G. HARPYA *Ochs. Bdv.*

79 fagi *L.*
80 milhauseri *F.*

G. ASTEROSCOPUS *Bdv.*

81 cassinia (19) *F.*

G. PTILODONTIS *Steph. Bdv.*

82 palpina *L.*

G. NOTODONTA *Ochs. Bdv.*

83 camelina *L.*
84 carmelita *Esp.*
85 dictæa *L.*
86 dictæoides *Esp.*
87 dromedarius *L.*
88 tritophus *F.*
89 ziczac *L.*
90 torva *O.*
91 trepida *F.*
92 melagona *Bork.*
93 velitaris *Esp.*
94 bicolora *F.*
95 querna *Wv.*
96 chaonia *H.*
97 dodonæa (20) *Wv.*

G. GLUPHISIA *Bdv.*

98 crenata *Esp.*

G. DILOBA *Bdv.*

99 cæruleocephala *L.*

G. PYGÆRA *Ochs. Bdv.*

100 bucephala *L.*

G. CLOSTERA *Hoffmansegg. Bdv.*

101 curtula *L.*
102 anachoreta *F.*
103 reclusa *F.*
104 anastomosis *L.*

---

(19) *Ast nubeculosa* nord de la France.
(20) *Notod. plumigera* des environs de Metz d'après M. Holandre.

FAMILLE III. NOCTUIDÉES.

TRIBU 1. **Cymatophorina.**

(Noctuobombycini Bdv.)

G. CYMATOPHORA *Treits Bdv.*

1 ridens *F.*
2 octogesima *H.*
3 or *F.*
4 flavicornis *L.*
5 diluta *F.*
6 fluctuosa *H.*
7 bipuncta *Bork.*

G. CLEOCERIS *Bdv.*

8 oo *L.*
9 viminalis *F.*

G. PLASTENIS *Bdv.*

10 subtusa *F.*
11 retusa *L.*

TRIBU 2. **Acronyctina.**

(Bombycoïdi Bdv.)

G. ACRONYCTA *Ochs. Bdv.*

12 leporina *L.*
13 aceris *L.*
14 megacephala *F.*
15 alni *L.*
16 ligustri *F.*
17 strigosa *F.*
18 tridens *F.*
19 psi *L.*
20 cuspis *H.*
21 auricoma *F.*
22 rumicis *L.*
23 euphorbiæ *F.*

G. DIPHTERA *Ochs. Bdv.*

24 orion *Esp.*

G. BRYOPHILA *Tr. Bdv.*

25 glandifera *Wv.*
var. *par H.*
26 perla *F.*
27 algæ *F.*

TRIBU 3. **Amphipyrina.**

G. GONOPTERA *Latr. Bdv.*

28 libatrix *L.*

G. AMPHIPYRA *Ochs. Bdv.*

29 pyramidea *L.*
30 perflua *F.*

G. SCOTOPHILA *H. Bdv.*

31 tragopogonis *L.*

G. MANIA *Tr. Bdv.*

32 typica *L.*
33 maura *L.*

G. RUSINA *Steph. Bdv.*

34 tenebrosa *H.*

TRIBU 4. **Noctuina.**

G. SEGETIA *Steph. Bdv.*

35 xanthographa *F.*

G. CERIGO *Steph. Bdv.*

36 cytherea *F.*

G. TRIPHÆNA *Treits. Bdv.*

37 linogrisea *F.*

38 interjecta *H.*
39 janthina *F.*
40 fimbria *L.*
41 orbona *F.*
42 subsequa *Wv.*
43 pronuba *L.*
var. *innuba.*

G. CHERSOTIS *Bdv.*

44 porphyrea *H.*
45 ? agathina *Bdv.*
46 plecta *L.*

G. NOCTUA *F. Tr. Bdv.*

47 c-nigrum *L.*
48 rhomboidea *Esp.*
49 triangulum *O.*
50 conflua *Tr.*
51 punicea *H.*
52 festiva *Wv.*
53 dahlii *H.*
54 brunnea *F.*
55 baïa *F.*
56 sigma *Wv.*

G. SPÆLOTIS *Bdv.*

57 augur *F.*
58 lucipeta *F.*
59 pyrophila *F.*

G. AGROTIS *Ochs. Bdv.*

60 saucia *H.*
61 suffusa *F.*
62 segetum *Wv.*
var. *dilutior.*
63 exclamationis *L.*
var. *unicolor H.*
64 corticea *Wv.*
65 cinerea *Bork.*
66 tritici *L.*
67 aquilina ? *Wv.*
68 fumosa *F.*
69 puta *H.*
70 lignosa *God.* (*Puta var. Bdv*)
71 putris *L.*

G. HELIOPHOBUS *Bdv.*

72 graminis *L.*
73 popularis *F.*

TRIBU 5. **Hadenina.**

G. LUPERINA *Bdv.*

74 leucophæa *Bork.*
75 testacea *Wv.*
76 infesta *O.*
77 virens *L.*
78 lateritia *Esp.*
79 rurea *F.*
var. *combusta H.*
80 scolopacina *H.*
81 pinastri *L.*
82 lithoxylea *Wv.*
83 polyodon *L.*
84 conspicillaris *L.*
var. *melaleuca Bdv.*
85 basilinea *F.*
86 gemina *H.*
87 didyma *Bork.*
var. *secalina H.*
88 leucostygma *H.*
var. *fibrosa H.*
89 nictictans *L.*

G. APAMEA *Tr. Bdv.*

90 strigilis *L.*
var. *latruncula Wv.*
91 furuncula *Wv.*
var. *vinctuncula H.*

G. HADENA *Tr. Bdv.*

92 persicariæ *L.*
93 suasa *Wv.*

94 oleracea *L.*
95 pisi *L.*
96 chenopodii *F.*
97 dentina *Esp.*
98 saponariæ *Esp.*
99 atriplicis *L.*
100 adusta *Esp.*
101 thalassina *Bork.*
102 genistæ *Bork.*
103 contigua *F.*
104 protea *Esp.*

G. PHLOGOPHORA *Tr. Bdv.*

105 lucipara *L.*
106 meticulosa *L.*

G. APLECTA *Guenée Bdv.*

107 tincta *Bork.*
108 nebulosa *Naturforscher.*
109 occulta *Rossi.*
110 herbida *H.*
var. *prasina Bork.*

G. AGRIOPIS *Bdv.*

111 aprilina *L.*

G. MISELIA *Tr. Bdv.*

112 oxyacanthæ *L.*

G. DIANTHÆCIA *Bdv.*

113 comta *F.*
114 capsincola *Esp.*
115 cucubali *Wv.*

G. ILARUS *Bdv.*

116 ochroleuca *Wv.*

G. POLIA *Tr. Bdv.*

117 dysodea *Wv.*
118 serena *F.*
119 chi *L.*
120 flavicincta *F.*

G. THYATYRA *Ochs. Bdv.*

121 batis *L.*
122 derasa *L.*

TRIBU 6. **Leucanina.**

G. LEUCANIA. *Ochs. Bdv.*

123 conigera *F.*
124 albipuncta *F.*
125 lithargyria *Esp.*
126 l-album *L.*
127 comma *L.*
128 pallens (21) *L.*

TRIBU 7. **Caradrinina.**

G. CARADRINA *Ochs. Bdv.*

129 trilinea *Wv.*
130 plantaginis *H.*
131 blanda *H.*
132 alsines *Bork.*
133 morpheus *Wv.*
134 cubicularis *Wv.*

TRIBU 8. **Orthosina.**

G. ORTHOSIA *Ochs. Bdv.*

135 gothica *L.*
136 hebraica *H.*
137 neglecta *H.*
138 gracilis *F.*
139 humilis *F.*
140 pistacina *F.*
var. *lychnidis H.*

---

(21) *Leuc. impura H.* du nord de la France.
Nonagria typhæ Esp. du nord de la France.

141 rubricosa *F.*
142 macilenta *Tr.*
143 munda *F.*
144 instabilis *F.*
145 ypsilon *Wv.*
146 stabilis *H.*
147 miniosa *F.*
148 ambigua *H.* (22)

G. TRACHEA *Ochs. Bdv.*

149 piniperda *Esp.*

G. COSMIA *Ochs. Bdv.*

150 diffinis *L.*
151 affinis *L.*
152 pyralina *Wv.*
153 trapezina *L.*
154 fulvalgo *Wv.*

G. XANTHIA *Ochs. Bdv.*

155 rubecula *Esp.*
156 ferruginea *H.*
157 rufina *L.*
158 xerampelina *H.*
159 aurago *F.*
160 silago *H.*
161 cerago *Wv.*
162 gilvago *F.*
163 citrago *L.*

G. HOPORINA *Bdv.*

164 croceago *F.*

G. CERASTIS *Ochs. Bdv.*

165 vaccinii *L.*
166 silene *Wv.*
167 satellitia *L.*

TRIBU 9. **Xylinina.**

G. XYLINA *Tr. Bdv.*

168 vetusta *H.*
169 exoleta *L.*
170 rhizolitha *F.*
171 petrificata *F.*

G. XYLOCAMPA *Guénée Bdv.*

172 lithorhyza *Bork.*

G. CLOANTHA *Bdv.*

173 perspicillaris *L.*

G. CLEOPHANA *Tr. Bdv.*

174 linariæ *F.*

G. CUCULLIA *Ochs. Bdv.*

175 absynthi *L.*
176 umbratica *L.*
177 camomillæ *Wv.*
var. *Chysanthemi H.*
(lucifuga Dup.) (23)
178 asteris *F.*
179 scrophulariæ *Esp.*
180 verbasci *L.*

TRIBU 10. **Plusina.**

G. ABROSTOLA *Ochs. Bdv.*

181 triplasiæ *L.*
182 urticæ *H.*

G. CHRYSOPTERA *Latr. Bdv.*

183 concha *F.*

---

(22) *Orth. rutilla Esp.* (*Serpylli Hubn*) de Metz selon M. Holandre.
(23) *Cuc. lactucæ Esp.* du nord de la France.

G. PLUSIA *Ochs. Bdv.*

184 festucæ *L.*
185 chrysitis *L.*
186 iota *L.*
187 gamma *L.*

TRIBU 11. **Heliothidina.**

G. ANARTA *Ochs. Bdv.*

188 myrtilli *L.*
189 arbuti *F.*

G. HELIOTHIS *Ochs. Bdv.*

190 dipsacea *L.* (24)
191 peltigera *Wv.*
192 armigera *H.*
193 marginata *F.*

TRIBU 12. **Acontina.**

G. ACONTIA *Ochs. Bdv.*

194 luctuosa *Wv.*

TRIBU 13. **Catocalina.**

G. CATEPHIA *Ochs. Bdv.*

195 alchymista *F.*
196 leucomelas *Wv.*

G. CATOCALA *Ochs. Bdv.*

197 fraxini *L.*
198 nupta *L.*
var. *concubina Bork.*
199 sponsa *L.*
var ? *desiderata De Selys.*
200 promissa *F.*
201 electa *Bork.*

G. OPHIUSA *Ochs. Bdv.*

202 lunaris *F.*
203 lusoria *L.*
204 craccæ *F.*

TRIBU 14. **Erastrina.**

(Noctuophalænides Bdv.)

G. EUCLIDIA *Ochs. Bdv.*

205 mi *L.*
106 glyphica *L.*

G. BREPHOS *Ochs. Bdv.*

207 parthenias *L.*
208 notha *H.*

G. ANTHOPHILA *Ochs. Bdv.*

209 ænea *Wv.*
210 argentula *Bork.*

G. AGROPHILA *Bdv.*

211 sulphurea *H.*
212 unca *Wv.*

G. ERASTRIA *Ochs. Bdv.*

213 fuscula *Wv.*
214 atratula *Bork.*

FAMILLE IV. PHALÉNIDÉES.

GEOMETRA *Tr. Bdv.*

1 papilionaria *L.*

PHORODESMA *Bdv.*

2 bajularia *Esp.*

---

(21) *Hel. ononis F.* de l'est de la France — de Belgique ?

HEMITHEA *Dup. Bdv.*

3 cythisaria *Wv.*
var. *coronillaria Dup.*
4 æruginaria *Wv.*
5 viridaria *L.*
6 vernaria *Wv.*
7 æstivaria *Esp.*

PHALÆNA *L. Steph.*
(Metrocampa Latr. Bdv.)

8 fasciaria *L.*
var. *prasinaria H.*
9 margaritaria *L.*
10 honoraria *Wv.*

URAPTERYX *Kirby Bdv.*

11 sambucaria *L.*

RUMIA *Dup. Bdv.*

12 cratægaria *L.*

ENNOMOS *Dup. Bdv.*

13 syringaria *L.*
14 dolabraria *L.*
15 apiciaria *Wv.*
16 parallelaria *Wv.*
17 advenaria *Esp.*
18 lunaria *Wv.*
19 delunaria *H.*
20 illunaria *Wv.*
21 illustraria *H.*
22 angularia *Wv.*
23 erosaria *Wv.*
24 tiliaria *H.*
25 alniaria *L.*
26 dentaria *Esp.*
27 prunaria *L.*
var. *corylaria Esp.*

HIMERA *Dup. Bdv.*

28 pennaria *L.*

CROCALLIS *Tr. Bdv.*

29 elinguaria *L.*

AVENTIA *Dup. Bdv.*

30 flexularia *H.*

MACARIA *Curtis Bdv.*

31 notataria *F.*
32 alternaria *H.*
33 lituraria *H.*

HALIA *Dup. Bdv.*

34 wavaria *L.*

ASPILATES *Tr. Bdv.*

35 vibicaria *L.*
36 purpuraria *L.*
37 adspersaria *Bork.*
38 ? citraria *H.*
39 gilvaria *Wv.* (25)

PLOSERIA *Bdv.*

40 diversaria *H.*

NUMERIA *Dup. Bdv.*

41 pulveraria *L.*

FIDONIA *Tr. Bdv.*

42 piniaria *L.*
43 atomaria *L.*

EUPISTERIA *Bdv.*

44 concordaria *H.*
45 quinquaria *H.*
46 hepararia *H.*

---

(25) *Asp. gloriosiaria Bdv.* des marais de la Picardie.

SPERANZA *Curtis. Bdv.*

47 conspicuaria *Esp.*

ANISOPTERYX *Steph. Bdv.*

48 æscularia *Wv.*

HIBERNIA *Latr. Bdv.*

49 aceraria *Wv.*
50 rupicapraria *Wv.*
51 aurantiaria *Esp.*
52 progemmaria *H.*
53 defoliaria *L.*
54 leucophæaria *Wv.*
var. *nigricaria H.*
55 bajaria *H.*
56 pilosaria *Wv.*

NYSSIA *Dup. Bdv.*

57 hispidaria *Wv.*

AMPHIDASIS *Tr. Bdv.*

58 histaria *L.*
59 betularia *L.*
60 prodomaria *F.*

BOARMIA *Tr. Bdv.*

61 repandaria *Wv.*
62 roboraria *Wv.*
63 consortaria *F.*
64 rhomboidaria *Wv.*
65 abietaria *Wv.*
66 cinctaria *Wv.*
67 viduaria *Wv.*
68 lichenaria *Wv.*

TEPHROSIA *Bdv.*

69 crepuscularia *Wv.*
70 consonaria *H.*
71 extersaria *H.*
72 punctularia *H.*

ELOPHOS *Bdv.*

73 dilucidaria ? *Wv.*

GNOPHOS *Tr. Bdv.*

74 furvaria *H.*
75 obscuraria *H.*

BOLETOBIA *Bdv.*

76 carbonaria *Wv.*

EUBOLIA *Dup. Bdv.*

77 murinaria *Wv.*
78 palumbaria *Wv.*
79 mensuraria *Wv.*
80 obliteraria *De Selys.*
81 mæniaria *Wv.*
82 bipunctaria *Wv.*
83 ? salicaria *Tr.*
84 ? scabraria *Tr.*
85 miaria *Wv.*
86 ferrugaria *Wv.*
87 quadrifasciaria *Wv.*
88 ligustraria *Tr.*

ANAITIS *Dup. Bdv.*

89 donchieraria *De Selys.*
90 plagiaria *L.*
91 ? præformaria. *H.*

LARENTIA *Tr. Bdv.*

92 dubitaria *L.*
93 certaria *H.*
94 undularia *L.*
95 bilinearia *L.*
var. *fusca.*
96 tersaria *Wv.*
97 vitalbaria *Wv.*
98 aquaria *H.*
99 polygrammaria *Bork.*
100 petraria *Esp.*

101 molluginaria ? *H.*
102 cæsiaria *Wv.*
103 psittacaria *F.*
104 coraciaria *H.*
105 dilutaria *Wv.*
106 autumnaria *Bdv.*
107 brumaria *L.*

LOBOPHORA *Curtis Bdv.*

108 sertaria *H.*
(appendicularia Bdv.)
109 lobularia *H.*
110 hexapteraria *F.*

EUPITHECIA *Curtis Bdv.*

111 impuraria *H.*
112 sparsaria *H.*
113 pimpinellaria *H.*
114 oxydaria *Tr.*
115 succenturaria *L.*
116 centaurearia *H.*
117 reductaria *Bdv.*
118 venosaria *H.*
119 subumbraria *H.*
120 pusillaria *Wv.*
121 valerianaria *H.*
122 pumilaria *H.*
123 austeraria *H.*
124 indigaria *H.*
125 minutaria *H.*
var. *absynthiaria H.*
126 strobilaria *Bork.*
127 rectangularia *F.*
128 coronaria *H.*
(rectangularia var. Bdv.)
129 begrandaria *Bdv.*
130 oxycedraria *Ramb.*
131 sobrinaria *H.*
132 nanaria *H.*

CHESIAS *Tr. Bdv.*

133 spartiaria *F.*
134 obliquaria *Wv.*

CIDARIA *Tr. Bdv.*

135 achatinaria *H.*
136 popularia *L.*
137 pyraliaria *Wv.*
138 fulvaria *Wv.*
139 juniperaria *L.*
140 variaria *Wv.*
141 ruptaria *H.*
142 simularia *H.*
143 sinuaria *Wv.*
144 rubidaria *Wv.*
145 derivaria *Wv.*
146 badiaria *Wv.*
147 berberaria *Wv.*
148 prunaria *L.*
(ribesiaria Bdv.)
149 silacearia *Wv.*
150 russaria *Wv.*
151 elutaria *H.*
152 impluviaria *H.*
153 propugnaria *F.*
154 viretaria *H.*
155 picaria *H.*
156 olivaria *Tr.*

G. MELANIPPE *Dup. Bdv.*

157 macularia *L.*
var. *fusca.*
158 marginaria *H.*
159 hastaria *L.*
160 tristaria *L.*
161 luctuaria *Wv.*
162 rivularia *Wv.*
163 rivaria *H.*

164 alchemillaria *L.*

G. MELANTHIA *Dup. Bdv.*

165 montanaria *Wv.*
166 ocellaria *L*
167 fluctuaria *L.*
168 galiaria? *Wv.*
169 blandiaria *Wv.*
170 rubiginaria *Wv.*
171 procellaria *Wv.*
172 adustaria *Wv.*
173 albicillaria *L.*

G. ZERENE *Tr. Bdv.*

174 grossularia *L.*
175 ulmaria *H.*

G. CABERA *Tr. Bdv.*

176 taminaria *H.*
177 pusaria *L.*
178 exanthemaria *Esp.*
179 strigillaria *Esp.*

G. EPHYRA *Dup. Bdv.*

180 trilinearia *Bork.*
181 punctaria *L.*
var. ? *hybridaria De Selys*
182 poraria *Tr.*
183 pendularia *L.*
184 omicronaria *Wv.*

G. ACIDALIA *Tr. Bdv.*

185 temeraria *H.*
186 ornataria *Esp.*
187 contiguaria *H.*
188 incanaria *H.*
189 rusticaria *H.*
190 scutularia *H.*
191 bisetaria *Tr.*
var. *reversaria Dup.*
var. *sylvestraria Dup.*
192 auroraria *Wv.*
193 ochrearia *F.*
194 rufaria? *H.*
195 rubricaria *H.*
196 osseraria *Wv.*
197 lutearia *Wv.*
198 decoloraria *H.*
199 albularia *F.*
200 sylvaria *Wv.*
201 candidaria *W.*
202 immoraria *L.*
203 cespitaria *Bdv.*
204 sylvestraria *Bork.*
205 punctaria *Devillers.*
206 remutaria *H.*
207 aversaria *L.*
208 emarginaria *L.*
209 imitaria *H.*
210 mutataria *H.*
211 ? umbellaria *H.*
212 strigilaria *Wv.*
(prataria Bdv.)

G. TIMANDRA *Dup. Bdv.*

113 amataria *L.*

G. STRENIA *Dup. Bdv.*

214 clathraria (25) *L.*

G. STHANELLA *Bdv.*

215 hippocastanaria *H.*

G. ODEZIA *Bdv.*

216 chæriophyllaria *L.*

G. MINOA *Tr. Bdv.*

217 euphorbiaria *H.*

---

(25) *Siona dealbaria* L. des environs de Metz.

FAMILLE V. PYRALIDÉES.

TRIBU 1. **Herminina.**

G. HERMINIA *Latr. Dup.*

1 emortualis *H.*
2 derivalis *H.*
3 grisealis *H.*
4 tarsiplumalis *H.*
5 barbalis *L.*
6 crinalis *Tr.*

G. HYPENA *Schr. Dup.*

7 proboscidalis *L.*
8 rostralis *Schr.*
9 crassalis *F.*
var. *nigralis.*

G. MADOPA *Steph. Dup.*

10 salicalis *Wv.*

G. AGLOSSA *Latr. Dup.*

11 pinguinalis *L.*
12 cuprealis *H.*

G. CLEDEOBIA *Steph. Dup.*

13 angustalis *Wv.*
14 brunnealis *Tr.*

TRIBU 2. **Pyralina.**

G. ODONTIA *Dup.*

15 dentalis *Schr.*

G. SCOPULA *Schr. Dup.*

16 umbralis *H.*
17 prunalis *Wv.*
18 nubilalis *H.*
19 margaritalis *Wv.*
20 stramentalis *Tr.*
21 frumentalis *L.*

G. BOTYS *Latr. Dup.*

22 urticalis *L.*
23 hyalinalis *Schr.*
24 verticalis *L.*
25 lancealis *Wv.*
26 cineralis *Wv.*
27 verbascalis *Wv.*
28 sambucalis *Wv.*
29 flavalis *Wv.*
30 crocealis *H.*
31 politalis *F.*
32 fulvalis *H.*
33 ferrugalis *H.*
34 sericealis *F.*
35 forficalis *F.*
36 hybridalis *H.*
37 palealis *F.*

G. HYDROCAMPA *Latr. Dup.*

38 potamogalis *L.*
39 obscuralis *De Selys.*
40 nymphæalis *L.*
41 lemnalis *L.*
42 stratiolalis *L.*
43 litteralis *Scop.*

G. PYRALIS, *L. Illig. Samouel.*
(Asopia Tr. Dup.)

44 farinalis *Wv.*
45 glaucinalis *L.*
46 nemoralis *Schr.*
47 flammealis *Wv.*

TRIBU 2. **Pyraustina.**

G. PYRAUSTA *Schr. Dup.*

48 purpuralis *L.*
49 punicealis *Wv.*
50 cespitalis *Wv.*

G. ENNYCHIA *Tr. Dup.*

51 anguinalis *H.*
52 cingulalis *L.*
53 atralis *H.*
54 octomaculalis *L.*

C. NOLA *Leach. Dup.*

55 strigulalis *Wv.*
56 ? cristulalis *H.*
57 palliolalis *Wv.*
58 centonalis *H.*

TRIBU 4. **Eudorœina.**

G. EUDORÆA *Curtis. Dup.*

59 ambigualis *Tr.*
60 dubitalis ? *H.*
61 cratægalis? *L.*

FAMILLE VI. TORTRICIDÉES.

G. HALIAS *Tr. Dup.*

1 quercana *Wv.*
2 prasinana *L.*
3 chlorana *L.*

G. SARROTHRIPA *Curtis Dup.*

4 revayana *F.*
5 ramosana *Curtis.*

G. TORTRIX *L. Tr. Dup.*

6 viridana *L.*
7 cratægana *H.*
8 amerinana *L.*
9 corylana *F.*
10 sorbiana *H.*
11 xylosteana *L.*
12 roborana *H.*
13 oxyacanthana *H.*
14 plumbana *L.*
15 unicolorana *Dup.*
16 ministrana *L.*
17 alphontiana *Dup.*
18 holmiana *L.*
19 grotiana *F.*
20 læflingiana *H.*
21 lecheana *L.*
22 bergmannana *L.*
23 hoffmanseggiana *Tr.*
24 ribeana *H.*
25 gnomana *L.*
26 heparana *Wv.*
27 acerana *H.*
28 permixtana *H.*

G. GLYPHIPTERA *Dup.*

29 tripunctana *H.*
30 squamana *F.*
31 nebulana *H.*
32 boscana *F.*
33 cerusana *Dup.*
34 treveriana *Wv.*
35 litterana *L.*
36 rufana ? *H.*
37 spectrana ? *Tr.*
38 badiana ? *H.*

39 lipsiana ? *Wv.*
40 ulmana *Dup.*

G. PERONEA *Steph. Dup.*

41 abildgaardiana *F.*
42 favillaceana *H.*
43 asperana *F.*
44 comparana *H.*

G. TERAS *Tr. Dup.*

45 caudana *F.*
46 emargana ? *F.*

G. ASPIDIA *Tr. Dup.*

47 cynosbana *F.*
48 solandriana *L.*

G. PENTHINA *Tr. Dup.*

49 salicana *L.*
50 capreana *H.*
51 pruniana *H.*
52 hartmanniana *L.*
53 sauciana *H.*
54 arcolana *H.*
55 luscana *F.*
56 gentianana *H.*
57 cespitana *H.*
58 ocellana *H.*
59 variegana *H.*
60 minorana *H.*

G. SERICORIS *Tr. Dup.*

61 urticana *H.*
62 gemmana *H.*
63 elutana *Dup.*
64 conchana *H.*
65 zincknenana ? *Tr.*
66 charpentierana *Tr.*

G. COCCYX *Tr. Dup.*

67 comitana *Wv.*
68 flammeana *H.*
69 turionana ? *L.*
70 resinana *L.*

G. CARPOCAPSA *Tr. Dup.*

71 pomonana *L.*
72 splendana *H.*
73 wœberiana *H.*
74 arcuana *F.*

G. GRAPHOLITHA *Tr. Dup.*

75 hohenwartiana *Wv.*
76 campoliliana *Wv.*
77 rhediana *L.*
78 nebritana *Tr.*
79 triquetrana *H.*
80 petrana *H.*
81 vermiculana *Dup.*
82 cæcimaculana *H.*
83 lithoxylana *Frœlich.*
84 mitterbachiana *Wv.*
85 succedana? *Wv.*
86 hypericana ? *H.*
87 minutana ? *H.*
88 aspidiscana *H.*
89 costana *Curtis.*
90 siliceana *H.*

G. EPHIPPIPHORA *Dup.*

91 trauniana *H.*
92 petiverana *L.*
93 composana *F.*
94 germarana.
95 luctuosana *Dup.*
96 ulmana *H.*
97 alpiniana *Tr.*
98 fæneana *L.*
99 pygmæana *H.*
100 jungiana *L.*
101 mediana ? *Wv.*

102 inquinatana ? *H.*
103 ephippina ? *H.*
104 dorsana *H.*
105 argyrana *H.*

G. PHOXOPTERYX *Tr. Dup.*

106 derasana *H.*
107 lanceolana *H.*
108 penkleriana *Wv.*
109 myrtillana *H.*
110 siculana.
111 unguicana *L.*
112 uncana *Wv.*
113 ramana *L.*
114 badiana *Wv.*

G. PAEDISCA *Tr. Dup.*

115 parmatana ? *H.*
116 corticana *H.*
117 nubilana *H.*
118 wellensiana *H.*
119 similana ? *H.*
120 tenerana *H.*

G. SCIAPHILA *Tr. Dup.*

121 wahlbaumiana *L.*
122 rugosana *H.*
123 musculana *H.*
124 striana *Wv.*
125 cretaceana *H.*
126 quadrana *H.*
127 frutetana *H.*

G. XANTHOSETIA *Steph. Dup.*

128 zoegana *L.*
129 hamana *L.*

G. COCHYLIS *Tr. Dup.*

130 ambiguana *Tr.*
131 angustana *H.*
132 smeathmanniana *F.*
133 dubitana *H.*
134 reliquana *Dup.*

G. ARGYROLEPIA *Steph. Dup.*

135 baumanniana *F.*
136 tesserana *Wv.*
137 rubigana *Tr.*

G. XYLOPODA *Latr. Dup.*

138 fabriciana *L.*
139 pariana *L.*

G. PHIBALOCERA *Steph. Dup.*

140 fagana *Wv.*

FAMILLE VII. CRAMBIDÉES.

TRIBU 1 **Crambina.**

G. SCHÆNOBIUS *Dup.*

1 gigantellus *L.*
2 forficellus *Thunberg.*
3 mucronellus *Wv.*

G. CRAMBUS *F. Latr. Dup.*

4 pascuellus *L.*
5 dumetellus *H.*
6 pratellus *L.*
7 adipellus *Tr.*
8 rorellus *L.*
9 chrysonnehellus *Scop.*
10 hortuellus *H.*
11 falsellus *Wv.*
12 culmellus *L.*
13 inquinatellus *Wv.*

14 pinetellus *H.*
15 mytilellus *H.*
16 conchellus *Wv.*
17 margaritellus *Wv.*
18 aquilellus *H.*
19 luteellus *Wv.*
20 perlellus *Wv.*
21 angulatellus *Dup.*

TRIBU 2. **Gallerina.**

G. ILYTHIA *Latr. Dup.*

22 carnella *L.*
23 ? argyrella *Wv*

G. PHYCIS *Zincknen Dup.*

24 palumbella *Wv.*

25 abenella *Wv.*
26 transversella *Dup*
27 abietella *Wv.*
28 roborella *H.*
29 ornatella *Wv.*
30 subornatella *Zeller.*
31 tumidella *Wv.*
32 elutella *H.*
33 rhenella *Tr.*

G. GALLERIA *Latr.*

34 colonella *L.*
35 anella *Wv.*
36 cerella *L.*

FAMILLE VIII. TINEIDÉES.

TRIBU 1. **Yponomeutina.**

G. MIELOPHILA *Tr. Dup.*

1 cribrella *F.*

G. MELANOLEUCA *Steph.*
(Ædia Dup.)

2 echiella *Wv.*
3 cænobitella *H.*

G. YPONOMEUTA *Latr. Dup.*

4 evonymella *H.*
5 cognatella *H.*
6 malinella *Dup.*
7 padella *L.*
8 plumbella *F.*
9 sexpunctella *H.*
10 sedella *Tr.*

TRIBU 2. **Tineina.**

G. DIURNEA *Haworth Dup.*

11 fagella *L.*
var. ? *dormoyella Dup.*

G. LEMMATOPHILA *Tr. Dup.*

12 salicella *H.*
13 phryganella *Schr.*

G. SOLENOBIA *Dup.*

14 andereggella *Dup.*

G. EPIGRAPHIA *Steph. Dup.*

15 strincknellnerella *Wv.*
16 avellanella *H.*

G. TINEA *L. Geoffr. Latr. Dup.*

17 granella *L.*
18 tapezella *L.*
19 herodella *S.*
20 ferruginella *H.*

21 repandella *H.*
22 pellionella *L.*
23 crinella *Tr.*
24 cerasiella *H.*
25 cratægella *L.*
26 lappella *H.*

G. HÆMILIS *Tr. Dup.*

27 cicutella *Tr.*
28 hypericella? *H.*
29 pastinacella *Zeller.*
30 arenella *Wv.*
31 rubidella *H.*
32 alstroemerella *L.*
33 heracliella *L.*
34 depressella *H.*
35 depunctella *Tr.*

G. AGONIOPTERYX *Tr.*
(Caulobius Dup.)

36 sparganella *Germar.*

G. PLUTELLA *Curtis*
(Hypsolopha Dup.)

37 sylvella *L.*

G. RHINOSIA *Tr. Dup.*

38 costella *F.*
39 ustubella *F.*
40 fasciella *H.*
41 sequella *L.*
42 fissella *H.*
43 vittella *Steph.*

G. HYPSOLOPHA *Fab. Steph.*
(Alucita Dup.)

44 xylostella *L.*
45 porrectella *L.*

G. PALPULA *Tr. Dup.*

46 bicostella *L.*
47 barbella *L.*

G. HARPIPTERYX *Tr. Dup.*

48 harpella *F.*

G. LAMPROS *Tr. Dup.*

49 majorella *Wv.*

G. ANACAMPSIS *Curtis Dup.*

50 Zephyrella *Tr.*
51 populella *L.*
52 nigrovitella *Dup.*
53 luculella *H.*
54 tremulella *Dup.*

G. LITA *Tr. Dup.*

55 vorticella *Scop.*
56 alacella *Zeller.*
57 albocingulella *Dup.*
58 bicolorella *Tr.*
59 betulinella *H.*
60 nigrovitella *Dup.*

G. ACOMPSIA *H. Dup.*

61 tripunctella *F.*
62 cinerella *L.*

G. BUTALIS *Tr. Dup.*

63 similella *H.*
64 tinctella *H.*

G. ADELA *Latr. Dup.*

65 degeerella *L.*
66 scabiosella *Scop.*
67 reaumurella *L.*
68 violella? *Wv.*
69 cuprella *Wv.*
70 swammerdammella *L.*
71 calthella *L.*
72 donzelella *Dup.*

G. DASYCERA *Steph. Dup.*

73 oliviella *F.*

G. ENICOSTOMA *Steph. Dup.*

74 geoffroyella *L.*

G. INCURVARIA *Steph. Dup.*

75 flavimitrella *H.*
76 masculella *Wv.*
77 multipunctella *Dup.*

G. STENOPTERA *Dup.*

78 orbonella *H.*

G. ÆSCHMIA *Tr. Dup.*

79 thrasonella *Scop.*
80 equitella *Scop.*

G. ÆCOPHORA *Latr. Dup.*

81 brockeella *H.*
82 tetrapodella *L.*
83 pruniella *L.*
84 linneella *L.*
85 schmidtella *Tr.*
86 guttiferella *Zeller.*
87 goedartella *L.*
88 hermannella *F.*
89 procerella *H.*
90 fundella *Tr.*

G. ELACHISTA *Tr. Dup.*

91 complanella *H.*
92 muscidella *H.*
93 salaciella *H.*
94 cydoniella *F.*
95 spartifoliella *H.*
96 alcyonipennella ? *Kollar.*
97 cramerella *F.*
98 ulmifoliella *H.*
99 saportella *Dup.*
100 boyerella *Dup.*
101 spinolella *Dup.*
102 quercifoliella *Fischer.*

G. ORNIX *Tr. Dup.*

103 struthionipennella *Wv.*
104 ornatipennella *H.*
105 otidipennella *H.*

G. GRACILLARIA *Steph. Dup*

106 hilaripennella *H.*
107 upupæpennella *H.*
108 signipennella *H.*

FAMILLE IX. PTÉROPHORIDÉES.

TRIBU 1. **Pterophorina.**

G. PTEROPHORUS *Geoffr. Dup.*

1 ochrodactylus *Wv.*
2 rhododactylus *H.*
3 tesseradactylus *L.*
4 calodactylus *Wv.*
5 didactylus *Scop.*
6 hemididactylus *De Selys.*
7 phæodactylus *H.*
8 pterodactylus *Scop.*
9 ptilodactylus *H.*
10 zophodactylus *Dup.*
11 xanthodactylus *Tr.*
12 lithoxylodatyclus ? *Dup.*
13 tetradactylus *L.*
14 galactodactylus ? *Curtis.*
15 pentadactylus *L.*
16 spilodactylus *Curtis.*

TRIBU 2. **Alucitina.**

G. ALUCITA *L. Curtis.*
(Orneodes Latr. Dup.)

17 hexadactyla *L.*

RÉCAPITULATION.

Diurnes.	papilionidées	36 espèces.
	nymphalidées	39
	hespéridées	13
Nocturnes.	sphingidées	36
	bombycidées	104
	noctuidées	214
	phalénidées	217
	pyralidées	61
	tortricidées	140
	crambidées	36
	tinéidées	108
	ptérophoridées	17
	TOTAL	1021

Plus 80 espèces environ de tortricidées et de tinéidées répandues dans les collections = 1100 espèces.

ABRÉVIATIONS

DES AUTEURS CITÉS DANS LE COURS DE CE TRAVAIL.

Bdv. — Boisduval.
Bork. — Borkhausen.
Dup. — Duponchel.
Eng. — Engramelle.
Esp. — Esper.
F. — Fabricius (J. Chr.)
Schr. — Schranck.
Scop. — Scopoli.
Steph. — Stephens (J. Fr.)
Tr. — Treitske.
Wv. — Denis et Schiffermüller.
Geoffr. — Geoffroy.
H. — Hubner.
Illig. — Illiger.
L. — Linné.
Latr. — Latreille.
O. — Ochsenheimer.

DESCRIPTION

DES ESPÈCES PRÉSUMÉES NOUVELLES ET DE QUELQUES VARIÉTÉS REMARQUABLES INDIQUÉES DANS L'ÉNUMÉRATION DES LÉPIDOPTÈRES LA BELGIQUE.

§. 1. Espèces nouvelles.

N°. EUBOLIA OBLITERARIA *De Selys.*

Eubolie oblitérée.

Taille intermédiaire entre celle des *E. ligustraria* et *ferrugaria* (11 lignes $^1/_2$ d'envergure) — antennes plus courtes, plus pectinées, plus foncées que chez la *ligustraria* — ailes plus larges, moins oblongues d'un cendré noirâtre en-dessus avec quelques dessins plus foncés consistant (autant que l'on peut en juger sur un exemplaire altéré) 1°. en un point discoidal un peu après la moitié des supérieures. 2° une raie transverse parallèle au bord de l'aile entre ce point et l'extrémité. 3°. une raie analogue aux deux tiers des ailes inférieures.

Le dessous des quatre ailes est cendré foncé comme le dessus passant un peu au brun roussâtre vers la côte et les extrémités. On distingue le point noir discoidal des ailes supérieures.

La frange est semblable au fond des ailes de part et d'autre.

Par la couleur uniforme du dessous des ailes, cette espèce se rapproche un peu de la *mensuraria* et de la *palumbaria* mais le point discoidal des supérieures en dessous et la forme raccourcie du sommet des quatre l'en distinguent au premier abord — d'après la description donnée par M. Duponchel de l'*artesiaria* cette dernière me semble au moins bien voisine de notre nouvelle espèce.

Décrite d'après un individu mâle en mauvais état que j'ai pris dans la promenade à Spa vers le 15 août et que M. le docteur Boisduval n'a pu rapporter à aucune espèce de sa collection.

N°. 2. ANAÏTIS DONCKIERARIA *De Selys.*

Anaïte de Donckier.

Un peu plus petite que l'*Eubolia palumbaria* (à peine 13 lignes d'envergure) — ailes d'un blanchâtre cendré en dessus — les supérieures traversées par trois bandes rectilignes équidistantes d'un brun roussâtre clair ; l'une à la base, la seconde au milieu, la troisième entre le milieu et l'extrémité. Les deux premières sont légèrement fléchies à la côte — toutes sont terminées en dedans par une ligne plus foncée et en dehors par une ligne interrompue ce qui divise l'aile en sept parties égales. — On voit en outre des séries de points noirâtres saupoudrés sur le milieu des bandes claires. Les ailes inférieures sont traversées dans leur dernier tiers par une raie droite foncée — la frange des quatre ailes est précédée d'une suite de points noirs.

Dessous des ailes blanc jaunâtre sale, saupoudré de petits points cendré roussâtre avec un point discoidal suivi de deux raies transverses grises sur toutes les ailes. — Corps, pattes et antennes blanchâtres.

Décrite d'après un exemplaire pris en été à Chaudfontaine près de Liége par M. Donckier-Huart. Je l'ai dédiée à cet Entomophile dont les recherches et le zèle infatigables ont beaucoup contribué à faire connaître les lépidoptères de la Belgique.

N°. 3. HYDROCAMPA OBSCURALIS *De Selys.*

Hydrocampe obscur.

Cet Hydrocampe qui pourrait bien n'être qu'une variété du *potamogalis* en diffère surtout en ce que le fond des ailes est brun enfumé (mais avec les dessins noirs ordinaires) — aussi a-t-il un peu de l'apparence du *Botys sambucalis* sauf que les taches blanches mêmes sont envahies chez notre Hydrocampe par la couleur de suie. Le dessous des ailes est totalement brun-noirâtre luisant chez quelques exemplaires, mais avec des vestiges de taches blanchâtres chez d'autres. Chez ces derniers le dessus est aussi moins foncé et se rapproche un peu plus du *potamogalis* ce qui m'a fait soupçonner que l'*obscuralis* pourrait n'en être qu'une variété remarquable.

Je l'ai pris en été à Longchamps-sur-Geer non loin des étangs. Il est très-rare. Il ne serait pas impossible que le *potamogalis* dut-être démembré en deux espèces d'après une autre considération ; celle de la grande diversité de taille ; dans ce cas l'*obscuralis* serait peut-être une variété de la petite race (qui ressemble un peu au *nymphœalis*) car il n'a jamais plus de 10 lignes d'envergure tandis que la grande race ou *potamogalis* proprement dit à les dessins moins arrêtés et varie de 12 à 15 lignes d'envergure.

N°. PTEROPHORUS HEMIDIDACTYLUS *De Selys.*

Ptérophore hémididactyle.

Cette espèce que M. Duponchel n'a pu reconnaître est d'un tiers plus petite qu'aucune de celles qu'il a publiées. Elle n'a que 5 lignes $^1/_2$ d'envergure mais ressemble beaucoup pour la forme et la coloration au *Pt. didactylus* qui a 8 lignes $^1/_2$ d'envergure.

Ne possédant qu'un seul individu non étalé que j'ai pris sur les broussailles des hautes fanges à Francorchamps près de Spa vers la fin de juillet, je n'oserais affirmer que les légères différences qui existent entre sa coloration et celle du *didactylus* soient constantes, mais n'ayant jamais vu de grandes variétés dans la stature de ce dernier je suis persuadé que l'*hemididactylus* forme une espèce distincte caractérisée principalement par ses dimensions. C'est le pygmé du genre, au moins dans notre pays.

§ 2. Variétés.

N°. PIÈRIS NAPI *(L.) var. nigrovenosa De Selys.*

On n'observe que la femelle de cette variété qui est intermédiaire entre la *P. napi* proprement dite et la variété locale nommée *P. bryoniæ* qui se trouve dans les hautes Alpes. Elle est veinée et saupoudrée de noir en dessus presqu'autant que cette dernière, mais le fonds n'a pas autant cette coloration générale jaunâtre qui caractérise la variété alpine.

On la trouve dans nos bois humides.

J'ai pris au Simplon au niveau des neiges perpétuelles le mâle de la var. *bryoniæ*. Comme les entomologistes en parlant de cette variété remarquable ne font pas mention du mâle, je pense que

d'autres seront curieux comme je l'étais moi-même de connaître le facies d'un mâle pris en même qu'une femelle très caractérisée. Le dessus des ailes est blanc sans aucune tache: La base est un peu plus grisâtre que chez les individus ordinaires et la côte des supérieures est largement noirâtre. Le sommet ne diffère pas. Les nervures sont très-légèrement saupoudrées à leur extrémité. Le dessous des ailes est remarquable en ce qu'il est blanc, *nullement* lavé de jaunâtre sauf un vestige à la base des inférieures. Les nervures de ces dernières sont plus largement veinées de gris un peu olivâtre. Les antennes ont leur bouton plus jaune et sont annelées de roussâtre au lieu de blanc. C'est ici le lieu de faire remarquer que le mâle du *Pieris napi* a une odeur aromatique très-forte analogue à celle du serpolet. Je suis surpris qu'aucun entomologiste n'ait noté ce fait qui est constant.

Je crois me rappeler que le mâle de la variété pris au Simplon avait également cette odeur.

N°. 6. COLIAS HYALE *(L.) var. heliceides De Selys.*

Décrite d'après un individu singulier que j'ai pris en été à Longchamps-sur-Geer (province de Liége).

Il a la taille et l'apparence des petites femelles de la *C. chrysotheme* (16 lignes d'envergure) mais la teinte du fonds est d'un blanc un peu verdâtre comme celle de la variété *helice* de l'*edusa* ou de la femelle de la *phicomone*. Il diffère des exemplaires ordinaires par les caractères suivants : 1°. la bordure maculaire des quatre ailes est plus épaisse et à peu près aussi marquée que chez l'*edusa* femelle excepté qu'aux ailes supérieures la partie noire intérieure ne descend pas jusqu'au bord interne. 2°. la base des supérieures et la plus grande partie des inférieures excepté les taches de la bande marginale sont saupoudrées de gris verdâtre comme chez l'*helice* et la *phicomone*. 3°. Le point discoidal des supérieures est plus gros, mais comme il n'est pas pupillé de blanc en dessous il sert à distinguer cette variété de la *phicomone*.

Si les hybrides n'étaient pas chose si rare on pourrait supposer que cette variété provient de l'*hyale* et de l'*edusa* ou ce qui revient au même de l'*hyale* et de l'*helice*.

N°. VANESSA URTICÆ *(L.) var. ichnusioides De Selys.*

Les taches noires des ailes supérieures ne sont qu'au nombre de quatre comme chez la *V. ichnusa* de Corse dont elle imite tout-à-fait le caractère le plus apparent. Elle est en outre atteinte de mélanisme sur une grande partie des ailes inférieures.

Cette variété extraordinaire a été prise une seule fois à Huy et fait partie de la collection de M. Donckier-Huart.

N°. 8. MELITEA ATHALIA *(Bork.) var. navarina De Selys.*

Toute brune en dessus avec une série antéterminale de taches fauves. Le dessous des ailes plus noir qu'à l'ordinaire. Le manque de points noirs dans l'une des séries des tâches des secondes ailes en dessous empêche de rapporter à la *dyctinna* cette variété qui est figurée dans l'ouvrage d'Engramelle pl. LXII f. 31 e-f. Elle est très rare et pas constante.

N°. 9. MELITEA ATHALIA *(Bork.) var. hisopa De Selys.*

Dessus des ailes brun. Les supérieures avec trois bandes de taches fauves très larges, les inférieures avec une seule bande analogue antéterminale. Dessous des inférieures avec quatre taches arrondies noires à la base qui est fauve. Cette couleur terminée par du noir. Le reste d'un jaune clair avec les nervures et une raie antéterminale noires et une série transverse de cinq taches fauves non cerclées de noir.

Elle m'a été donnée par feu M. Charles Robert qui l'avait prise une fois près de Liége. C'est une sous-variété de la *pyronia* de Hubner.

N°. 10. LYCÆNA AMYNTAS *(F.)* var. ? *myrmidon Engr.*

On a rapporté à une seule et même espèce ou variété sous le nom de *polysperchon Ochs.* (ou *tiresias* H.) une Lycæna, qui est au moins très-voisine de l'*amyntas*. Comme il me semble qu'il y a beaucoup de contradiction dans ce que les auteurs ont écrit à ce sujet, je dois conclure qu'ils ont eu plusieurs insectes différents sous les yeux ou bien qu'ils ont donné des descriptions inexactes. Ne voulant pas augmenter encore la confusion, je discuterai briè-

vement ce qui a été avancé sans prétendre décider de ce qui a rapport à la question spécifique proprement dite.

M. Duponchel, résume les observations d'Ochsenheimer, Hubner et Treitske, page 337 de son supplément, mais je ne puis faire concorder ce qu'il dit avec ce que j'ai observé.

1°. Selon lui la femelle de l'*amyntas* est totalement brune. — Or toutes celles de Belgique que j'ai vues sont saupoudrées de bleu en dessus (mais de grande taille et avec des lunules ovales fauves de part et d'autre).

2°. Son *tiresias* (ou *polysperchon*) aurait la massue des antennes toute brune. — Mais ce caractère semble dénié par M. Treitske lui-même et n'a plus été revu par personne depuis Ochsenheimer.

3°. Ce *tiresias* n'aurait pas de lunule fauve à l'angle anal des ailes inférieures en dessous — caractère que je remarque cependant chez des exemplaires reçus d'Allemagne sous le nom de *polysperchon* et qui ont seulement ces lunules plus petites que l'*amyntas*. Je possède à la vérité une femelle du Piémont où les lunules sont nulles de part et d'autre et où la massue des antennes est un peu moins fauve mais il se trouve précisément que cette femelle est brune et nullement saupoudrée de bleu en dessus. De sorte qu'elle ne peut se rapporter à aucune des deux espèces adoptées par M. Duponchel. Elle est de taille intermédiaire (12 lignes d'envergure).

M. Boisduval cite une autre variété d'après Ochsenheimer, sous le nom de *coretas*. J'en parle plus bas.

Enfin on trouve dans l'ouvrage du père Engramelle, sous le nom de *Myrmidon* une petite espèce qu'on a aussi rapportée au *polysperchon* ou *tiresias*. Mais ce myrmidon a les deux ou trois petites lunules anales fauves du dessous. Les ailes de la femelle sont saupoudrées de bleu à la base en dessus et le bord postérieur des secondes est marqué de taches bleues appuyées sur un point noir.

Je conclus provisoirement qu'il faut distinguer comme races ou variétés, peut-être même comme espèces :

A. L'*amyntas* proprement dit, de grande taille (13 à 14 lignes d'envergure) — à lunules anales fauves, grandes en dessous, reparaissant en dessus chez la femelle. Cette dernière, en Belgique du moins, est aussi saupoudrée de bleu en dessus que la plûpart des femelles de l'*Alexis*. (Mais MM. Duponchel, Guénée et Devillers n'ont vu en France que des femelles brunes. Ce serait une variété. Toutefois la première des descriptions de Godard, concorde tout-à-fait avec nos exemplaires de Belgique.)

B. Le *polysperchon* Bergstr. Oschsen. (*Tiresias* Hubn.) De petite taille, sans lunules anales fauves — j'y rapporterais volontiers la femelle brune non saupoudrée en dessus que j'ai reçue du Piémont (mais M. Duponchel dit positivement qu'elle est toujours saupoudrée. Ce serait une variété.). Il faut effacer le caractère tiré de la couleur des antennes. M. Donckier possède un exemplaire mâle des environs de Bordeaux; il n'a aucun point noir vers l'angle anal en dessus.

C. Le *myrmidon* Engramelle, de petite taille. Les lunules fauves anales petites en dessous, et ne reparaissant que peu ou point en dessus chez la femelle. Cette dernière saupoudrée de bleu en dessus et offrant souvent une bordure maculaire bleuâtre aux secondes ailes. J'y rapporte des mâles que j'ai reçus d'Allemagne sous le nom fautif de *polysperchon* et deux exemplaires de Belgique dont l'un a été pris à Namur par M. Pôlet de Faveaux et l'autre à Huy sur des rochers calcaires en mai et juin, tandis que l'*amyntas* paraît à la fin de juillet et en août. Ces *myrmidon* n'ont que 9 lignes environ d'envergure.

D. Le *coretas* Ochsenheimer. (De petite taille?) — à lunule anale fauve très-petite, les taches ocellées du dessous des ailes sont petites et il serait dépourvu de la petite queue filiforme. Si ce dernier caractère n'est pas accidentel il s'indiquerai t une différence spécifique.

N°. 11. ZYGÆNA TRIFOLII *(Esp.)* var. *minoides, de Selys.*

Chez cette variété qui est plus ou moins caractérisée suivant les individus, les cinq points rouges des ailes supérieures sont réunis de manière à former une bande transverse comme chez la *Z. minos* mais de forme différente. Les ailes inférieures sont d'ailleurs bordées de noir comme chez les individus ordinaires.

N°. 12. BOMBYX NEUSTRIA *(L.)* var. *quercina, de Selys.*

Chez les individus ordinaires les ailes sont d'un brun roussâtre à peu près comme chez le *B. trifolii.* Les supérieures avec deux lignes transverses *jaunâtres.* Chez la variété que je signale les ailes sont d'un jaune assez clair comme chez la femelle du *B. quercûs* ou même plus clair encore. Les supérieures ont deux lignes transverse d'un *brun foncé.* Cette disposition d'avoir les deux lignes trans-

verses plus foncées que le fond lui donne un aspect singulier et analogue à celui du *B. castrensis* mâle. Je ne possède que des mâles.

N°. 13. BOMBYX NEUSTRIA *(L.)* var. *confluens*, *De Selys.*

Diffère des exemplaires ordinaires en ce que les deux lignes transverses sont confluentes au milieu et forment l'X. Je n'ai observé que des femelles de cette variété qui peut être plus ou moins prononcée.

N°. 14. CATOCALA SPONSA *(L.)* var. *desiderata*, *de Selys.*

Cet insecte serait regardé au premier abord pour une variété plus petite de la *C. dilecta* du midi de la France. Sa taille est celle de la *sponsa* proprement dite, mais le dessus des premières ailes, *notamment les taches ordinaires*, est au moins aussi rembruni que celui de la vraie *dilecta.*

Outre sa taille moindre on la distingue aussi de la *dilecta* en ce que la bande transverse médiane noire des ailes inférieures forme vers le sommet un angle droit ou même un peu aigu tandis que chez la *dilecta* cet angle est presqu'aussi obtus que chez la *promissa*, mais cette dernière à la bande susdite plus étroite.

M. Deltour, amateur Liégeois, l'a prise une fois aux environs de Liége en été — elle a été également recueillie à Huy et j'en possède un individu d'Allemagne qui m'a été envoyé sous le nom de *dilecta.*

N°. 15. EPHYRA PUNCTULARIA *(L.)* var. *hybridaria*, *de Selys.*

Intermédiaire entre la *punctularia* et la *trilinearia;* les lignes moins marquées que chez cette dernière, mais ne consistant pas en points comme chez la première qui d'ailleurs a souvent le disque des supérieures saupoudré de rougeâtre, ce qui ne se voit pas chez l'*hybridaria.*

Elle est commune en Belgique en été.

Je saisis l'occasion de la publication du travail que l'on vient de lire pour faire connaître deux lépidoptères que j'ai pris en Italie :

N°. 16. EUPISTHERIA PULVERULENTARIA, *de Selys.*

Port et taille de la *strenia clathraria* (11 lignes ½ d'envergure) ailes d'un blanc-jaune, lavées de jaune à la côte et au bord anal, toutes pointillées et finement tachées de brun — le brun saupoudré

de très petits points jaunâtres — frange brune entrecoupée de blanc à-peu-près comme chez la *strenia clathraria.*

Les points bruns par leur accumulation forment comme trois bandes onduleuses mal définies aux supérieures et deux aux inférieures — le bord postérieur est aussi brunâtre aux supérieures.

Le dessous est semblable au dessus — le corps et les pattes sont comme chez la *Strenia clathraria*, les antennes sont dentelées ou finement pectinées des deux côtés — c'est ce qui m'a engagé à en faire une *Eupistheria* près de la *concordaria* de la *zebraria* et de l'*hepararia*, tandis que les *Strenia* ont pour caractère d'avoir les antennes sétiformes et les ailes dessinées en réseau. — Elle a aussi des rapports avec les Acidalies du groupe de la *glarearia.* En réalité on ne devrait pas isoler génériquement ces groupes. Vue à une certaine distance on prendrait la *pulverulentaria* pour une *Strenia clathraria* et dans l'ordre naturel elle devrait en être rapprochée.

Décrite d'après un individu que j'ai pris vers la mi-mai au pied de l'acqueduc de Caserte, près de Naples. M. Boisduval pense qu'elle constitue une espèce nouvelle.

N°. 16. LYCÆNA ARION *(L.) var? aldrovandus, de Selys.*

Cette lycénie est avec l'iolas la plus grande d'Europe, car elle a plus de 22 lignes d'envergure et les plus grands exemplaires de l'iolas atteignent à peine 22 lignes. En dessus elle diffère de l'*arion* en ce que ses ailes sont presqu'aussi rembrunies que chez la femelle de l'*erebus* la dernière moitié au delà de la série de taches noires n'étant pas saupoudrée de bleu. C'est une femelle ; la frange est blanche et non entrecoupée en dessus, le corps semble proportionnellement plus court et les ailes plus arrondies.

Je l'ai prise au pied du Vésuve du côté de Resina au commencement de mai en 1838.

Ce n'est probablement qu'une belle variété locale.

NOTA.

Les *additions* et *corrections* seront données à la fin de ce volume.

II. *Théorie générale de la Polaire des courbes du second degré ;*

Par M. LÉON LECOINTE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES A L'ATHÉNÉE ROYAL D'ARLON.

> Préférez dans l'enseignement les méthodes générales : attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple ; vous verrez en même temps qu'elles sont toujours les plus faciles.
> *Laplace, écoles normales*, Tom. IV, *p.* 49.

Entre tous les auteurs d'analyse appliquée à la géométrie des deux dimensions, *Bourdon* est le seul, du moins à ce que nous sachions, qui se soit un peu étendu sur le lieu géométrique nommé *polaire*, les autres n'en ont point parlé, ou ne s'en sont occupés que, pour ainsi dire, en passant.

Le problème général, dont nous ne nous proposons d'exposer que la discussion pour le cas tout particulier des courbes du second degré, est celui-ci : *Un point et une courbe quelconque étant donnés sur un plan, si, de ce point, on mène une sécante qui rencontre cette courbe en plusieurs points et que par ces points on mène des tangentes, on demande le lieu des points de rencontre de ces tangentes considérées deux à deux pour chaque sécante en particulier.*

Nous croyons devoir indiquer ici la division de cet opuscule.

Les articles 1 et 2 ne sont que des préliminaires ayant pour but de rechercher : l'équation générale de la tangente aux lignes du second degré ; celle d'un diamètre, pour en déduire la direction de son conjugué ; enfin les équations du centre.

Les articles 3, 4 et 5 recherchent l'équation de la polaire et du pôle ; quelques propriétés de celle-là et de celui-ci ; le parallélisme de la polaire du diamètre conjugué au diamètre passant par le pôle et des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre, ainsi que la dépendance qui existe entre la position de la polaire et celle du pôle.

L'article 6 est consacré aux applications des principes généraux de cette théorie à chacune des trois courbes du second degré ; enfin nous donnons, dans le dernier article, diverses constructions graphiques pour tracer la polaire, le pôle étant donné ou réciproquement.

Cet opuscule est terminé par un appendice où nous exposons une nouvelle construction de l'hyperbole.

N. B. Nous appelons *direction* d'une droite, la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle forme avec l'axe des abscisses, lorsque les axes sont rectangulaires ou bien, le rapport des sinus des angles que forme cette droite avec les axes coordonnées lorsque ceux-ci sont obliques.

ARTICLE 1er.

DE LA TANGENTE.

1. En adoptant la définition de tous les géomètres, nous considérerons la tangente comme *une sécante qui passe par deux points de la courbe, et qui ensuite tourne autour d'un de ces points jusqu'à ce que l'autre point vienne se confondre avec lui.* Ce point prend alors le nom de *point de contact.*

Soient $(x'y')$, $(x''y'')$ les deux points d'intersection de cette sécante, variable de position, avec la courbe du second dégré que nous représenterons par

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\Phi).$$

N. B. Nous avons pris cette équation de préférence à celle ordinairement employée, parce qu'il nous semble que certaines fonctions de ses variables sont exprimées plus simplement.

Les points $(x'y')$, $(x''y'')$ étant sur la courbe (Φ) donnent les relations suivantes

$$Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F=0. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$Ay''^2+2Bx''y''+Cx''^2+2Dy''+2Ex''+F=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

et on aura

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

pour l'équation de la sécante.

La direction $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ s'obtiendra en retranchant la relation (2) de celle (1), ce qui donne successivement

$$A(y'^2-y''^2)+2B(x'y'-x''y'')+C(x'^2-x''^2)+2D(y'-y'')+2E(x'-x'')=0,$$

$$A(y'-y'')(y'+y'')+2Bx'(y'-y'')+2By''(x'-x'')+C(x'-x'')(x'+x'')+2D(y'-y'')+2E(x'-x'')=0,$$

$$(y'-y'')[A(y'+y'')+2Bx'+2D]+(x'-x'')[2By''+C(x'+x'')+2E]=0;$$

d'où

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{2By''+C(x'+x'')+2E}{A(y'+y'')+2Bx'+2D};$$

et substituant cette quantité dans (3) on obtient pour l'équation de cette sécante

$$y-y'=-\frac{2By''+C(x'+x'')+2E}{A(y'+y'')+2Bx'+2D}(x-x') \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Or, d'après la définition de la tangente, cette relation deviendra celle de la tangente au point $(x'y')$ en posant $x''=x'$, d'où $y''=y'$; ce qui fournit pour cette dernière

$$y-y'=-\frac{By'+Cx'+E}{Ay'+Bx'+D}(x-x');$$

laquelle, développée et réduite au moyen de la relation (1), qui indique que le point $(x'y')$ est sur la courbe (φ), donne pour l'équation de la tangente en un point quelconque d'une courbe du second degré

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+F=0 \quad \ldots \quad (7).$$

N. B. En se conformant aux principes de l'analyse infinitésimale, nous obtiendrons l'équation de la tangente de la manière suivante :

Si $(x'y')$ représentent les coordonnées du point de tangence, l'équation de la tangente sera de la forme

$$y-y'=a(x-x');$$

or, d'après les principes de l'analyse précitée, a, direction de la droite, est égale au coefficient différentiel du 1er ordre de l'équation de la courbe proposée, dans lequel on remplace les coordonnées générales par celles du point de contact. Donc, différentions l'équation (φ); nous aurons

$$\frac{dy}{dx}=a=-\frac{By'+Cx'+E}{Ay'+Bx'+D};$$

laquelle valeur substituée dans l'équation $y-y'=a(x-x')$, fournit après développement et réduction résultant de ce que le point $(x'y')$ est sur la courbe (Φ)

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+F=0,$$

équation qui n'est autre que celle (τ) trouvée précédemment.

ARTICLE 2me.

ÉQUATION D'UN DIAMÈTRE. — DIRECTION DE SON CONJUGUÉ. — ÉQUATION DU CENTRE DE LA COURBE.

2. Soit encore l'équation générale des courbes du second degré

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \ldots\ldots (\Phi),$$
$$\text{et} \quad y=mx+n \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

celle d'un système de cordes parallèles de direction m. On demande l'équation *du lieu géométrique milieu de ces cordes*, c'est-à-dire l'équation de leur *diamètre*.

A cet effet, remarquons que les abscisses des extrémités de ces cordes s'obtiendront en éliminant y entre les équations (Φ) et (1), en faisant toutefois passer la constante n, variable d'une corde à l'autre, par tous les états de grandeur par lesquels elle peut passer sans cesser d'être une corde de la courbe (Φ). Cette élimination donne

$$x^2+2\frac{Amn+Bn+Dm+E}{Am^2+2Bm+C}x+\frac{An^2+2Dn+F}{Am^2+2Bm+C}=0 \ldots (2),$$

si nous appelons x', x'' les racines de cette équation et les x_1, y_1 coordonnées du milieu de ces cordes, nous aurons, en vertu d'un principe des équations du second degré et de ce que les coordonnées du milieu d'une droite sont respectivement égales à la demi-somme des coordonnées des extrémités,

$$x_1=\frac{x'+x''}{2}=-\frac{Amn+Bn+Dm+E}{Am^2+2Bm++C},$$
$$y_1=mx_1+n.$$

Or, le système de ces deux équations représentera évidemment le lieu cherché; mais en éliminant la quantité n variable d'une

corde à l'autre, nous obtiendrons l'équation unique d'un diamètre qui est alors

$$y(Am+B)+x(Bm+C)+Dm+E=0 \ldots\ldots$$

$$\text{ou } y=-\frac{Bm+C}{Am+B}x-\frac{Dm+E}{Am+B} \ldots\ldots\ldots (D)$$

Donc, le lieu géométrique du milieu d'un système de cordes parallèles entre elles est *une ligne droite*, pour les courbes du second dégré.

3. Deux diamètres étant conjugués lorsque les cordes de l'un sont parallèles à l'autre et que les cordes de celui-ci sont parallèles au premier, il s'ensuit, qu'en ayant égard aux équations (1) et (D), si m représente la direction d'un diamètre, celle m' de son conjugué sera

$$m'=-\frac{Bm+C}{Am+B}.$$

4. Les équations du centre nous seront fournies par l'équation (D) en remarquant que ce point devant se trouver sur tous les diamètres, ses coordonnées devront la vérifier quelle que soit la direction m des cordes conjuguées; donc, ordonnant la relation (D) par rapport à m et égalant à zéro les coefficiens des diverses puissances de m, nous aurons successivement

$$m(Ay+Bx+D)+m^0(By+Cx+E)=0;$$

$$Ay+Bx+D=0 \quad \text{et} \quad By+Cx+E=0 \quad (3)$$

pour les équations du centre. Si nous appelons x_2, y_2 les coordonnées de ce point nous obtiendrons

$$x_2=-\frac{BD-AE}{B^2-AC} \quad \text{et} \quad y_2=-\frac{BE-DC}{B^2-AC}.$$

N. B. Il est aisé de s'assurer que les équations (3) du centre ne sont autre chose que les *dérivées* de la fonction (Φ), relatives à y et à x; et il en est de même pour toutes les autres courbes de quelque degré qu'elles soient.

ARTICLE 3me.

DE LA POLAIRE.

5. *Une courbe du second degré et un point étant donnés sur un plan, si, de ce point, on tire une sécante quelconque qui rencontre la courbe en deux points, et que par ces points on mène des tangentes à la courbe, on demande le lieu de tous les points tels que celui où ces tangentes se rencontrent.*

N. B. Ce lieu géométrique se nomme *polaire*, et le point où se croisent toutes les sécantes s'appelle *pôle*.

Considérons l'équation des lignes du second degré

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \quad \ldots\ldots \quad (\Phi)$$

représentons par (X,Y) les coordonnées du pôle ; une sécante quelconque passant par ce point aura pour équation

$$y-Y=a(x-X);$$

et si $(x',y'),(x'',y'')$ sont les points d'intersection de cette droite avec la courbe (Φ), nous aurons, en faisant disparaître la constante a de cette sécante,

$$y-Y=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-X') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Les points (x',y'), (x'',y'') étant sur la courbe (Φ) nous donnent les deux relations suivantes :

$$Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F=0, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$Ay''^2+2Bx''y''+Cx''^2+2Dy''+2Ex''+F=0; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

et les équations (τ) des tangentes aux mêmes points seront

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+F=0. \ldots\ldots \quad (4)$$
$$Ayy''+B(xy''+yx'')+Cxx''+D(y+y'')+E(x+x'')+F=0 \ldots\ldots \quad (5).$$

Or, de ce que les équations (4) et (5) considérées simultanément donneront les coordonnées d'un point du lieu cherché, il s'ensuivra que la $F(x,y)=0$ résultant de l'élimination des variables x',y',x'' et y'' entre les équations (1), (2), (3), (4) et (5) sera la relation de la polaire. Pour effectuer cette élimination, il nous suffira, à cause d'une circonstance toute particulière (3me remarque), de retrancher

(5) de (4) et de substituer la valeur de $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ que nous en tirerons dans l'équation (1); ce qui nous donne successivement

$$Ay(y'-y'')+B[x(y'-y'')+y(x'-x'')]+Cx(x'-x'')+D(y'-y'')+E(x'-x'')=0;$$

d'où
$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{By+Cx+E}{Ay+Bx+D},$$

valeur qui donne pour l'équation du lieu en la substituant dans (1)

$$y-Y=-\frac{By+Cx+E}{Ay+Bx+D}(x-X),$$

fonction qui, développée et réduite au moyen de celle (♧), donne

$$AYy+B(Yx+Xy)+CXx+D(Y+y)+E(X+x)+F=0 \ldots\ldots (\pi).$$

Cette équation (π) nous démontre qu'étant du premier degré, elle représente *une ligne droite*, et que parconséquent *la polaire est telle pour toutes les courbes du second degré.*

1re *Remarque.* L'équation (π) mise sous la forme $y=px+q$, donnant
$$y=-\frac{BY+CX+E}{AY+BX+D}x-\frac{DY+EX+F}{AY+BX+D},$$

nous indique que la direction de la polaire est

$$p=-\frac{BY+CX+E}{AY+BX+D},$$

et nous constaterons (N°. 8) que cette direction n'est autre que *celle du diamètre conjugué au diamètre passant par le pôle.*

2me *Remarque.* Cette relation (π) de la polaire ne différant de celle (τ) de la tangente qu'en ce que les coordonnées (X,Y) du pôle remplacent celles (x',y') du point de contact, nous pouvons déjà en conclure que *lorsque le pôle sera situé sur la courbe, la polaire lui sera tangente en ce point.* Nous démontrerons plus loin ce théorème par une autre analyse.

3me *Remarque.* La simplicité de l'élimination précédente tient à cette circonstance toute particulière que les équations (2) et (3) sont implicitement comprises dans celles (4) et (5); et c'est aussi le motif du non emploi des deux premières.

6 A l'effet de démontrer la réciproque de la proposition précédente, proposons-nous de *mener des couples de tangentes à une*

courbe du second degré, par les différents points d'une droite située dans le plan de cette courbe.

Pour cela, supposons la courbe rapportée à un système d'axes obliques dont l'un (l'axe des y) soit parallèle à la droite donnée et l'autre soit le diamètre conjugué de celui qui serait parallèle à cette même droite; la $F(x,y)$ des courbes du second degré prend la forme

$$Ay^2+Cx^2+2Ex+F=0 \ldots\ldots (\Phi').$$

Cette forme s'obtient immédiatement en observant que la disposition des coordonnées exige que chaque valeur de l'abscisse donne pour l'ordonnée, deux valeurs égales et de signes contraires.

Et soit

$$x=b,$$

l'équation de la droite; représentons par (x',y') un des points de cette droite, duquel nous mènerons deux tangentes à la courbe (Φ') et par (x'',y'') le point de contact d'une des tangentes; cette tangente aura pour équation

$$Ayy''+Cxx''+E(x+x'')+F=0 \ldots\ldots (1)$$

et les coordonnées $(x''y'')$ seront déterminées par les deux relations suivantes, données par les considérations que le point $(x'y')$ est situé sur la tangente et l'autre $(x''y'')$ sur la courbe (Φ') :

$$Ay'y''+Cx'x''+E(x'+x'')+F=0 \ldots\ldots (2)$$
$$Ay''^2+Cx''^2+2Ex''+F=0 \ldots\ldots\ldots (3).$$

A l'élimination laborieuse qu'il faudrait effectuer pour obtenir les coordonnées (x'',y''), nous préférerons la construction directe des lieux géométriques que ces relations représentent, lesquels par leur intersection détermineront le point ou les points demandés.

Remarquons que l'équation (3) n'est autre chose que la courbe (Φ') elle-même; quant à celle (2), elle représente une droite que nous allons construire au moyen de ses coordonnées à l'origine. Pour cela posons successivement

$$\left.\begin{matrix} y''=0 \\ x''=0 \end{matrix}\right\} \text{ il en résulte } \left\{\begin{matrix} x''=-\dfrac{F+Ex'}{E+Cx'} \\ y''=-\dfrac{F+Ex'}{Ay'} \end{matrix}\right\};$$

or, ces deux valeurs construites détermineront évidemment une

droite dont les intersections avec la courbe (Φ') donneront les points de contact des deux tangentes menées du point (x',y') à la courbe (Φ').

Observons que l'abscisse à l'origine $x''=-\frac{F+Ex'}{E+Cx'}$, étant indépendante de y', détermine un point

$$y''=0 \qquad \text{et} \qquad x''=-\frac{F+Ex'}{E+Cx'},$$

par lequel passeront toutes les droites joignant les points de contact des tangentes menées par tous les points de la droite proposée, puisque celle-ci a pour équation

$$x=b;$$

delà nous conclurons :

1° *Si des différents points d'une ligne droite, tracée sur le plan d'une ligne du second degré, on mène des tangentes à cette courbe et qu'on joigne successivement les points de contact relatifs à chaque couple de tangentes, toutes les lignes de jonction jouissent de la propriété de concourir en un même point.* C. Q F. D.

2° *Ce point nommé pôle se trouve placé sur le diamètre conjugué du diamètre parallèle à la polaire.*

La position de ce point résulte évidemment de la valeur de ses coordonnées.

Nous démontrerons (N° 8) que, réciproquement *la polaire est parallèle au diamètre conjugué du diamètre passant par le pôle.*

3° *La ligne qui joint les points de contact de deux tangentes menées par un point quelconque de la polaire, est divisée en deux parties égales par le diamètre qui passe par ce point, et est parallèle au conjugué de ce diamètre.*

En effet, si l'on choisit pour point de départ des tangentes à la courbe celui où la droite rencontre l'axe des abscisses, lequel est

$$y'=0, \qquad x'=b;$$

la relation $y'=0$ substituée dans (2) donne

$$x''=-\frac{F+Ex'}{E+Cx'}$$

quantité qui mise dans (3) donnera pour y'' deux valeurs égales et de signes contraires. C. Q F. D.

7. Si nous eussions pris pour pôles, les *foyers* des courbes du second degré; nous eussions obtenu pour polaires les *directrices* de ces courbes, et réciproquement en prenant pour *polaires* ces

directrices nous obtiendrons pour *pôles*, ces mêmes foyers. C'est ce que nous ferons voir pour chaque courbe en particulier à l'article des applications.

ARTICLE 4me.

PARALLÉLISME DE LA POLAIRE, DU DIAMÈTRE CONJUGUÉ AU DIAMÈTRE PASSANT PAR LE PÔLE ET DES TANGENTES AUX EXTRÉMITÉS DE CE DERNIER DIAMÈTRE.

8. Rappelons-nous que nous avons trouvé (N° 4) pour les coordonnées du centre

$$x_2=-\frac{BD-AE}{B^2-AC} \quad \text{et} \quad y_2=-\frac{BE-DC}{B^2-AC};$$

donc le diamètre passant par le pôle (X,Y) aura pour sa direction m, $(X-x_2)m=Y-y_2$; d'où en substituant et réduisant, il vient

$$m=\frac{Y(B^2-AC)+BE-DC}{X(B^2-AC)+BD-AE}.$$

Son conjugué aura donc pour directrion m' (N° 3), $(Am+B)m'=-Bm-C$; d'où en substituant la valeur précédente de m, puis développant et réduisant, par la suppression du facteur commun B^2-AC, il vient

$$m'=-\frac{BY+CX+E}{AY+BX+D}.$$

Or, cette expression est celle trouvée (N° 5. 1re remarque) pour la direction de la polaire. Donc *la polaire est parallèle au diamètre conjugué du diamètre passant par le pôle.*

9. *La polaire est parallèle aux tangentes menées aux extrémités du diamètre passant par le pôle.*

En effet, ce théorème résulte de cet autre bien connu : *les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles à son conjugué* et par conséquent *entre elles.*

Remarquons de plus, que ces tangentes étant parallèles, leur point d'intersection, qui doit être un point de la polaire, ne peut être situé qu'à l'infini ; ce qui prouve de nouveau que *ces tangentes doivent être parallèles à la polaire.*

10. Il résulte de cet article que p, m' et m'' étant les directions

d'une polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire et des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre, ces trois quantités sont liées entre elles par les égalités

$$p = m' = m''. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

ARTICLE 5me.

POSITIONS QU'AFFECTE LA POLAIRE SUIVANT CELLES DU PÔLE.

11. Nous nous proposons de faire voir dans cet article qu'on ne peut dire : *la polaire est une ligne droite*, et qu'il faut s'exprimer ainsi : *les points de la polaire se trouvent en ligne droite.*

En effet, considérons l'équation des lignes du second dégré, ainsi que celle de leur polaire

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \ldots\ldots (\zeta).$$
$$AYy+B(Yx+Xy)+CXx+D(Y+y)+E(X+x)+F=0 \ldots (\tau)$$

Ces deux équations prises simultanément donneront les coordonnées des points communs à ces deux lieux géométriques et de la valeur de ces coordonnées, indiquant la *réalité* ou l'*imaginarité* de ces points, nous pourrons en conclure la position d'une de ces lignes par rapport à l'autre. Cette élimination étant effectuée donnerait pour l'abscisse x_1 de ces points une valeur telle que le radical renfermerait sous son signe l'expression suivante

$$AY^2+2BXY+CX^2+2DY+2EX+F \ldots\ldots (\mu)$$

Or, cette expression (μ) étant *nulle*, *positive* ou *négative* suivant que le pôle est situé *sur* la courbe, à l'*extérieur* ou à l'*intérieur*, elle nous donne pour les valeurs de l'abscisse x_1 des quantités *réelles*, *égales* ou *inégales*, ou bien *imaginaires*; donc pour ces différentes positions du pôle, la polaire sera *tangente*, *sécante* ou bien *extérieure* à la courbe.

Puisque de l'analyse précédente il résulte que, lorsque le pôle est situé à l'*extérieur* de la courbe, la polaire *est sécante* à la courbe; donc, il est faux de conclure, de ce que les points de la polaire sont donnés par une équation du premier degré, que *ce lieu est une ligne droite* et qu'il est plus rigoureux, puisqu'il peut y avoir *discontinuité*, de s'exprimer ainsi : *tous les points de la polaire sont en ligne droite.*

Remarque. Si pour obtenir la valeur de x_3 nous n'avons pas effectué l'élimination de y entre (Φ) et (π), c'est que cette élimination est trop laborieuse et qu'elle est inutile du moment que l'on connaît la quantité comprise sous le radical, quantité qui détermine seule la *réalité* ou l'*imaginarité* des points de section de ces deux lieux et qui nous a été fournie par l'*Analogie* en considérant les résultats analogues qui nous ont été donnés pour les trois courbes du second degré (Article 6).

12. On peut, du reste, parvenir aux mêmes résultats que précédemment par d'autres considérations.

A cet effet, reprenons la disposition des axes coordonnées du N° 6, alors la courbe, la polaire et le pôle auront pour équations

$$Ay^2+Cx^2+2Ex+F=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\Phi')$$

$$x=b, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\pi'')$$

$$Y=0, \qquad X=-\frac{F+Eb}{E+Cb} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\rho).$$

Pour obtenir les points où la courbe rencontre les axes nous poserons $y=0$ dans (Φ') ; ce qui donne

$$Cx^2+2Ex+F=0 \qquad \text{ou} \qquad Cx=-E\pm\sqrt{E^2-CF}.$$

Nous disons actuellement que si le pôle est *intérieur, sur* ou *extérieur* à la courbe, la polaire sera *extérieure, tangente* ou *sécante* à la courbe ; ce qui revient évidemment à prouver que pour les relations :

$$-\frac{F+Eb}{E+Cb} \lessgtr -\frac{E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF}, \quad (1)$$

on aura $\qquad b \gtrless -\frac{E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF} \quad (2).$

En effet, les relations (1) donnent, en changeant les signes et après transposition du terme $-\frac{E}{C}$,

$$\frac{F+Eb}{E+Cb}-\frac{E}{C} \gtrless \mp\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF}.$$

Réduisant le premier membre au même dénominateur, faisant la réduction des termes semblables et multipliant les deux membres par C ;

$$\frac{FC-E^2}{E+Cb} \gtrless \mp\sqrt{E^2-CF}.$$

renversant les deux fractions

$$\frac{E+Cb}{FC-E^2} >,= \text{ ou } < \mp \frac{1}{\sqrt{E^2-CF}}.$$

Multipliant les deux membres par $FC-E^2$, puis observant que $\mp(FC-E^2) = \pm(E^2-FC)$ et réduisant, il vient $E+Cb >,= \text{ ou } < \sqrt{\pm(E^2-CF)}$; d'où

$$b >,= \text{ ou } < -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

13. La réciproque de cette proposition se démontrerait de la même manière, car si nous partions des relations

$$b >,= \text{ ou } < -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF},$$

nous arriverions par les transformations précédentes, mais exécutées dans un ordre inverse, à

$$-\frac{F+Eb}{E+Cb} <,= \text{ ou } > -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF},$$

relations qui nous prouvent que lorsque la polaire est *extérieure*, *sur* ou *intérieure* à la courbe, le pôle est situé à l'*intérieur*, *sur* ou à l'*extérieur* de la courbe.

Remarque. Ces démonstrations (N^os^. 12 et 13) compléteront, nous semble-t-il, ce que pourrait avoir de non rigoureux la théorie du N° 11. Cependant nous nous hâterons d'ajouter que la méthode du N° 11 sera tout aussi rigoureuse pour quiconque aura bien saisi la précieuse méthode ANALOGIQUE.

ARTICLE 6^me^.

APPLICATION DES PRINCIPES GÉNÉRAUX PRÉCÉDENS AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Cercle.

14. L'équation de cette ellipse particulière rapportée à son centre et à des axes rectangulaires, s'obtient en posant dans l'équation générale (♡) $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=0$, $E=0$ et $F=-R^2$; d'où

$$y^2+x^2=R^2 \ldots\ldots (♡')$$

et pour les équations de la polaire et de la tangente

$$Yy+Xx=R^2. \ldots . \ (\pi'')$$
$$y'y+x'x=R^2. \ldots . \ (\tau'')$$

Les directions de la polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire (en appelant ainsi celui qui passe par le pôle) et celles des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre, seront donnés (n^{os} 5, 8 et 9) par

$$Yp=-X, Ym'=-X \text{ et } Ym''=-X;$$

d'où l'on conclut

$$p=m'=m''.$$

En considérant simultanément les lieux (Φ'' et π'') nous obtiendrons pour l'abscisse des points d'intersection

$$(X^2+Y^2)x_3=R^2X\pm RY\sqrt{X^2+Y^2R-R^2};$$

valeurs *imaginaires*, *réelles égales* ou *inégales* suivant les relations

$$X^2+Y^2-R^2<,=\text{ ou }>0;$$

et ces inégalités indiquent que le pôle est à l'*intérieur*, *sur* ou à l'*extérieur* de la courbe, ce qui déterminent bien nettement la position de la polaire.

15. Lorsque le pôle est sur la courbe la relation $X^2+Y^2-R^2=0$ nous donne

$$x_3=X, \ y_3=Y;$$

ce qui nous indique que le pôle est le point de tangence de la polaire et par conséquent un des points de ce lieu.

Ellipse.

16. Nous obtiendrons la fonction de cette courbe rapportée à son centre et à ses axes en posant dans l'équation (Φ)

$$A=A^2, B=0, C=B^2, D=0, E=0 \text{ et } F=-A^2B^2, \text{ d'où}$$
$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2. \ldots . \ (\Phi'').$$

les équations de la polaire et de la tangente seront

$$A^2Yy+B^2Xx=A^2B^2. \ldots . \ (\pi'')$$
$$A^2y'y+B^2x'x=A^2B^2. \ldots . \ (\tau'')$$

nous obtiendrons donc aussi, successivement,

$$A^2Yp=-B^2X, A^2Ym'=-B^2X \text{ et } A^2Ym''=-B^2X,$$

pour les directions de la polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire et des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre;

d'où $$p=m'=m''.$$

En éliminant y entre les équations (Φ'') et (π''), nous aurons pour les abscisses des points d'intersection

$$(A^2Y^2+B^2X^2)x_3=A^2B^2X\pm A^2Y\sqrt{A^2Y^2+B^2X^2-A^2B^2},$$

points qui seront *imaginaires*, *réels simples* ou *doubles* suivant les relations

$$A^2Y^2+B^2X^2-A^2B^2 <,= \text{ ou } >0;$$

lesquelles placent le pôle *intérieurement*, *sur* ou *extérieurement* à la courbe; donc pour ces différents cas, la polaire sera *extérieure*, *tangente* ou *sécante* au lieu (Φ'').

17. La relation $A^2Y^2+B^2X^2-A^2B^2=0$, qui existe lorsque le pôle est sur la courbe, donne

$$x_3=X, \qquad y_3=Y;$$

valeurs qui nous indiquent et la position du pôle est le point de contact de la polaire.

18. Proposons-nous de rechercher le rapport $d:d'$ des distances d'un point de l'ellipse à un de ses foyers et à la polaire dont le pôle serait ce même foyer.

Nous aurons donc pour les équations du pôle et de la polaire

$$Y=0, \quad X=\pm\sqrt{A^2-B^2}=\pm c,$$

(en appelant $2c$ l'excentricité), et

$$x=\frac{A^2}{\pm c}.$$

Or,

$$d=A\mp\frac{cx}{A} \quad \text{et} \quad d'=\frac{A^2}{\pm c}-x;$$

d'où $$A\mp\frac{cx}{A}:\frac{A^2}{\pm c}-x::c:A;$$

donc, de ce que ces distances *sont entre elles comme l'excentricité*

est au grand axe ; nous pouvons en conclure, puisque cette propriété *est celle des directrices*, que cette polaire est une *de ces lignes* (N° 7).

Hyperbole.

19. En faisant sur les coefficiens de l'équation (φ) des hypothèses faciles à prévoir, on obtiendra successivement pour les équations de cette courbe, de sa polaire, de sa tangente, ainsi que pour les directions de sa polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire et pour celles des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre

$$\begin{aligned}
&A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2. \quad \ldots \quad (\varphi'')\\
&A^2Yy-B^2Xx=-A^2B^2. \quad \ldots \quad (\pi'')\\
&A^2y'y-B^2x'x=-A^2B^2, \quad \ldots \quad (\tau'')\\
&A^2Yp=B^2X=A^2Ym'=A^2Ym'' ;
\end{aligned}$$

d'où, de ces trois dernières relations

$$p=m'=m''.$$

Les équations (φ'') et (π'') prises simultanément fournissent, pour les points communs de ces deux lieux géométriques,

$$(A^2Y^2-B^2X^2)x_2=-A^2B^2X\pm A^2Y\sqrt{A^2Y^2-B^2X^2+A^2B^2} ;$$

valeurs qui indiquent que la polaire sera *extérieure*, *tangente* ou *sécante* suivant que

$$A^2Y^2-B^2X^2+A^2B^2 \lessgtr 0 \text{ ou } >0 ;$$

et ces relations correspondent aux différentes situations du pôle par rapport à la courbe.

20. En substituant dans la valeur de x_2 la relation $A^2Y^2-B^2X^2+A^2B^2=0$, qui indique que le pôle est situé sur l'hyperbole, on obtient de même que pour les courbes précédentes

$$x_2=X, \qquad y_2=Y,$$

pour le point de tangence de ces deux lignes.

21. Comme pour l'ellipse, proposons-nous *de rechercher le rapport d:d' des distances d'un point de l'hyperbole à un de ses foyers et à la polaire dont le pôle serait ce même foyer.* Nous obtiendrons pour les équations du pôle et de la polaire

$$Y=0, \quad X=\pm\sqrt{A^2+B^2}=\pm c,$$

(2c étant l'excentricité), et

$$x=-\frac{A^2}{\pm c}.$$

Or,

$$d=\frac{cx}{A}\mp A \quad \text{et} \quad d'=x-\frac{A^2}{\pm c};$$

d'où

$$\frac{cx}{A}\mp A : x-\frac{A^2}{\pm c} :: c : A.$$

Donc, de ce que ces distances *sont entre elles comme l'excentricité est au grand axe*, nous en conclurons, puisque cette propriété *est celle des directrices*, que cette polaire *est une de ces droites.*

Parabole.

22. Posons dans les résultats généraux obtenus précédemment A=1, B=0, C=0, D=0, E=−2p' et F=0; nous obtiendrons pour cette ligne, les résultats qui suivent; lesquels donnent les mêmes conséquences que celles précédemment obtenues pour les autres courbes du second degré :

$$y^2=2p'x \ldots\ldots (\Phi'')$$
$$Yy=p'(X+x) \ldots\ldots (\pi'')$$
$$y'y=p'(x'+x) \ldots\ldots (\tau'')$$

$$Yp=p'=Ym'=Ym'';$$

d'où

$$p=m'=m''$$

De même, les équations simultanées (Φ'') et (π'') donneront

$$p'x_3=Y^2-p'X\pm Y\sqrt{Y^2-2p'X};$$

et pour le cas $Y^2-2p'X=0$,

$$x_3=X \quad \text{et} \quad y_3=Y.$$

23. Si nous prenons pour pôle, le foyer de cette courbe, ce point et sa polaire auront pour équations

$$Y=0, \quad X=\frac{p'}{2}$$

$$x=-\frac{p'}{2}. \quad (\pi'')$$

Les distances d et d' de ce point et de cette droite à un point de la parabole donneront

$$d=d'=x+\frac{p'}{2},$$

or, cette propriété *est celle qui caractérise la directrice ;* donc, *cette droite* n'est autre chose *que la polaire qui a pour pôle, le foyer de la courbe.*

Prouvons encore cette identité en faisant voir *que deux tangentes à la courbe, menées par un point quelconque de cette polaire, font entre elles un angle droit* (autre propriété de la directrice remarquée par Biot).

En effet, les équations de ces droites seront, si $(x'y')$, $(x''y'')$ sont les points de contact,

$$yy'=p'(x+x'), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$yy''=p'(x+x''); \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et les directions

$$y'\delta=p',$$
$$y''\delta'=p'.$$

De plus, les points de contact nous donnent

$$y'^2=2p'x' \qquad (3)$$
$$y''^2=2p'x''. \qquad (4)$$

Or, les équations (1) et (2) donnant, par l'élimination de y, l'abscisse du point de rencontre de ces deux tangentes, lequel point doit se trouver sur la polaire (π'''), on a

$$x=\frac{y'x''-x'y''}{y''-y'}=-\frac{p'}{2};$$

et cette relation nous donne, par la substitution des valeurs de x' et x'', tirées de (3) et (4),

$$y'y''=-p'^2;$$

produit qui démontre le problème énoncé, puisqu'étant substitué dans celui $\delta\delta'$ des directions, il nous donne

$$\delta\delta'=-1.$$

ARTICLE 7e.

CONSTRUCTION DE LA POLAIRE ET DU PÔLE.

24. Pour compléter la théorie du lieu dont nous nous sommes occupé, nous allons indiquer les constructions propres à trouver *graphiquement* la polaire, le pôle étant fixé de position ou réciproquement.

Puisque la polaire est une droite, il est évident que deux de ses points ou bien un point et sa direction la détermineront.

Pour construire deux points de cette ligne, il suffit de mener par le pôle deux sécantes; les couples de tangentes aux points de sections donneront les points demandés.

Un point de la polaire étant construit par la méthode précédente, on aura ce lieu, en menant par ce point une droite parallèle aux cordes conjuguées du diamètre polaire (N° 8).

Lorsque le pôle sera extérieur, il suffira de mener de ce point deux tangentes, à la courbe et la droite passant par les points de contact sera la polaire.

En effet, chaque point de contact est un point de la polaire, en ce qu'il peut être regardé comme l'intersection de deux tangentes dont les points de tangence, tout en étant en ligne droite avec le pôle se sont confondus avec leur point de rencontre.

Enfin, si le pôle est situé sur la courbe, la tangente en ce point sera évidemment la droite cherchée.

25. La construction du pôle se réduit à obtenir deux droites qui le renferment, ainsi on peut mener par deux points de la polaire, deux couples de tangentes; et l'intersection des cordes de contact déterminera ce point.

Le pôle sera également déterminé par la rencontre d'une corde de contact avec le diamètre conjugué des cordes parallèles à la polaire (N° 8).

Lorsque la polaire sera sécante, il est évident que l'intersection des tangentes, aux points où ce lieu coupe la courbe, sera le point demandé.

Enfin, si la polaire est tangente à la courbe, le point de contact sera lui-même le pôle.

APPENDICE.

CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE.

La construction que nous proposons pour l'hyperbole nous a été suggérée par l'analogie qui existe entre l'équation de cette courbe et celle de l'ellipse.

L'équation de l'hyperbole

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$$

rapportée à son centre et à ses axes, étant résolue par rapport à l'ordonnée y, donne la proportion

$$A:B::\sqrt{x^2-A^2}\ :y. \quad (1)$$

Donc, l'ordonnée y peut s'obtenir par des quatrièmes proportionnelles aux quantités A, B et $\sqrt{x^2-A^2}$ et nous proposons leur obtention par la méthode suivante (fig. 1) :

Sur le grand axe (réel) $CC'=2A$ et sur le petit axe (imaginaire) $DD'=2B$, comme diamètres, décrivons deux circonférences concentriques ; de plus sur l'abscisse quelconque $x=OP$, comme diamètre, décrivons une troisième circonférence ; laquelle par sa rencontre avec celle décrite sur l'axe réel déterminera

$$HP=H'P=\sqrt{OP^2-OH^2}=\sqrt{x^2-A^2}.$$

Maintenant des points K et K' de rencontre des rayons OH et OH' avec le cercle de l'axe imaginaire, menons les tangentes $K\phi$ et $K'\phi$ à ce dernier cercle ; et $K\phi=K'\phi$ sera l'ordonnée y correspondant à l'abscisse $OP=x$. En effet, les triangles semblables OHP et $OK\phi$ donnent

$$OH:OK::HP:K\phi,$$

ou

$$A:B::\sqrt{x^2-A^2}:K\phi;$$

proportion qui, étant comparée à celle (1), nous donne

$$y=K\phi. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc, si nous portons la portion de tangente $K\phi$ de P en M et M', et de P' en M'' et M''' sur les perpendiculaires MM' et $M''M'''$, nous aurons quatre points de la susdite courbe : les autres points se détermineront de la même manière.

Cette construction très simple, puisque tout se réduit à construire, pour chaque abscisse, la tangente $K\Phi$, offre l'avantage de montrer la forme de la courbe.

En effet, les ordonnées de ce lieu ne sont que les portions des tangentes, aux différents points du quadran DE, comprises entre les points de contact et le grand axe; et comme aux points D et D' les tangentes sont parallèles au grand axe, il s'ensuit que les ordonnées qu'elles doivent déterminer sont infinies; donc, de ce que la courbe est symétrique par rapport à ses axes, nous pourrons conclure qu'elle se compose de deux branches infinies, se tournant leur convexité et s'étendant dans le sens des abscisses positives et négatives.

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

Nous avons appris, depuis la composition de ce mémoire, que M. Page, s'est occupé du même sujet dans le complément de sa géométrie analytique; qu'il a même considéré l'équation la plus générale des courbes du second degré ; de plus, que MM. Brasseur et Noël ont traité le même texte, dans des ouvrages semblables.

Nous donnons ici quelques notes, devant servir de complément à notre travail.

Nous démontrerons dans la première un théorème dont l'énoncé nous a été communiqué par M. Noël; dans la seconde et la troisième quelques propositions que M. Noël donne également, pour le cas du cercle, dans ses notes et additions à sa géométrie élémentaire.

Dans la troisième note, nous faisons usage d'une propriété des transversales partant d'un même point et coupant une courbe du second degré ; propriété démontrée par Jacob, dans son traité sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie (1842), et d'autant plus belle que le lieu nommé polaire n'en est qu'une conséquence particulière, ce dont l'auteur ne fait pas mention, ce qui du reste se comprend puisqu'il ne s'est occupé de la polaire que, pour ainsi dire, en passant, sans même la désigner par son nom.

Note I.

Quelques définitions nous étant nécessaires pour établir le théorème, but de cette note, nous les rappellerons au lecteur.

1. On nomme *transversale*, toute ligne qui coupe le système de plusieurs autres lignes en le *traversant*. Telle est la définition de Carnot, auteur de la théorie des *Transversales*.

2. Lorsque quatre points en ligne droite sont situés de telle sorte, que le rapport des distances du second et du quatrième au premier est égal à celui des distances des deux mêmes points au troisième ; alors ces deux points sont dits *conjugués*, c'est-à-dire que leur existence est *simultanée* ou que l'un étant donné l'autre s'en déduit immédiatement.

Ainsi les points B et D seront conjugués, si l'on a la proportion que

A B C D voici : BA:DA::BC:DC; laquelle revient à celle-ci, d'où nous partirons :

$$BA:BC::AD:DC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

La proportion (1) nous montre également que les points B et D divisent la droite AC et son prolongement en quatre *segments* proportionnels.

Le point B étant connu, le point D se déterminera par (1), laquelle peut se mettre sous la forme

$$BA—BC:BC::AD—DC:DC$$
$$\text{ou}\quad (BA—BC)\times CD=BC\times AC.$$

Donc, *tout point* B, *marqué sur une droite* AC, *a pour conjugué un point unique* D.

La discussion de la valeur de CD fera reconnaître que suivant AB$>$ ou $<$BC, le point D sera au-delà de C ou au-delà de A, et que pour AB=BC, la distance CD devenant infinie, *le conjugué du milieu d'une droite n'existe pas.* Réciproquement, lorsque le conjugué d'un point n'existe pas, c'est que ce point est au milieu de la droite.

Remarque. La proportion (1) donne

$$CD:AD::BC:AB.$$

Donc, les points A et C sont aussi *conjugués* par rapport à la droite BD. Alors, ces quatre points sont dits *conjugués deux à deux.*

3. Trois nombres sont en *proportion harmonique*, lorsque le rapport géométrique de deux de ces nombres est égal au rapport des différences de chacun d'eux avec le troisième.

La relation (1) revient à la proportion harmonique suivante

$$AC—AB:AD—AC::AB:AD,$$

laquelle ne renferme plus que les trois quantités AB, AC, AD; pour lors, AC est dite *moyenne harmonique* entre AB et AD, et les deux points conjugués B et D prennent le nom de *points harmoniques* et de plus l'on dit qu'ils divisent *harmoniquement* la droite AC. Il en est de même des points A et C par rapport à la droite BD.

4. Les définitions précédentes étant bien comprises nous disons que *si par le pôle, on mène une transversale rectiligne coupant la courbe en deux points, ces deux points seront conjugués harmoniques par rapport au pôle et au point où la transversale coupe la polaire.*

La disposition des axes coordonnées n'ayant aucune influence sur l'existence des propriétés, nous adopterons la suivante afin de simplifier les calculs.

Nous prendrons le pôle pour origine, le diamètre polaire pour axe des abscisses et une droite parallèle aux cordes conjuguées du diamètre polaire pour ligne des ordonnées, et les équations de la courbe, du point et de la polaire seront alors

$$Ay^2+Cx^2+2Ex+F=0. \quad \ldots \quad (\Phi').$$
$$X=0,\quad Y=0. \quad \ldots \quad (S).$$
$$Ex=—F. \quad \ldots \quad (\pi''').$$

Menons par le pôle C (fig. 2), une transversale quelconque BCAD, et soit pour sa représentation analytique

$$y=mx \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

(m est sa direction, laquelle, quoique indéterminée doit être fixée de telle sorte que cette droite coupe la courbe).

Les équations (1) et (Φ') considérées simultanément nous donnant, pour les points communs à ces deux lieux, l'équation commune

$$(Am^2+C)x^2+2Ex+F=0. \ldots (2).$$

Nous en obtenons en ayant égard à (1)

$$\left.\begin{aligned} x'&=u \\ y'&=mu \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} x''&=u' \\ y''&=mu' \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

De même, les équations (1) et (π''') donnent pour le point d'intersection de la transversale avec la polaire

$$Ex'''=-F,\ Ey'''=-mF. \ldots (5)$$

Or, le théorème sera évidemment démontré si nous vérifions la proportion

$$BC^2:AC^2::BD^2:AD^2, \ldots\ldots (6)$$

qui n'est qu'une conséquence de la suivante :

$$BC:AC::BD:AD, \ldots\ldots (H)$$

laquelle exprime la propriété caractéristique des points B et A, supposés *conjugués harmoniques* des points C et D.

A cet effet, nommons β l'angle des axes et nous obtiendrons

$$\begin{aligned} BC^2&=x''^2+y''^2+2x''y'' \cos\beta, \\ AC^2&=x'^2+y'^2+2x'y' \cos\beta, \\ BD^2&=(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+2(x''-x''')(y''-y''') \cos\beta, \\ AD^2&=(x'-x''')^2+(y'-y''')^2+2(x'-x''')(y'-y''') \cos\beta ; \end{aligned}$$

expressions qui deviennent, après la substitution des valeurs (3), (4) et (5),

$$\begin{aligned} BC^2&=u'^2(1+m^2+2m\cos\beta), \\ AC^2&=u^2(1+m^2+2m\cos\beta), \\ BD^2&=\left(u'+\frac{F}{E}\right)^2(1+m^2+2m\cos\beta), \\ AD^2&=\left(u+\frac{F}{E}\right)^2(1+m^2+2m\cos\beta). \end{aligned}$$

Donc, à cause du facteur commun $1+m^2+2m\cos\beta$, la proportion 6) devient

$$u'^2 : u^2 :: \left(u'+\frac{F}{E}\right)^2 : \left(u+\frac{F}{E}\right)^2.$$

Maintenant, formons le produit des extrêmes et celui des moyens, nous trouvons

$$2\frac{Fu'}{E}uu'+\frac{F^2}{E^2}u'^2 = 2\frac{Fu}{E}uu'+\frac{F^2}{E^2}u^2$$

relation que nous pouvons mettre sous la forme

$$2\frac{F}{E}uu'(u'-u) = -\frac{F^2}{E^2}(u'^2-u^2)$$

divisant par $u'-u$

$$2\frac{F}{E}uu' = -\frac{F^2}{E^2}(u'+u). \quad (7)$$

Or, l'équation (2) nous donnent, d'après les propriétés communes aux équations du second degré,

$$uu' = \frac{F}{Am^2+C}, \quad u'+u = -\frac{2E}{Am^2+C}.$$

Ces relations substituées dans celle (7) nous conduisent à l'identité

$$\frac{2F^2}{E(Am^2+C)} = \frac{2F^2}{E(Am^2+C)}.$$

Donc, *si par le pôle d'une courbe du second degré, on mène une transversale rectiligne coupant la courbe en deux points, ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport au pôle et au point où la transversale coupe la polaire.*

Remarque I. Les courbes à centre coupant en deux parties égales les transversales passant par ce point, nous en concluerons conformément à ce que nous avons dit au N° 2 de cette note que *le pôle situé au centre, ne pourra avoir de point conjugué assignable* et que par conséquent *sa polaire ne le sera pas non plus.*

Dans notre mémoire, nous avions omis de considérer cette position du pôle, position d'autant plus remarquable que la polaire n'existe pas et que l'enveloppe des tangentes, menées aux extrémités de toutes les sécantes passant par ce point, est la courbe elle-même.

Remarque II. Nous savons que la parabole, seule courbe du second degré qui soit dépourvue du centre, a tous ses diamètres parallèles entre eux et à l'axe; donc, si par le pôle nous menons un diamètre, son point de rencontre avec la courbe sera un des points harmoniques; mais

comme l'autre point est inassignable, nous en conclurons que le point harmonique assignable est situé au milieu de la distance du pôle à la polaire, distance mesurée sur la droite passant par le point harmonique.

Note II.

I. *L'intersection des deux tangentes menées aux extrémités d'une corde, coupant une courbe du second degré, est le pôle de cette corde.*

C'est une conséquence immédiate de ce que, si nous prenons ce point d'intersection pour pôle la polaire sera (N° 24) la droite joignant les points de contact des deux tangentes menées à la courbe par ce point.

Remarque. Le pôle de cette corde sera inassignable lorsqu'elle passera par le centre de la courbe.

II. *Le pôle de toute droite menée par un point est sur la polaire de ce point ; et réciproquement.*

1°. Du point donné supposé extérieur à la courbe menons à cette dernière une couple de tangentes, la corde de contact devra renfermer le pôle de la droite ; or, cette droite n'étant autre chose que la polaire de ce point (I), donc.....

2°. Si le point donné est intérieur à la courbe, remarquons que l'intersection des tangentes menées aux points communs à la courbe et à la droite donnée étant (N° 25) le pôle de celle-ci, est un point de la polaire du point donné, donc.....

Le cas du point situé sur la courbe rentre dans le premier.

Remarque. Le point situé au centre de la courbe n'aura pas de polaire assignable.

III. *Dans une courbe du second degré, l'intersection de deux polaires quelconques, est le pôle de la droite qui joint les pôles des deux polaires.*

En effet, ce point d'intersection appartenant aux deux polaires est à la fois (II) le pôle d'une droite passant par les pôles des deux polaires, donc.....

Remarque. Lorsqu'une des polaires passe par le centre, la polaire cherchée est déterminée par le pôle assignable et les tangentes aux points d'intersection de la courbe avec la polaire centrale, (en appelant ainsi celle qui passe par le centre).

IV. Puisqu'une polaire ne peut avoir qu'un seul pôle, et un pôle qu'une seule polaire, on voit (III) que *si tant de pôles qu'on voudra sont en ligne droite, leurs polaires se couperont en un seul point, pôle de cette droite.* Réciproquement, *si plusieurs droites se coupent en un seul point, leurs pôles seront en ligne droite*, polaire de ce point (II).

NOTE III.

D'un point A *pris dans le plan d'une ligne du second degré, on mène deux sécantes quelconques* ACD, ABE ; *on joint deux à deux les points de rencontre avec la courbe, on demande le lieu des points d'intersection de ces droites entres elles* (fig. 3).

Nous prendrons le point A pour origine des coordonnées, l'une des sécantes variables AE pour axe des abscisses et l'autre AD pour celui des ordonnées.

Ceci posé, représentons notre courbe par

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \quad \ldots \quad (\Phi).$$

A, B, C, D, E, F sont évidemment des quantités variables avec la position des sécantes.

Posant $AB=x'$, $AE=x^{IV}$, $AC=y''$, et $AD=y'''$, les droites CB et DE auront pour équations

$$\frac{y}{y''}+\frac{x}{x'}=1. \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{y}{y'''}+\frac{x}{x^{IV}}=1. \quad \ldots \quad (2)$$

De plus, remarquant que y'', y''' et x', x^{IV} ne sont autre chose que les racines de l'équation (Φ) lorsqu'on y a posé préliminairement $x=0$, et $y=0$, nous obtenons

$$Ay^2+2Dy+F=0$$
$$Cx^2+2Ex+F=0.$$

desquelles relations en vertu de propriétés bien connues

$$A(y''+y''')=-2D, \quad Ay''y'''=F. \quad \ldots \quad (3)$$
$$C(x'+x^{IV})=-2E, \quad Cx'x^{IV}=F. \quad \ldots \quad (4).$$

Or, l'élimination des quantités variables x', x^{IV}, y'' et y''' entre (1), (2), (3) et (4), nous conduisant à l'équation du lieu cherché, effectuons cette élimination.

A cet effet, faisant la somme de (1) et (2) nous obtenons

$$y\frac{y''+y'''}{y''y'''}+x\frac{x'+x^{IV}}{x'x^{IV}}=2 ; \qquad (5)$$

et en ayant égard aux relations (3) et (4), nous avons pour l'équation du lieu cherché

$$Dy+Ex+F=0. \quad \ldots \quad (\pi).$$

Donc, *ce lieu est une ligne droite.*

2. Prouvons maintenant que cette droite (π) n'est autre que celle passant par les points de contact des tangentes à la courbe menées par le point A.

A cet effet, rappelons-nous que nous avons trouvé (N° 1 de notre mémoire) pour l'équation d'une tangente à une courbe quelconque du second degré :

$$Ayy' + B(xy' + yx') + Cxx' + D(y + y') + E(x + x') + F = 0.$$

Or, cette équation est celle de la ligne de contact, si l'on y regarde x', y' comme variables et x, y constants ; et en y posant $x = 0$, $y = 0$, pour indiquer que les tangentes passent pour l'origine, nous obtenons, en effaçant les accens,

$$Dy + Ex + F = 0 ;$$

laquelle est précisément l'équation (π). C. Q. F. P.

3. Le point N appartient aussi au lieu (π), car les droites CE et BD ayant pour équations

$$\frac{y}{y'''} + \frac{x}{x'} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{y}{y''} + \frac{x}{x^{\text{IV}}} = 1,$$

leur somme est

$$y\,\frac{y'' + y'''}{y''y'''} + x\,\frac{x' + x^{\text{IV}}}{x'x^{\text{IV}}} = 2 ;$$

relation qui n'est autre que celle (5).

4. Il résulte du N°. 2 de cette note, que le point A est le pôle de la droite MN et que par conséquent, le théorème de la polaire n'est qu'un cas particulier de celui-ci :

Si par un point donné sur le plan d'une courbe du second degré, on mène des couples de transversales à cette courbe et qu'on joigne deux à deux les points de rencontre de ces couples de transversales avec la courbe ; le lieu des points d'intersection de ces droites est une ligne droite.

5. En considérant le quadrilatère inscrit BCDE, nous voyons que le point A, intersection de deux côtés opposés prolongés, est le pôle de la droite passant par l'intersection des deux diagonales de ce quadrilatère et par le point de rencontre de ses deux autres côtés prolongés. Il en est de même du point M par rapport à la droite AN. Enfin, le point M est le pôle de la droite AM en vertu de la propriété III de la note II.

Donc, *dans tout quadrilatère inscrit dans une courbe du second degré, les intersections des diagonales et des côtés opposés prolongés, forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé.*

6. *Il résulte de là un moyen très simple de mener une tangente à une courbe du second degré au moyen de la règle seulement.*

Du point donné, hors la courbe, on mène deux sécantes quelconques ;

par leurs points d'intersection avec la courbe on mène quatre droites qui en se coupant déterminent deux points, la droite qui joint ces deux points coupera la courbe aux points de contact.

Remarque I. Si par un pôle, on mène deux transversales quelconques et qu'on joigne deux à deux les quatre points d'intersection avec la courbe ; ces quatre droites donneront deux points de la polaire du pôle donné.

Remarque II. Le pôle d'une polaire se construira en cherchant par la remarque précédente les polaires de deux de ses points et l'intersection de ces deux droites sera le pôle demandé (III note II).

III. — *Notice sur quelques espèces de* Pics *du Brésil*,

Par M. Alfred MALHERBE.

Pendant le séjour que j'ai fait à Vienne en 1843, j'ai obtenu, grâce à l'obligeance de M. Joseph Natterer, un des conservateurs du Museum impérial et royal d'histoire naturelle auquel j'étais recommandé, la communication de tous les exemplaires du genre *Picus* qu'avait rapportés de l'Amérique méridionale et notamment du Brésil M. Jean Natterer, son frère, dont le monde savant déplore la perte récente.

Ce dernier naturaliste n'avait pas encore eu le temps de classer et de publier toutes ses richesses zoologiques, et ce travail commencé par M. Wagner, de Munich, pour les mammifères, a été interrompu par le fatal évènement dont je viens de parler.

J'ai été assez heureux pour obtenir également en communication des notes manuscrites rédigées par M. Jean Natterer, pendant son voyage au Brésil. Ces notes indiquaient notamment la couleur de l'iris des espèces qui venaient à être tuées; elles m'ont été d'autant plus précieuses que très souvent les naturalistes voyageurs négligent cette indication et qu'il arrive par suite que les ouvrages d'histoire naturelle n'énoncent que fort rarement la couleur des yeux chez les oiseaux; aussi les préparateurs, faute de documents, placent-ils les yeux au hasard en cherchant seulement à *les assortir* à la couleur du plumage.

Mes investigations ont été faites concurremment avec M. J. Natterer, qui, à mes pressantes sollicitations a bien voulu nommer, d'accord avec moi, quelques-unes des espèces ci-après que je crois nouvelles, n'en ayant trouvé la description dans aucun auteur anglais, allemand ou français.

1. PICUS NATTERERI ou CHRYSOPTILUS (*Swains.*) NATTERERI.

Pic Natterer.

J'ai voulu rendre hommage à la mémoire de Jean Natterer en lui dédiant cette espèce rapportée par lui des forêts du Brésil.

Ce Pic a quelques rapports avec le *Picus cayennensis* dont il diffère néanmoins d'une manière très sensible. Ainsi le Pic Natterer a 25c, 6 à 7mill. de long, tandis que le Pic de Cayenne n'a que 21c, 6 à 7mill.

Le *mâle* a le front et le vertex noirs, le sinciput et la nuque rouge vif, les plumes de ces dernières parties étant beaucoup plus longues que les autres; à partir du bec une large moustache rouge vif; région ophthalmique et tout le côté du cou d'un blanc lavé de jaunâtre pâle; menton, gorge et devant du cou d'un blanc sale avec de fines stries longitudinales d'un brun foncé, tandis que la gorge du *P. cayennensis* est d'un noir profond grivelé de blanc. Toutes les parties inférieures d'un jaune verdâtre, lavé de cendré brun, et chaque plume marquée vers son extrémité d'une tache ou grattelette noire lancéolée, trois fois plus grande que les taches observées chez le *Cayennensis*; ces taches sont plus allongées et beaucoup moins étendues sur l'épigastre et le ventre que sur la poitrine, les flancs et les couvertures inférieures de la queue. Toutes les parties supérieures sont d'un brun olivatre lavé de jaunatre avec des bandes lancéolées noires, trois fois plus larges que chez le *P. cayennensis*. Les ailes sont rayées transversalement de roux jaunatre clair et de brun noiratre, l'extrémité de chaque penne étant d'un blanc roussâtre.

La queue est rayée de même et, à l'exception des deux pennes extérieures de chaque côté qui sont de la couleur des ailes, toutes les pennes sont noires dans plus de leur moitié. Les côtes des pennes des ailes et des deux premières pennes de la queue sont d'un jaune vif.

Le dessous de l'aile est d'un blanc jaunâtre, les remiges sont rayées et terminées par du brun pâle. Bec brun, pieds brun cendré; iris d'un brun roux foncé.

La *femelle* diffère du mâle par l'absence de la moustache rouge qui est remplacée par une moustache noire grivelée de blanc

cendré. Elle a le rouge moins étendu sur la tête, et les couleurs généralement moins vives.

Longueur totale	25cent 6 à 7mill.
Longueur du bec nu	2c,
Id. à partir de la base du crâne	2c—8m.
Longueur de la queue	8c—5m.
Id. de l'aile	12c—4mill.
Id. du tarse	2c.

(Du Brésil.)

PICUS OLIVINUS. (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic olivâtre.

Cette espèce du Brésil est de la taille du *P. adspersus*. Front et sommet de la tête d'un brun lavé de cendré et d'olivâtre; gorge d'un cendré blanchâtre. Toutes les parties inférieures d'un brun olivâtre rayé transversalement de cendré blanchâtre, excepté la queue qui n'a aucune raie; dos, ailes et croupion d'un olivâtre, jaunâtre sur le dos. Sur l'aile dix ou douze taches triangulaires rousses, placées sur deux rangées; chez le mâle tout l'occiput est rouge, tandis que la tête est brun olivâtre chez la femelle. Région temporale brun olivâtre, rayée de cendré blanchâtre chez la femelle. Deux ou trois grandes taches blanches arrondies, sur le rebord intérieur des pennes des ailes, qui sont tachées de blanc en dessous. Queue brune, mêlée de roux au dessus.

Iris brun foncé.

Longueur totale	15c—7mill.
Id. du bec seul à partir du front	2c—1m.
Id. de la queue	4c—5m.
Id. de l'aile	9c.
Id. du tarse	2c—1m.

(Du Brésil.)

3°. PICUS MURINUS. (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic murin.

Cette espèce diffère du *P. olivinus* dont elle a la taille et l'aspect, 1°. en ce que le rouge chez le *mâle* commence à partir du front et

s'étend sur le vertex et la moitié du sinciput, sans atteindre la nuque, tandis que chez le *P. olivinus* l'inverse existe, c'est-à-dire le rouge n'existe qu'à la nuque. 2°. En ce que les parties inférieures sont d'un brun pâle, rayé de gris blanchâtre, au lieu d'être olivâtres. La couleur olivâtre du dos, du croupion et des ailes est aussi beaucoup moins vive et il n'existe presque pas de jaune sur ces parties.

La *femelle* ne diffère presque pas de celle de l'*olivinus*. Elle possède quelques petites mouchetures d'un blanc jaunâtre sur le brun olivâtre de la tête.

Iris brun foncé.

Longueur totale	15^{c}—7^{m}.
Id. du bec seul à partir du front	2^{c}—1^{m}.
Id. de la queue	4^{c}—5^{m}.
Id. de l'aile	9^{c}—3^{m}.
Id. du tarse	1^{c}—8^{m} $^{1}/_{2}$.

(Du Brésil.)

4°. PICUS LEUCOLAEMUS. (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic à gorge blanche.

Ce Pic ressemble beaucoup au *Picus icterocephalus* (Wagler. 52), et il en diffère en ce qu'il a la gorge blanche tandis qu'elle est jaune chez l'*icterocephalus*.

La moustache rouge du mâle est plus large que chez le *P. icterocephalus*. Il existe moins de blanc sur les parties inférieures du *leucolaemus* et le brun olivâtre est plus foncé, les taches blanches sont plus rares et moins grandes.

Le *mâle* diffère de la femelle, parce qu'il a toute la tête et la moustache rouges tandis que la femelle n'a que l'occiput de cette couleur, la moustache et la tête étant d'un vert olivâtre lavé de jaune. Iris cendré brun.

Longueur totale	23^{c}.
Id. du bec seul à partir du front	2^{c}—3.
Id. de la queue	5^{c}—6.
Id. de l'aile	12^{c}.
Id. du tarse	1^{c}—8^{m} $^{1}/_{2}$.

(Du Brésil.)

5°. PICUS GRAMMICUS. (*Jos. Natt.* et *Math.*)

Le Pic barriolé.

Ce Pic a quelque rapport avec le *Picus brachyurus*, mais il est plus grand.

Le *mâle* a toute la tête et la huppe d'un roux foncé, la moustache rouge, toutes les parties supérieures rousses, chaque plume ayant des raies transversales brunes. Ailes brun pâle, avec une partie du rebord interne d'un marron pâle et quelques taches rousses sur le rebord externe; croupion d'un roux verdâtre sans tâches : parties inférieures rousses, chaque plume ayant un demi cercle brun foncé, verdâtre au milieu ; cuisses d'un jaune verdâtre ; flancs verdâtres ; dessous de l'aile d'un brun verdâtre ; ventre d'un roux vif sans taches noires ; queue brun noirâtre avec la base rousse.

La *femelle* diffère par l'absence de la moustache rouge.

N. B. Un sujet que je crois un très vieux mâle, avait le croupion d'un jaune lavé de roux, les flancs et le dessous des ailes d'un jaune pâle ; les cercles noirs des parties inférieures n'avaient pas de teinte verdâtre.

Iris carmin foncé.

Longueur totale		$27^{c}—8^{m}$.
Id.	du bec seul à partir du front	$2^{c}—6^{m}$.
Id.	de la queue	7^{c}.
Id.	de l'aile	12^{c}.
Id.	du tarse	$2^{c}—1^{m}$.

(Du Brésil.)

6°. PICUS MULTIFASCIATUS. (*Jos. Natt.* et *Math.*)

Le Pic à mille raies.

Ce Pic est plus petit que le *P. grammicus;* la tête, la gorge et le cou sont roux avec de fines raies longitudinales noires. Parties inférieures rousses, chaque plume ayant trois raies transversales noires; parties supérieures d'un roux plus vif, avec des bandes noires transversales sur le dos, les ailes, les couvertures supérieures de la queue et le croupion ; les plumes de cette dernière partie à base verdâtre ; pennes des ailes terminées de brun uniforme ; queue à extrémité noire, rayée de roux en dessus, et d'un brun sans taches en dessous.

Le *mâle* a une large moustache rouge qui est remplacée chez la femelle par une teinte rousse avec des raies longitudinales noires. Le bec est d'une teinte cornée verdâtre à la partie inférieure et à pointe noire. Dessous des ailes d'un bleu verdâtre ou jaune verdâtre suivant l'âge.

Iris carmin foncé.

Longueur totale	25^{c}.
Id. du bec seul à partir du front	2^{c}—6^{m}.
Id. de la queue	6^{c}—4^{m}.
Id. de l'aile	11^{c}—3.
Id. du tarse	1^{c}—8^{m} 1/2.

(Du Brésil.)

IV. — *Recherches théoriques et expérimentales sur les Machines destinées à l'aérage des Mines.*

Par L. TRASENSTER, sous-ingénieur des Mines.

---

1. Les fréquents désastres occasionnés dans les houillères, par l'inflammation du grisou, ont appelé depuis longtemps l'attention des ingénieurs et des savants sur les moyens de soustraire la classe ouvrière des mines à ce terrible fléau. Des recherches nombreuses ont été entreprises ; et dans ces derniers temps, secondées par le Gouvernement Belge, elles ont donné naissance à plusieurs écrits et à des découvertes utiles. M. Mueseler, par les modifications ingénieuses qu'il a fait subir à la lampe de Davy, a rendu infiniment moins redoutables les dangers que présentait l'éclairage des mines : mais, dans le travail des houillères, quelques circonstances peuvent encore déterminer l'explosion des gaz combustibles.

Non seulement les lampes sont exposées à des accidents, qui leur ôtent leur efficacité comme appareils de sûreté ; mais il existe une cause de danger permanente et beaucoup plus sérieuse : c'est le tirage à la poudre, dont l'emploi est indispensable dans beaucoup d'occasions.

L'ouvrier est donc exposé aux plus grands périls, chaque fois que l'air se trouve vicié par la présence de gaz inflammables. Le seul préservatif infaillible, c'est d'empêcher cette condition dangereuse de se réaliser, en déterminant un appel d'air suffisant pour balayer les ateliers d'exploitation, et surtout les parties de la mine où l'on doit recourir à l'usage de la poudre.

Si l'on consulte la statistique des accidents survenus dans les houillères, l'on constatera que les explosions de grisou, ont eu lieu, à très peu d'exceptions près, du commencement d'avril au mois de septembre ; c'est-à-dire, lorsque l'état de l'atmosphère est peu favorable à la ventilation ; et la plupart, au printemps, lorsque les premières chaleurs viennent changer les conditions de sécurité des ouvriers, sans qu'ils y soient préparés. Les dernières catastrophes arrivées dans la province de Liége, à Ougrée et au Horloz, ont eu probablement pour cause première, l'insuffisance momentanée de la ventilation qui a permis au grisou de s'accumuler dans les travaux, et de s'enflammer par la déflagration de la poudre

2. L'emploi de moyens propres à assurer d'une manière permanente le renouvellement de l'air dans les mines à grisou qui peuvent se trouver dans de mauvaises conditions, deviendra un complément nécessaire des mesures de prudence que prescrit l'Administration.

Toutefois les dépenses de premier établissement et d'entretien, qu'avaient occasionnés les machines pneumatiques connues, ne permettaient pas d'en conseiller l'emploi sans de pressants motifs.

Dans la plupart des exploitations déjà anciennes, l'étendue des travaux et la faible section des puits obligent à employer une force motrice considérable pour produire une ventilation convenable. La recherche des moyens les plus propres à atteindre ce but, a été dans ces derniers temps l'objet de plusieurs écrits, parmi lesquels on doit signaler, et par son importance et par son étendue, le Traité de l'aérage, de M. Combes, rédigé par les ordres de l'administration française et inséré dans les tomes XV et XVII de la 3e série des Annales des Mines.

En appelant l'analyse mathématique à la solution des divers problèmes que soulève la matière ; en ouvrant le champ à la discussion par la manière dont plusieurs d'entre eux sont posés ; M. Combes a rendu un véritable service à l'art des Mines : mais une confiance trop absolue dans les résultats du calcul appliqué à des phénomènes aussi complexes que ceux que présentent les mouvements de l'air et un examen trop rapide de certaines questions l'ont conduit sur quelques points à des solutions erronées.

Nulle part les assertions de cet ingénieur n'ont eu autant d'influence qu'en Belgique ; et la condamnation absolue du système « des Machines à Pistons, comme radicalement vicieux pour le » genre d'effet que doivent produire les appareils destinés à l'aé- » rage » qu'il avait formulée § 33 de son traité, a donné naissance à un grand nombre de machines fondées sur d'autres principes.

3. Depuis la publication de ce traité, une seule machine à soupapes s'est établie en Belgique, c'est celle à Cloches Plongeantes, de la houillère de Marihaye, à Seraing, construite d'après les idées émises par M. de Vaux, dans son cours d'exploitation.

Les études et les expériences que j'ai faites sur cette machine et sur celle de l'Espérance ; la comparaison des effets que j'ai observés et de ceux fournis par des machines de systèmes différents m'ayant conduit à des résultats entièrement opposés aux conclusions du savant professeur de l'École des Mines de Paris, je pense que la

publication de ces résultats ne sera pas sans intérêt pour les personnes qui s'occupent de ces matières, et pour les exploitants qui sont dans la nécessité d'employer des moteurs pour l'aérage des mines.

Je ferai voir que l'on peut facilement faire disparaître les défectuosités qui se rencontrent dans les machines à soupapes actuellement en activité, et qui ont motivé l'opinion défavorable que l'on a conçue de leur emploi.

Je démontrerai que dans les conditions ordinaires, où l'on doit recourir à l'emploi des machines pour la ventilation, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de déplacer de grands volumes d'air sous des dépressions marquées par des colonnes d'eau qui dépassent 15 à 20 millimètres :

Les machines à soupapes, bien construites, ont une supériorité incontestable sur les ventilateurs ;

Que parmi les divers systèmes de machines à soupapes, celui à cloches plongeantes est le plus avantageux ;

Enfin j'exposerai les considérations qui me font penser que, lorsqu'il faut extraire de l'air sous de faibles dépressions, l'on pourrait employer avec succès une forme de ventilateur différente de celles actuellement en usage.

4. Pour apprécier avec exactitude la nature et l'importance relative des résistances nuisibles qui se rencontrent dans les machines à soupapes, j'ai soumis celles-ci à des expériences variées, propres à déterminer l'influence des divers organes qui les composent, sur l'effet réalisé.

Le concours qu'a bien voulu me prêter, pour toutes ces expériences, M. Geoffroy, élève ingénieur des Mines, et l'obligeance avec laquelle MM. Behr, directeur-gérant de la Société de l'Espérance, et Plumat, directeur de la mine de Marihaye, ont fait mettre à ma disposition les machines de ces établissements, m'ont permis d'apporter dans mes opérations toute l'exactitude nécessaire.

Manomètre adopté pour les expériences.

5. Au premier abord, il se présentait une difficulté sérieuse qui rend fort incertaine les expériences faites antérieurement sur les machines d'aérage à mouvement alternatif ; c'est la détermination de la hauteur moyenne, mesurant la différence de la force élastique de l'air extérieur et de l'air qui après avoir circulé dans la mine, arrive à la machine, soit avant qu'il y pénètre, soit dans la machine même. On remarque en effet que cette hauteur varie continuellement : sous les pistons il y a alternativement, compression et

dépression par intervalles réguliers, et l'on peut avec un manomètre ordinaire mesurer assez approximativement chacun de ces deux effets ; mais la difficulté devient beaucoup plus grande, lorsqu'il faut connaître le degré moyen de dilatation dans les conduits qui amènent l'air à la machine. Alors pour chaque course complète du piston il y a ordinairement deux dépressions et deux compressions ; ces dernières ont lieu au moment où le piston change de mouvement, immédiatement après la fermeture des clapets et ne durent qu'un instant.

Ces changements brusques dans la force élastique de l'air, occasionnent dans la colonne liquide une agitation continuelle, et des surélévations dues à la force vive qu'impriment au liquide les variations rapides de pressions et la descente des colonnes soulevées.

M. de Vaux ayant fait l'observation que l'amplitude des oscillations diminuait rapidement avec le diamètre du tube manométrique ; nous eûmes l'idée de produire dans ce tube un rétrécissement artificiel, variable selon les circonstances, en introduisant dans l'une des branches un bouchon, qui laissât au liquide une ouverture suffisante pour atteindre en peu de temps son niveau.

De cette manière, j'ai pu observer avec beaucoup plus d'exactitude qu'à l'aide des manomètres ordinaires, les dépressions moyennes produites par la machine dans les galeries d'appel. Les oscillations sont alors peu étendues, et les compressions instantanées qui se manifestent immédiatement après la fermeture des clapets, ne sont pas assez prolongées pour produire une ascension du liquide en sens inverse. Leur effet se borne à provoquer dans la colonne un abaissement de niveau qui mesure leur influence dans la détermination de la hauteur moyenne.

Nous avions cru d'abord, pouvoir arriver au même résultat à l'aide d'un robinet, destiné à intercepter en partie la communication du manomètre avec l'air dont on voulait mesurer la tension ; mais ce moyen était inexact, parce que le choc qui a lieu après la fermeture des clapets, comprimait l'air contenu entre le robinet et l'eau du manomètre de manière à rendre la dépression indiquée, plus faible que la dépression réelle.

Lorsqu'on détermine la force élastique de l'air sous le piston avec un manomètre à étranglement, il faut avoir soin, si les excursions de la colonne liquide sont grandes, d'observer isolément l'un des effets de la marche du piston, la dépression ou la compression, en fermant le manomètre à l'aide du doigt pendant que l'autre effet se produit. Autrement il pourrait arriver que la résistance au mouve-

ment de l'eau fût trop grande pour lui permettre de parcourir l'étendue nécessaire dans l'intervalle des oscillations de la machine, et que par suite les indications du manomètre fussent trop faibles, puisque le liquide devrait redescendre avant qu'il eût atteint la hauteur maximum.

L'emploi d'un manomètre étranglé, dans cette circonstance, permet d'observer la hauteur moyenne avec plus de facilité parce que les petites oscillations sont insensibles.

Calcul de l'effet des Machines.

6. La méthode généralement employée pour calculer l'effet utile des machines d'aérage, consiste à déterminer, tant bien que mal, la dépression produite dans les galeries d'appel et le volume d'air aspiré; puis à comparer l'effet ainsi obtenu à la force de la machine, estimée d'après la tension de la vapeur dans la chaudière, avec toute l'incertitude que comporte l'emploi de coefficients de réduction : cette méthode qui rend l'appareil solidaire de l'habileté du mécanicien, n'est susceptible d'aucune précision, et ne peut conduire à des résultats comparatifs dignes de confiance. Pour bien juger d'un appareil de ventilation, il faut déterminer la force qui lui est directement appliquée indépendamment du système de la machine; ensuite voir quelle portion de cette force se trouve utilisée, en recherchant la nature des diverses résistances auxquelles donne inévitablement lieu le mouvement de l'air dans l'appareil employé. Des considérations mécaniques peuvent alors permettre de comparer les avantages et les inconvénients des divers moyens qui servent à transmettre l'action du moteur.

Dans le système des machines à cloches, on peut calculer avec une approximation très grande la force directement appliquée. On observe la dépression moyenne sous l'une des cloches, la compression simultanée qui a lieu sous l'autre, la somme de ces deux résistances représente l'effort total employé pour mouvoir les cloches.

En le comparant à la hauteur motrice nécessaire pour faire circuler l'air dans la mine, on a le rapport de l'effet utile à la force appliquée, si aucune perte d'air n'a lieu par le jeu de l'appareil.

Le volume d'air aspiré étant toujours moindre que le volume théorique, il faut multiplier le chiffre ainsi obtenu par un coefficient de réduction, que nous prendrons égal à 0,9 ce qui suppose une perte d'air égale au dixième du volume théorique. La perte doit être moins élevée pour les machines bien construites, ainsi que nous l'établirons par la suite.

Dans les machines à pistons, il faut ajouter à la hauteur qui représente l'effort nécessaire pour produire le mouvement de l'air, une pression équivalente au frottement des pistons.

Jaugeage des courants d'air.

7. Les modes de jaugeage employés dans les mines sont au nombre de trois :

1°. l'emploi de la fumée développée par un corps très combustible comme la poudre. Ce moyen donne des résultats très satisfaisants dans les galeries muraillées d'une section uniforme, mais dans la plupart des cas, il présente la difficulté de déterminer la section moyenne d'une galerie irrégulière d'une certaine longueur.

La vitesse moyenne observée n'est aussi qu'approximative parceque généralement l'air se meut suivant l'axe de la conduite, plus rapidement que le long des parois. Mais le plus grand inconvénient que présente ce moyen, c'est que dans les mines à grisou il ne peut être employé pour jauger les courants d'air qui ont déjà circulé dans les travaux.

2°. L'anémomètre de M. Combes.

Cet instrument offre l'avantage de n'exiger qu'un espace limité pour l'expérience, et ses indications sont d'une exactitude suffisante lorsque la vitesse de l'air est régulière. Toutefois la vitesse moyenne donnée par l'observation n'est aussi qu'approximative, parce que les vitesses, dans les divers points d'une section, sont très variables, et ne sont soumises à aucune loi déterminée. L'instrument est en outre exposé dans les mines, à des causes fréquentes de déformation qui le mettent hors d'usage, et lorsque la vitesse de l'air est très variable, les résultats qu'il fournit sont tout-à-fait inexacts.

J'avais voulu déterminer les pertes d'air qui ont lieu dans la machine de l'Espérance, en plaçant l'anémomètre dans la galerie qui établit la communication des puits d'aérage avec les cuves. Deux expériences concordantes, faites dans diverses sections m'ont donné $10^{m3}88$ pour le volume aspiré, tandis que le volume théorique n'était que de $8^{m3}73$. Cette différence doit être attribuée à ce que dans les intervalles des coups de piston la vitesse de l'air est nulle, tandis que l'anémomètre continue à tourner très rapidement, et donne ainsi des indications trop élevées.

3°. Le troisième moyen consiste à déterminer la vitesse de l'air dans une section rétrécie par la différence des pressions qui ont

lieu de chaque côté de la section. Ce procédé, d'une exécution facile, est susceptible d'une très grande précision, par l'emploi du manomètre multiplicateur, inventé par M. de Vaux, et à l'aide duquel on peut observer des hauteurs motrices représentées par de petites fractions de millimètres d'eau. Mais plus encore que le précédent, ce moyen exige que pendant la durée de l'observation, la vitesse ne varie que dans des limites très restreintes.

8. On voit qu'aucun de ces procédés ne permet de déterminer avec précision, le volume d'air aspiré par les machines à mouvement alternatif, immédiatement avant son entrée dans les cuves.

Si l'on consulte les diverses expériences faites sur ces machines, on trouvera que les pertes sont quelquefois inférieures et plus souvent supérieures au dixième du volume théorique.

Mais, si l'on remarque que le jaugeage s'effectue à l'entrée de l'air dans les travaux, et que le volume indiqué doit être augmenté des dégagements de gaz dans les travaux, des fuites d'air qui ont lieu par les tampons des puits et par les communications qui existent entre le bure d'aérage et celui d'extraction, de l'influence de la température de l'air sortant qui est souvent supérieure à celle de l'observation, on admettra que ces expériences ne sont nullement concluantes.

L'examen des diverses causes de perte, prouvera d'ailleurs, que le chiffre de 0,1 doit être rarement atteint.

Machine à piston de l'Espérance à Seraing.

9. Cette machine, figurée planche I, se compose de deux pistons se mouvant dans deux cuves cylindriques en bois de 3^m54 de diamètre. Les pistons sont attachés aux extrémités d'un balancier qui reçoit le mouvement d'une machine à vapeur, placée au-dessus de l'une des cuves. Les pistons et les fonds des cuves sont percés, chacun de 20 ouvertures ; la course varie, suivant la vitesse de la machine, entre 1^m90 et 1^m60.

Les travaux sont établis à 447^m et à 500^m de profondeur.

Expériences.

10. Le 11 février 1843, la machine donnant 51 coups en 4', un manomètre ordinaire a été placé successivement sur les tampons qui bouchent les deux puits d'aérage.

Pendant une course double du piston, il indiquait deux dépressions et deux compressions ;

Mais, ainsi que cela se remarque dans presque toutes les machines à mouvement alternatif, l'une des dépressions était plus prononcée que l'autre, ce que j'attribue à la différence de vitesse des pistons.

Sur le tampon du puits de l'Ouest, la dépression atteignait en très peu de temps 0^m08, diminuait jusqu'à 0,05 où elle restait un instant stationnaire, pour être suivie d'une compression très rapide de 0,0675 ; à celle-ci succédait bientôt une dépression de 0,05, qui se réduisait à 0,04 pour s'élever et se maintenir un instant vers 0,045, et être remplacée par une compression de 0,0575.

Sur le tampon du puits de l'Est, l'aspiration était indiquée par une colonne qui s'élevait à $0^m,08$ descendait à 0,05 était suivie d'une compression instantanée de 0,08 à laquelle succédait une aspiration de 0,06 descendant régulièrement à 0,03 et suivie d'une nouvelle compression de 0,075.

D'après ces données, j'estime que pendant l'ascension de l'un des pistons la dépression moyenne était de $0^m,055$ et pendant l'ascension de l'autre piston de $0^m,045$, soit $0^m,05$ pour la moyenne générale.

11. Ces expériences ont été reprises le 12 mai 1843, avec un manomètre d'un diamètre très large.

La machine donnait 14,5 coups par 1'. Sur le 1^er^ *tampon*, la dépression atteint en peu de temps $0^m,094$, diminue jusqu'à 0,081 où il y a oscillation, suivie d'une compression instantanée de 0,06 ; la colonne liquide indique ensuite une dépression de 0,066 où elle reste stationnaire, puis est refoulée de 0,065.

Sur le second tampon le liquide atteint $0^m,11$ redescend à 0,068 remonte à 0,097 en oscillant entre les deux termes, indique ensuite une compression de 0,064, suivie d'une nouvelle aspiration de 0,076, oscille vers 0,068 et est encore refoulé de 0,060.

Les compressions étant toujours instantanées, si l'on prenait pour mesure de la dépression les hauteurs où le liquide parait stationner, celle-ci serait représentée par des colonnes de $0^m,0805$ pour l'un des pistons, et de $0^m,067$ pour le second ou en moyenne par une colonne d'eau de $0^m,0737$.

Le manomètre, appliqué à l'une des cuves a donné les indications suivantes, pour une vitesse de 14 coups par minute.

Pendant l'ascension du piston : la colonne d'eau s'élève très-rapidement à $0^m,157$, redescend à 0,13, remonte à 0,17 et oscille autour de 0,13 pendant la plus grande partie de la course du piston, soit en moyenne $0^m,14$.

Pendant la descente : la compression qui est d'abord de $0^m,10$, oscille ensuite autour de 0,062 que je considérerai comme moyenne. Il résulterait de ces données, que sans tenir compte des frottements, la force appliquée serait représentée par une colonne de $0^m,202$ d'eau ; l'effet utile par une colonne de $0^m,0737$.

Soit pour le rapport de ces deux quantités $\frac{737}{2020}=0,365$ et dixième déduit 0,3285.

Ces expériences font voir combien est incertaine, par le moyen des manomètres ordinaires, la détermination du degré moyen de vide qui s'opère dans les galeries d'appel.

La suite nous prouvera que les données fournies par le manomètre appliqué à la cuve, sont aussi trop élevées ; ce qui tient aux agitations de la colonne liquide dans les tubes d'un grand diamètre.

Indépendamment de toute résistance passive, le mouvement de l'air exigerait d'après ces données une force de 23 chevaux, tandis que la force de la machine ne serait que de 22 chevaux environ (1).

12. Le 26 mai, j'ai répété ces expériences pour différentes vitesses de la machine, à l'aide de *manomètres à étranglement* et j'ai obtenu les résultats suivants :

Sur le 2e. *tampon.* Pour une vitesse de 13,4 coups par minute, la dénivellation s'élevait à $0^m,056$, descendait presque régulièrement jusqu'à 0,043, remontait à 0,046, descendait de nouveau régulièrement à 0,037 pour remonter au point de départ, soit pour l'aspiration moyenne $0^m,0455$.

Une seconde observation a donné pour une vitesse de 1,35 coups au lieu des chiffres précédents respectivement 0,058, 0,046, 0,049 et 0,037 soit en moyenne $0^m,0475$.

Sur le 1er. *tampon.* Pour la même vitesse ces chiffres ont été respectivement de 0,056, 0,42, 0,049 et 0,035 soit en moyenne $0^m,0455$.

L'ensemble de ces indications donne pour la dépression moyenne $0^m,046$.

---

(1) Pression de la vapeur 2,1/2 atmosphères.
Diamètre du piston $0^m,38$.
Vitesse $0^m,886$.
Consommation du foyer 120 kilog. par heure.
Ce qui donne une force théorique de 33,66 chevaux ou une force pratique de $33,66 \times 0,6 = 22$ chevaux.

Sur le 2e. *tampon*. Le manomètre a donné les indications suivantes pour une vitesse de la machine correspondant à 9,4 coups par 1′, et à une course des pistons de 1m63.

La dénivellation s'élève à 0m,018, redescend à 0,007, remonte à 0,0095, descend de nouveau à 0,0054 et remonte au point de départ.

Soit 0m,01 pour la mesure de la dépression moyenne.

Sur le 1er. *tampon*. Le manomètre donne la même dépression.

Le manomètre appliqué successivement à chacune des deux cuves a donné les résultats suivants :

CUVE.	NOMBRE DE COUPS.	COURSE.	ASPIRATION.	COMPRESSION.
De l'Est	14	1m,90	0m,1097	0m,046
»	13 3/4	»	0 1084	0 046
De l'Ouest	13 3/4	»	0 1044	0 045
»	9 1/2	1 63	0 077	0 042
De l'Est	11	1 70	0 088	0 0434
»	8 1/2	1 60	0 066	0 041

En comparant ces résultats, on trouve que pour une vitesse correspondant à 13 1/2 coups, la dépression moyenne de l'air avant son entrée dans la machine est mesurée par une colonne d'eau de 0m,046.

Que la dépression sous le piston est mesurée par une colonne d'eau dont la hauteur moyenne est de 0m,1064.

La compression pendant la descente du piston par une colonne de 0m,0455.

En faisant abstraction des pertes d'air et des résistances passives, on aurait pour le rapport de l'effet utile à l'effort total nécessaire pour déterminer le mouvement de l'air

$$\frac{455}{1519} = 0{,}30.$$

Ce rapport est encore bien moindre lorsque la vitesse de la machine diminue. Il est seulement de

$$\frac{10}{119} = 0{,}084.$$

Lorsque la machine ne donne que 9 $^1/_2$ coups.

13. Quoiqu'il fut facile de déduire de ces données, les causes de cet énorme déchet, j'ai voulu déterminer leur influence avec la plus grande précision, et le 16 juillet, dans une nouvelle série d'expériences, j'ai fait marcher la machine :

1°. Avec sa charge habituelle lorsqu'elle aspire l'air de la mine ;

2°. En donnant à l'air extérieur un libre accès sous les cuves, de manière à pouvoir apprécier avec exactitude la résistance de l'air au passage dans les clapets ;

3°. En ouvrant les clapets pour déterminer l'influence du frottement des pièces de l'appareil.

1re *Expérience.* La pression de la vapeur au manomètre de la chaudière était de 2 $^3/_4$ atmosphères (2m06 de mercure) ; la machine donnait 13 coups par minute et la course était de 1m,86.

Un manomètre à faible étranglement placé sur la cuve de l'Ouest a fourni les indications suivantes :

Pendant l'ascension du piston la dénivellation atteint 0m,11, descend à 0,096 remonte et oscille vers 0,1084 pour s'élever à la fin de la course à 0,123, soit en moyenne 0,1084.

Pendant la descente du piston, la compression est mesurée par une colonne d'eau, croissant régulièrement depuis 0m,039 jusqu'à 0,0474 soit en moyenne 0,0433.

2e *Expérience.* En ouvrant les portes et tampons des puits d'aérage de manière à laisser arriver directement l'air extérieur sous les cuves.

Pression de la vapeur 1m45 de mercure ; nombre de coups doubles 11 ; course 1m,68.

Pendant l'ascension du piston, la dénivellation s'élève à 0m,0745 descend à 0,0542 et oscille vers 0,063 que l'on peut considérer comme moyenne.

La compression est mesurée par une hauteur moyenne de 0,041.

Ainsi la force nécessaire pour introduire l'air à travers les clapets du fond des cuves est représentée par une colonne d'eau de 0m,063 pour une vitesse de 11 coups. (Nous verrons bientôt qu'elle ne varie pas pour une vitesse supérieure).

Nous aurons donc pour la dépression utile correspondant à une vitesse de 13 coups, $0^m,1084 - 0^m,063 = 0,0454$.

Et pour le rapport de cette dépression à la force appliquée.

$$\frac{454}{1084+433} = 0,30.$$

3me. *Expérience.* En ouvrant un grand clapet du piston.

Pression de la vapeur $1^m,17$; nombre de coups 10 ; Aspiration $0^m,061$. Compression $0^m,039$.

En ouvrant deux grands clapets.

Pression de la vapeur $1^m,11$; nombre de coups 11. Aspiration et compression $0^m,034$.

En ouvrant cinq grands clapets, pour la même vitesse, l'aspiration et la compression sont de $0^m,006$.

Enfin en ouvrant tous les clapets de manière à ce que l'air n'oppose plus aucun obstacle au mouvement la machine, celle-ci donne 9 coups sous une pression de vapeur de 0^m58 de mercure et s'arrête lorsque cette pression est descendue à 0^m52. Ce résultat établit que la résistance due au frottement des pistons dans les cuves, ne doit être qu'une fraction assez faible de la force appliquée ; mais cette résistance doit augmenter lorsque la machine est chargée, parce que la pression inégale qui existe à la circonférence du bourrage, et l'effort que supporte le piston lui-même donnent lieu à des trépidations qui se communiquent des pistons aux cuves et doivent entraîner des pertes de force assez notables.

Frottement des Pistons dans les Cuves.

14. D'après l'expérience précédente une pression de 0^m58 de mercure suffit pour vaincre le frottement des différentes pièces de la machine. Cette pression équivaut à une hauteur d'eau de $0^m,0909$ sur le piston de l'une des cuves. Or, une pression de $^1/_2$ atmosphère, soit les deux tiers de 0,58 doit suffire pour mouvoir la machine seule ; resterait donc 0,0303 pour la hauteur correspondant au frottement des pistons dans les cuves.

En calculant d'ailleurs ce frottement par la méthode ordinaire on arrive aux résultats suivants :

La circonférence du piston est de 11^m1156 la hauteur du contact de bourrage avec la cuve est au moins de $0^m,11$, soit pour la surface de contact $1^{m2}223$.

Les surfaces étant constamment enduites de savon dissous dans l'eau, nous admettons 0,15 pour le coefficient du frottement.

Mais il est une quantité indéterminée et essentiellement variable, c'est la pression du bourrage contre la cuve.

Eu égard à l'inégalité de son action, et pour éviter les fuites, la pression moyenne doit être au moins cinq fois la dépression maximum qui a lieu sous le piston, soit $0^m,615$ d'eau.

La pression totale sur une surface de 1,223 serait de 752,14 kil. qui multipliée par 0,15 donnerait un effort de 112,82 kil. pour chaque piston, soit pour les deux 225,64 kil. Cet effort réparti sur la surface de l'un des pistons ($9^{m2}84$) équivaudrait à une colonne d'eau de $0^m,023$, ou pour une vitesse de 14 coups à un travail de 2,66 chevaux

L'effet utile tel que nous l'avons déterminé précédemment, devra donc être encore diminué en tenant compte de cette résistance. La force nécessaire pour mouvoir l'air étant proportionnel à 1517, l'effort total sera proportionnel à 1747 ; l'effet utile à 454 multiplié par le coefficient 0,9 soit pour le rapport

$$\frac{454}{1747}\,0{,}9 = 0{,}26 \times 0{,}9 = 0{,}234.$$

Si on adoptait pour le frottement des pistons 0,0303 correspondant à une pression de 6 $^1/_2$ fois la dépression maximum, le rapport précédent serait égal à $\frac{454}{1820}\,0{,}9 = 0{,}2245$.

Influence des clapets sur la vitesse absolue de l'air sortant.

15. Un fait important qu'établissent les expériences précédentes, c'est le peu de variation qu'éprouve la pression nécessaire pour faire passer l'air à travers les ouvertures des clapets, lorsqu'on imprime à la machine des vitesses fort différentes. Cela tient à un phénomène particulier, dont l'étude permettra de faire disparaître le vice principal, que présentent toutes les machines à soupapes, et qui a fait considérer leur emploi comme peu rationnel. Si on supprimait entièrement les clapets, de manière à mettre à découvert toute la surface des ouvertures des pistons, il est évident que la pression nécessaire pour expulser l'air, serait en rapport direct avec la vitesse de la machine. Si au contraire, la section des ouvertures est beaucoup plus grande que celle qui reste libre, lorsque les clapets sont soulevés ; la vitesse de l'air sortant, et par conséquent la hauteur motrice perdue dépend uniquement du poids des clapets, ou de la résistance qu'ils opposent aux forces qui tendent à la soulever et nullement de la vitesse de la machine. L'effet est semblable à ce qui a lieu, lorsqu'un fluide s'échappe d'une capacité

formée de parois mobiles, maintenues par une force constante ; les parois s'écartent ou se rapprochent de manière à laisser entr'elles un orifice suffisant, pour que la pression génératrice du mouvement du fluide, que cet orifice doit débiter, soit égale à la force qui les retient : la vitesse de sortie est par conséquent invariable.

Si les clapets étaient parfaitement équilibrés, le choc de l'air sortant par les ouvertures du piston, aurait pour effet de les maintenir ouverts, dans une position verticale. Hors de là, ils s'inclineront d'autant plus sur la direction du courant, qu'ils opposeront une résistance plus grande aux forces qui tendent à les soulever. On peut d'ailleurs, lorsque les clapets sont largement ouverts, considérer l'orifice de sortie comme formé de deux parties distinctes : les ouvertures du piston, et les issues que les clapets laissent à leur pourtour, pour le dégagement de l'air. La suite nous apprendra, que dans les circonstances ordinaires de la pratique, la vitesse acquise au passage dans la première partie, n'absorbe qu'une hauteur motrice fort peu considérable ; et qu'elle produit par choc une pression contre les clapets qui doit différer très peu de cette hauteur motrice. Si cette pression est insuffisante pour vaincre la résistance des clapets, ceux-ci s'abaissent de manière à ce que l'air reçoive dans la seconde partie de l'orifice, un excès de vitesse, due à une hauteur égale à celle qui mesurerait l'excès de la résistance.

Ainsi lorsque le poids du clapet rétrécit la seconde partie de l'orifice, et la rend inférieure à la première, la vitesse perdue dépend directement de ce poids ; et pour une résistance constante du clapet, elle ne peut varier que dans d'étroites limites, quelle que soit la vitesse de la machine.

16. Le 30 décembre 1843, j'ai entrepris de nouvelles expériences dans le but de mettre hors de doute cette manière de voir, et de déterminer en même temps, le coefficient de contraction qu'il convient d'adopter, pour le genre d'orifices auxquels donne naissance le soulèvement des clapets. Alors j'ai pu calculer, à quelle limite on peut réduire l'énorme perte de force motrice que présente la disposition actuelle.

La pression atmosphérique étant de 0,762 et la température de l'air sortant de 16°5 ; un manomètre appliqué à la cuve de l'Ouest a donné les indications suivantes :

Nombre de coups par 1′	13,7	12	10,6
Course du piston	1^m,88	1^m,73	1^m,68
Aspiration moyenne	0^m,095	0^m,0813	0^m,0745
Compression »	0^m,0433	0^m0433	0^m,042

Pour déterminer le coefficient de contraction, j'ai tenu les clapets ouverts, à l'aide de petits batons de longueur connue, et j'ai observé la pression nécessaire pour expulser l'air.

Le nombre de coups doubles par minute étant de 14,63, la course de 1^m,82 et l'extrémité des grands clapets étant soulevée de 0^m,1; l'aspiration était de 0^m,027 et la compression de 0,0244 lorsque les dix clapets étaient ouverts; pour neuf clapets les données correspondantes étaient de 0,031 et de 0,0298; enfin pour 7 clopets, la compression dépassait 0^m,0433, et les autres se soulevaient.

L'extrémité des grands clapets, étant écartée de 0^m,20 j'ai obtenu :

Nombre de coups.	Course.	Nombre de clapets soulevés.	Aspiration.	Compression.
14,63	1^m,82	5	$0,^m0298$	0^m,027
13,33	1^m,80	4	$0,^m036$	0^m,0332

des autres clapets se soulevaient lorsque trois seulement étaient entr'ouverts.

A l'aide d'un peson à ressort, j'ai constaté que l'effort moyen pour soulever les clapets des pistons, par l'extrémité opposée à la base, était approximativement; pour les grands de 5 kilogs., et pour les petits de 2,5 kilogs.

Les clapets ainsi que les ouvertures qu'ils recouvrent, sont des trapèzes réguliers, dont les dimensions sont respectivement :

	BASES.		COTÉS.	HAUTr.	SURFACE.
Grands clapets	0^m,813	0^m,575		0^m,400	0^{m2}2776
Ouvertures	0, 770	0, 530	0^m,39	0^m,370	0, 2400
Petits clapets	0, 474	0, 26		0, 365	0, 1310
Ouvertures	0, 435	0, 21	0, 34	0, 322	0, 1030

L'effort nécessaire pour tenir les clapets ouverts, correspondrait d'après les données précédentes, à une pression uniforme de 0^m,038 d'eau pour les grands, et de 0^m,039 pour les petits; mais avant qu'ils soient soulevés, la pression de l'air ne s'exerçant que sur une partie de leur surface, égale à la section des ouvertures, devrait être équivalente à celle d'une colonne d'eau de 0^m,044 pour les grands et de 0^m,050 pour les petits.

L'expérience donne pour la pression moyenne nécessaire pour soulever les clapets des pistons $0^m,0433$; et pour celle qui doit être appliquée aux clapets du fond des cuves, $0^m,063$; soit pour la hauteur totale absorbée par la résistance qu'éprouve l'air, au passage des soupapes, 0,1063, représentant une vitesse perdue de plus de 41^m. La dépression utile est mesurée par une colonne de $0^m,454$, inférieure à la moitié de la hauteur perdue.

Ce qui prouve d'ailleurs que cet énorme déchet est dû à la mauvaise construction de certaines pièces de la machine, c'est qu'en soulevant les grands clapets du piston, de $0^m,1$ seulement, la hauteur motrice nécessaire pour l'expulsion de l'air, se trouve réduite de $0^m,0433$ à $0^m,0244$.

Coefficient de contraction pour les ouvertures des clapets.

17. Les résultats des quatre dernières expériences nous permettent de calculer le coefficient de contraction qu'il convient d'adopter.

La densité de l'air débité par les ouvertures, différait peu de celle de l'air extérieur qui était alternativement aspiré et expulsé par ces ouvertures : soit $\frac{1}{800}$ cette densité rapportée à celle de l'eau.

	SECTION TOTALE DES OUVERTURES.	VITESSE SANS CONTRACTION.	VITESSE DUE A LA HAUTEUR OBSERVEE.	COEFFICIENT.
1re Expérience	$0^{m^2},8800$	$9^m,93$	$18^m,18$	0, 546
2e	0, 7940	$11^m,03$	21, 26	0, 52
3e	0, 6174	12, 75	22, 33	0, 57
4e	0, 7717	11, 34	20, 20	0, 567
	Moyenne.			0, 55

Les expériences indiquent que le coefficient serait de 0,533 pour $0^m,1$ d'écartement des clapets ; et de 0,568 pour un écartement de $0^m,20$.

Le coefficient obtenu étant très faible, pour déterminer s'il était dû à la forme des ouvertures, j'ai comparé ces résultats à ceux fournis par un orifice en mince paroi.

Dans deux expériences du § 13, j'ai observé que pour un volume théorique de $6^{m^3},17$, la dépression et la compression sont de $0^m,34$ d'eau lorsque l'on ouvre complètement deux grands clapets ; et de 0^m06, lorsque cinq sont ouverts.

Les vitesses dues à ces hauteurs seraient respectivement de $22^m,66$ et de $9^m,48$; les vitesses sans contraction de 12^m85 et de $5^m,14$, ce qui donne pour coefficients 0,567 et 0,54 ou en moyenne 0,553.

Dans ce cas le coefficient devrait être au moins égal à 0,65. J'attribue la différence donnée par l'observation, à ce que la vitesse du piston, calculée d'après le nombre de levées est trop faible, à cause du petit arrêt qui a lieu à chaque changement de mouvement.

Il résulte de ces diverses données, que l'on ne doit pas prendre un coefficient de contraction supérieure à 0,55, lorsqu'on détermine la vitesse moyenne du piston d'après le nombre de coups par minute.

Limite de la vitesse de l'air sortant.

18. Le minimum de cette vitesse correspondrait à un soulèvement des clapets tel, que la section qui donne issue à l'air fut égale à la surface des ouvertures percées dans le piston.

Cette surface est de $2^{m^2},40$ pour les grands clapets et de $1^{m^2},03$ pour les petits, total $3^{m^2}43$. Le volume théorique, engendré par la machine, pour une vitesse de 14 coups par minute et une course de $1^m,90$, est de $8^{m^3}725$, ce qui donnerait pour la vitesse perdue minimum, $4^m,62$, (1) en prenant pour coefficient de contraction 0,55. Cette vitesse correspond à une hauteur d'eau de $0^m,00136$.

Dans la disposition actuelle des clapets on ne pourrait obtenir une section aussi considérable, qu'en leur donnant un écartement de $0^m,25$ pour les petits et de $0^m,34$ pour les grands (correspondant à un angle de 63°, 29′). Cette condition ne pourrait se réaliser dans la pratique ; mais on peut par une modification très simple, obtenir le même résultat avec un écartement beaucoup moindre : Il suffit d'attacher les clapets par la petite base ou lieu de les attacher par la grande base comme cela a lieu dans presque toutes les machines.

Cette modification présenterait les avantages suivants :

(1) La vitesse perdue serait en réalité un peu moindre, parce que le piston possède en sens inverse du courant une vitesse de $0^m,886$, qui réduirait la vitesse absolue de l'air sortant à $3^m,734$.

1°. La charnière moins longue opposerait moins de résistance au mouvement;

2°. Le centre du gravité du clapet, ou le point d'application de la pression qui tend à le soulever, se trouvant plus éloigné de la charnière, pour une même résistance la pression devrait être moindre;

3°. Enfin pour un même écartement du clapet, la section libre augmenterait dans un très grand rapport, surtout la partie la plus efficace pour le dégagement de l'air, celle qui est opposée à la charnière.

Dans l'exemple qui nous occupe, cette partie croîtrait dans le rapport de 1,45 à 1 pour les grands clapets et de 2,12 à 1 pour les petits. Pour un écartement de $0^m,20$ la section libre totale serait augmentée dans le rapport 1,3 à 1 pour les premiers, et de 1,5 à 1 pour les seconds.

Il suffirait alors pour réaliser l'effet proposé, d'obtenir des écartements respectivement de $0^m,22$ et de $0^m,16$.

Il faut maintenant déterminer, à quel point, dans cette supposition les clapets doivent être équilibrés en admettant que, pour un tel écartement, ils soient choqués par l'air qui s'échappe à travers les ouvertures du piston. On sait qu'en appelant P le poids du mètre cube du fluide, V la vitesse dont il est animé, S la surface choquée, I l'angle qu'elle forme avec la direction du mouvement, on obtient pour l'expression de la résistance éprouvée par un corps mince (1)

$$R=0,11PS^{1,1}V^2\,(\sin I)^{1,84\cos I}.$$

Si nous désignons par a l'angle, que forment les clapets avec la surface du piston, cette expression devient :

$$R=0,11PS^{1,1}V^2\,(\cos a)^{1,84\sin a}$$

Le calcul (2) indique que cette résistance équivaut à un poids,

---

(1) Voir Traité d'Hydraulique par M. d'Aubuisson, 2e édition, § 549 et 550.

(2) D'après les données de la question $P=1,25$ $V_1=4^m,62$. Pour les grands clapets $S=0,2776$; mais comme ils sont rencontrés par la veine contractée, nous ne prendrons que la moitié de cette quantité : les distances de la base de l'ouverture à la charnière et au clapet étant respectivement de $0^m,58$ et $0^m,22$ on a $0,38\sin a=0,22$ ou $\sin a=\frac{11}{19}$; $\cos a=\frac{154}{190}$; $(a=35°25')$ d'où $(\cos a)^{1,86\sin a}=\left(\frac{154}{190}\right)^{1,06}$.

appliqué au centre de gravité des clapets, de $0^k,33$ pour les grands et de $0^k,166$ pour les petits. Par des contrepoids, disposés convenablement, on peut certainement les équilibrer jusqu'à cette limite.

La pression génératrice de la vitesse de sortie, répartie uniformément sur la surface des clapets, produirait des efforts, respectivement de 0,38 et 0,17 kilogs., fort peu différents de ceux trouvés par le calcul précédent. L'effet du courant augmenterait d'ailleurs à mesure que l'angle a diminuerait : mais bientôt aussi l'air cesserait d'agir par choc, et la pression du fluide de la cuve se transmettrait directement aux clapets.

On pourrait rendre les ouvertures plus grandes encore et procurer ainsi à l'air un dégagement plus facile ; mais les données qui précèdent font voir que l'on peut, à la rigueur, réduire la vitesse perdue au passage des clapets du piston, à $4^m,62$; vitesse inférieure à celle que le courant possède dans plusieurs parties des travaux. La même perte se répétant aux clapets des cuves (1) la hauteur totale perdue serait de $0^m,00136 \times 2 = 0^m,00272$ d'eau, correspondant à une vitesse de $6^m,51$.

Admettons même que l'on puisse difficilement atteindre cette limite, et que la hauteur perdue soit le double de cette quantité ou de 0^m0027 pour chaque passage : c'est supposer que les clapets opposent une résistance appliquée à leur centre de gravité, égale au moins à $0^m,66$ pour les grands, et à $0^m,33$ pour les petits. La hauteur totale absorbée par les résistances des clapets serait alors de $0^m,0054$ correspondant à une vitesse perdue de $9^m,21$ et représentant au travail de $^6/_8$ de cheval vapeur. Dans l'état actuel des choses, cette hauteur étant de $0^m,1063$ le travail perdu est de $12^m,37$ chevaux.

---

d'où $R = 0,11 . 1,25 . \left(\frac{0,2776}{2}\right)^{4,4} (4,62)^2 \left(\frac{154}{190}\right)^{1,06} = 0,33$ kil. très approximativement.

Pour les petits clapets on trouve : $\sin a = \frac{16}{34}$ soit $\frac{1}{2}$, et $\cos a = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$S = \frac{0,131}{2}$ et

$R = 0,11 . 1,25 . \left(\frac{0,131}{2}\right)^{1,71} (4,62)^2 . \left(\frac{3}{4}\right)^{0,146}$ soit 0,166 kilog.

(1) L'air qui arrive aux clapets des cuves possédant déjà une certaine vitesse, la hauteur motrice nécessaire, dans l'hypothèse posée, serait un peu inférieure à 0,00136.

Un trop grand écartement des clapets serait toutefois sujet à un inconvénient : c'est la lenteur avec laquelle ils se fermeraient lors des changements de mouvement du piston. Dans les conditions que nous venons d'établir, cet inconvénient serait peu sensible, surtout si l'on a soin de n'équilibrer les clapets, qu'un peu au-delà du point nécessaire à l'effet qu'on veut obtenir. L'angle d'inclinaison des clapets sur les pistons étant peu ouvert, (il serait inférieur à 24° pour les grands et à 20° pour les petits) l'excès de poids qu'on peut leur laisser suffirait pour les ramener promptement sur leurs sièges.

Nous verrons bientôt que réduite à $9^m,21$, la vitesse perdue, qui avait principalement motivé l'essai de ventilateurs pour remplacer les machines à soupapes, est incomparablement moindre que celle qui a lieu dans tous les systèmes, qu'on a voulu leur substituer.

19. Nous savons que l'effet utile de la machine est proportionnel à une hauteur motrice de $0^m,0454$, si le passage de l'air dans les clapets n'exige plus que 0,0054 de hauteur, on aura pour le rapport de l'effet utile à l'effort employé $\frac{454}{508}=0,893$;

en ne tenant compte ni du frottement du piston ni des pertes d'air.

On admet ordinairement que l'effet de la première de ces résistances, est proportionnel à la différence maximum de la force élastique de l'air sur les deux faces du piston. Nous l'avons représenté par une colonne d'eau de $0^m,0303$ de hauteur, d'après l'effort nécessaire pour mouvoir la machine non chargée.

Dans les conditions précédentes, cette hauteur serait réduite de plus de moitié ou tout au plus égale à $0^m,015$, et l'on aurait, pour le rapport de l'effet utile théorique à l'effort appliqué au piston

$$\frac{454}{658}=0,69.$$

Pertes occasionnées par l'espace nuisible.

20. Nous avons admis que les pertes dues à l'espace nuisible et aux fuites d'air, ne dépassaient pas le dixième du volume théorique, dans les circonstances ordinaires : il nous reste à faire voir que ce chiffre ne doit pas même être atteint.

Ainsi que l'a prouvé M. Gonot, dans son rapport sur les appareils d'aérage, inséré dans le tome premier des Annales des Travaux

Publics, les pertes produites par l'espace nuisible, sont insignifiantes dans les machines pneumatiques.

En admettant même que le piston n'atteigne qu'à $0^m,50$ du fond de la cuve, le volume d'air contenu sous le piston sera de $4^{m^3},92$. La pression atmosphérique étant mesurée par une colonne d'eau de $10^m,33$, l'air pénètre dans la cuve sous une pression de $10,33 - 0,11 = 10,22$, et il est expulsé sous une pression de $10,33 + 0,043 = 10,373$.

La perte est mesurée par la dilatation qu'éprouve l'air de l'espace nuisible, en passant de la pression de $10^m,373$ à celle de $10^m,22$: cette dilatation est égale à $4,92\left(\frac{10,373}{10,22} - 1\right) = 0^{m^3},074$.

Le volume engendré par le piston étant de $18^{m^3},696$, on voit que la perte est seulement de $\frac{74}{18696} = \frac{1}{252} = 0,004$.

Cette perte est en réalité encore moindre parce que vers la fin de la course les différences de pression doivent être inférieures aux moyennes, données par l'observation.

L'air d'ailleurs jouissant d'une élasticité parfaite restitue à la machine, précisément à l'instant où le mouvement change, toute la force absorbée par les variations de densité qu'il a subies.

Pertes d'air par les joints des clapets.

21. Les fuites d'air par les joints des clapets occasionnent une perte d'effet beaucoup plus sensible.

Dans une expérience, M. Combes a trouvé pour la machine de l'Espérance $8^{m^3},016$ au fond de la mine : le volume engendré par l'excursion des pistons était par seconde de $8^{m^3},725$ (1) : d'où l'on voit que la perte serait de $\frac{709}{8725} = 0,081$.

Dans cette perte se trouve compris l'effet des diverses causes (§ 8) qui peuvent augmenter le volume du courant dans le parcours des travaux, jusqu'à son arrivée à la machine.

Dans la supposition d'ailleurs, où les clapets fermés, laisseraient même une ouverture de $0^m,001$, nous pouvons calculer que la perte due à cette cause atteindrait seulement de 0,06 à 0,07.

---

(1) M. Combes donne $9^m,024$, mais il a calculé ce volume dans la supposition que la course était de $2^m,05$ tandis qu'elle n'est en réalité que de $1^m,90$, au maximum.

Pendant l'ascension du piston, le volume engendré se remplit d'air qui afflue, en partie à travers les ouvertures des clapets de la cuve, en partie par les passages que laissent étant fermés les clapets du piston.

Désignons par V le volume total,
x et x' les quantités d'air;
s et s' les sections par lesquelles il pénètre,
h et h' les différences respectives de pression qui le font mouvoir, on aura :

$$x : x' = s\sqrt{h} : s'\sqrt{h'}$$

$$x' = \frac{x\, s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}$$

mais $\quad V = x + x'$;

d'où $$x' = \frac{(V - x')s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}} = \frac{V \cdot s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h} + s'\sqrt{h'}}$$

où pour simplifier $$x' = \frac{V \cdot s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}$$

Pendant la descente du piston l'air sera expulsé, en partie à travers les ouvertures du piston, et rentrera en partie dans la galerie par les joints des clapets du fond. En prenant des notations analogues aux précédentes, nous aurons :

$$x'_1 = \frac{V s'_1\sqrt{h'_1}}{s_1\sqrt{h_1}}$$

et pour l'expression de la perte totale

$$x' + x'_1 = V\left\{ \frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}} + \frac{s'_1\sqrt{h'_1}}{s_1\sqrt{h_1}} \right.$$

ou pour le rapport de la perte au volume théorique

$$\frac{x' + x'_1}{V} = \frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}} + \frac{s'_1\sqrt{h'_1}}{s_1\sqrt{h_1}}.$$

Si l'on remarque que $\sqrt{2gh}$ et $\sqrt{2gh_1}$ représentent les vitesses perdues par le passage de l'air à travers les clapets, et que ces vitesses sont en raison inverse des sections s et s', des ouvertures de dégagement, on en conclura que $s\sqrt{h} = s_1\sqrt{h_1}$ et que, pour

une vitesse donnée de la machine, cette quantité est invariable, quelle que soit la résistance des clapets.

Dans la machine de l'Espérance s' et s'_1, qui correspondent à un soulèvement de $0^m,001$, étant représentées par 1 ; $s\sqrt{h}=s_1\sqrt{h_1}$ sera très approximativement égal à 9,40. En effet pour un écartement de $0^m,1$ on a $\sqrt{h}=0,094$.

L'expérience donne d'ailleurs $h'=0,11$, $h'_1=0,0454+0,0433=0,0887$, $h=0,063$ et $h_1=0,0433$

d'où $$\frac{x'+x'_1}{V}=\frac{1}{9,40}(\sqrt{0,11}+\sqrt{0,0887})=0,066.$$

Dans la supposition où les résistances de l'air au passage des clapets seraient mesurées par une colonne de 0,0027 on aurait : $h'=h'_1=0,0454+0,0027=0,0481$; $h_1=h=0,0027$; d'où

$$\frac{x'+x'_1}{V}=2\,\frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}=\frac{2}{9,40}\sqrt{0,0481}=0,047.$$

On voit que dans les conditions que nous avons supposées, conditions que la pratique peut certainement réaliser, la perte ne s'élèverait pas à $\frac{1}{20^e}$.

22. Le calcul précédent nous fournit d'ailleurs quelques indications utiles :

Le terme $\frac{s'}{s}$ entrant comme facteur dans l'expression des pertes d'air, on voit que celles-ci seront en raison inverse de la quantité dont les clapets sont soulevés. Il en résulte qu'entre certaines limites (§ 18), il est préférable de diminuer la vitesse absolue de l'air sortant en donnant aux clapets un grand écartement, plutôt que de grandes dimensions avec un faible écartement.

Ainsi dans l'état où se trouve la machine de l'Espérance, il serait avantageux de boucher un certain nombre d'ouvertures. Les autres clapets se soulèveraient davantage et la pression pour expulser l'air resterait la même, tandis que les joints par lesquels l'air peut se perdre seraient moins nombreux.

Le calcul précédent nous fait voir aussi que les pertes augmentent à-peu-près dans le rapport des racines carrées des différences de pression qui ont lieu sur les faces des clapets fermés. On réduit donc ces pertes, en diminuant la vitesse absolue de l'air au passage des soupapes.

Dans le dernier exemple, on a pour expression de la quantité perdue,

$$\frac{x'+x'_1}{V} = 2\frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}},$$

dans laquelle h' se compose de la hauteur motrice utile 0,0454, plus 0,0027 pour la résitance de l'air dans les ouvertures. Cette dernière étant invariable on voit que la perte est à-peu-près proportionnelle à la racine carrée de la dépression dans les galeries d'appel.

Remarquons toutefois que plus les différences de pression h' et h'_1 sont considérables plus les clapets doivent tendre à se fermer exactement : mais cette cause doit être insuffisante pour compenser l'effet nuisible d'une plus grande pression.

Effet utile des machines à pistons.

23. Si, dans les conditions où se trouve la machine de l'Espérance, nous admettons que la perte soit de 0,08, chiffre que donne l'expérience rapportée plus haut ; nous serons certains de ne pas faire de supposition trop favorable. Les résultats du § 19 devront en conséquence être multipliés par 0,92, pour exprimer l'effet utile pratique d'une machine construite d'après les principes que nous avons développés.

Cet effet, sans le frottement du piston, sera de 0,82, et en ayant égard à ce frottement de 0,635.

24. En résumant le résultat des recherches qui précèdent, on trouve que la force appliquée aux pistons de la machine de l'Espérance représente un travail de 21,177 chevaux :

Effet utile (23 p. °/₀).	4,838
Pertes d'air.	0,422
Résistance des clapets.	12,37
Frottement des pistons.	3,527
Total.	21,177

Une force théorique de 33,66 chevaux étant suffisante pour mouvoir l'appareil, la machine rendrait 0,63 ou les $^5/_8$ de cette force.

Une machine construite avec les modifications que j'ai exposées exigerait pour le même résultat un travail de 7,67 chevaux :

Effet utile (63 p. °/₀)	4,858
Pertes d'air.	0,422
Résistance des clapets	0,63
Frottement des pistons.	1,763
	7,671

Ce qui supposerait une force théorique de $7{,}67 \cdot \frac{8}{5} = 12{,}27$ chevaux, ou un peu plus du tiers de la force actuelle (1).

Inconvénients que présentent les pistons.

25. Une machine établie dans ces dernières conditions réaliserait un effet bien supérieur à celui que produisent tous les systèmes dont on a fait usage. L'emploi des pistons présente néanmoins plusieurs inconvénients :

1°. Le frottement dans les cuves, entraîne d'après ce que nous venons de voir, une perte de travail qui doit être supérieure au tiers de l'effet utile.

2°. Les frais d'entretien, tant pour le savon que pour le renouvellement du bourrage, sont très considérables. A l'Espérance, les cuves coutent annuellement pour ces deux objets :

6 dos de cuirs pour boyaux à frs.	26	Frs.	156,00
36 kilogs. de crins à	» 3	»	108,00
36 kilogs de tresse à	» 1,40	»	50,40
83 tonneaux de savon noir à	» 7,25	»	601,75
Total		Frs.	916,25

3°. Par l'inégalité de la pression du bourrage et de l'usure des cuves, il se produit des fuites d'air à la circonférence des pistons.

Ces divers inconvénients, les deux premiers surtout, sont les plus graves que présentent les machines de ce système.

La substitution des cloches plongeantes aux pistons les fait complètement disparaître.

---

(1) Le Hainaut possède plusieurs machines du même système que celle de l'Espérance, et toutes présentent les vices que nous avons signalés dans cet appareil. Dans quelques-unes les clapets des pistons sont munis de contrepoids ; mais ils sont disposés de telle manière que l'air ne trouve pour son dégagement qu'une issue insuffisante et possède toujours une vitesse absolue considérable. Dans aucune les clapets des cuves ne sont équilibrés.

Machine à Cloches établie à la houillère de Marihaye.

26. L'appareil de ventilation, planche II, consiste en deux cloches cylindriques en tole de $3^m,66$ de diamètre et $2^m,60$ de hauteur, se mouvant dans des cuves annullaires, formées de deux cylindres concentriques de $3^m,51$ et de $3^m,81$ de diamètre.

Chaque cylindre intérieur est fermé à sa partie supérieure par un diaphragme en tôle, percé, ainsi que le fond de chacune des cloches et seize ouvertures recouvertes par des clapets. Les cloches sont séparées par un massif de maçonnerie, sur lequel se trouve établi horizontalement le cylindre à vapeur, et sont attachées aux extrémités de la tige du piston à l'aide de chaînes anglaises passant sur des poulies de renvoi.

Deux puits d'aérage, situés aux côtés opposés de la machine, sont mis en communication par une galerie qui passe sous les cloches.

Expériences.

27. J'ai fait sur cette machine des expériences variées et analogues à celles dont j'ai exposé les résultats pour la machine de l'Espérance : je rapporterai les principales.

Le 16 mai 1843, la machine donnait dix coups doubles par minute, la course du piston était de $1^m,95$ et la pression de la vapeur de $2\ \frac{5}{18}$ atmosphères.

Un manomètre à étranglement, placé successivement sur les tampons qui bouchent les puits a donné les résultats suivants :

Sur le tampon de l'Est, pour une course double du piston, la dénivellation croissait régulièrement depuis $0^m,0115$ jusqu'à $0^m,0528$ diminuait ensuite plus lentement jusqu'à $0^m,0284$, puis très brusquement, après la fermeture des clapets, jusqu'à $0^m,0054$ d'où elle s'élevait régulièrement à $0^m,0481$ pour diminuer jusqu'à $0^m,0345$ où elle stationnait quelques instants et tombait ensuite à 0,0115 point de départ :

On a, en résumé pour la mesure de la dénivellation moyenne :

	CLOCHE N°. 1.	CLOCHE N°. 2.	
1re. Partie de l'ascension	$\frac{0,0115+0,0328}{2}=0^m,03215$	$\frac{0,0054+0,0481}{2}=1,02675$	
2e. Partie de l'ascension	$\frac{0,0328+0,0284}{2}=0\,0406$	$\frac{0,0481+0,0345}{2}=0\,0415$	
Dénivellation moyenne.	0^m05675	$0^m,054025$	$0^m,05359$

L'expérience donne pour le tampon de l'Ouest une dénivellation de $0^m,0358$; soit pour la moyenne générale $0^m,0356$. Un manomètre plus étranglé a donné, pour une vitesse de 9 $^1/_2$ coups, les indications suivantes sur le 1er. tampon :

La dénivellation croit de $0^m,026$ à $0^m,039$, descend ensuite régulièrement à $0^m,34$ et rapidement de ce point à $0^m,023$, pour remonter à $0^m,0366$ ou elle reste stationnaire, puis à la fin de la course elle descend rapidement à $0^m,026$ point de départ. La moyenne de ces indications calculées comme précédemment serait de $0^m,0345$.

Le premier manomètre appliqué sur le même tampon, indiquait pour une vitesse de 4 $^3/_4$ coups par minute : dénivellation maximum $0^m,012$, décroissant régulièrement jusqu'à $0^m,004$; puis une dénivellation en sens inverse de 0,003, suivie d'une aspiration marquée par une colonne de 0,011 décroissant jusqu'à $0^m,003$ où il y a un point d'arrêt, suivi d'une compression de $0^m,003$.

La dépression moyenne serait de $0^m,0066$ environ.

Sur l'une des cloches pour la même vitesse, l'aspiration moyenne était indiquée par une colonne de $0^m,011$, la compression par une colonne de $0^m,004$.

28. Le 26 novembre 1843, la machine donnait 11 coups par minute, la course était de $1^m,78$, et la pression de la vapeur de 2 $^1/_2$ atmosphères effectives. Un manomètre à étranglement, placé sur l'un des tampons, indiquait une dénivellation croissant de $0^m,033$ à 0,052 pour diminuer régulièrement jusqu'à 0,047, on se trouvait au point d'arrêt ; de là, diminution rapide jusqu'à 0,032,

suivie d'une ascension régulière jusqu'à 0,053, à laquelle succédait une descente à-peu-près uniforme jusqu'à 0,033 point de départ.

La moyenne de ces indications serait de $0^m,0443$.

Un manomètre placé sur la cloche de l'Ouest, indiquait une dénivellation qui s'élevait rapidement à $0^m,108$ pour descendre régulièrement jusqu'à 0,054, où elle restait stationnaire pendant plus de la moitié de la course ; soit en moyenne pour la première partie de la course $0^m,081$, et pour la deuxième partie $0^m,054$, ou pour le degré moyen de la dilatation $0^m,0675$.

La compression moyenne était de $0^m,0108$.

Sur la seconde cloche, l'aspiration était la même et la compression moyenne de $0^m,0095$.

On aurait ainsi pour l'aspiration.	$0^m,0675$
— — pour la compression.	$0^m,01015$
Ou un effort total proportionnel à	$0^m,07765$
L'effet utile théorique serait proportionnel à . .	0,0443
Soit pour le rapport de ces deux quantités $\frac{4430}{7765}$	$=0,57$
Et en supposant même 0,1 de perte	0,513

En donnant à l'air extérieur un libre accès sous les cloches, par les tampons des puits, un manomètre placé sur la cloche de l'Est a donné les indications suivantes :

10 coups en 58″ ½,

Aspiration moyenne	$0^m,023$
Compression.	$0^m,0094$

La pression de la vapeur correspondante était de 1 ¾ atmosphères effectives.

Dans une expérience, la machine seule, détachée des cloches exigeait une pression de vapeur de 0,4 atmosphères pour une vitesse de 10 coups par minute, et une course de $1^m,95$.

En ajoutant à la dépression $0^m,023$, celle que nous avons trouvée dans la galerie, on a pour la dépression totale $0^m,0673$, qui est à-peu-près égale à celle que nous avons déduite de l'expérience directe.

Causes qui font varier la compression de l'air dans les galeries d'appel.

29. On aura pu remarquer par la marche des colonnes liquides, que la compression de l'air, à la suite de la fermeture des clapets,

est plus sensible à la mine de Marihaye qu'à celle de l'Espérance.

La principale cause c'est qu'à Marihaye la machine se trouve posée presque directement sur les puits, qui ont moins de 2^{m2} de section, tandis que la section des puits de l'Espérance est de plus de 3^{m2} et qu'ils se trouvent séparés de la machine par une galerie d'assez grandes dimensions qui fait l'office de régulateur.

Lorsque les puits sont très étroits, on voit qu'il serait avantageux, pour la régularité du mouvement de l'air, de disposer d'une capacité assez grande à proximité des machines aspirantes. Selon les circonstances on atteindrait ce but, soit par la construction d'une galerie de grande section, soit par le creusement d'un large puits de 30^{m} à 40^{m} de profondeur, dont le pied serait mis en communication avec le puits d'aérage.

On peut du reste par un calcul très-simple trouver approximativement la capacité dont il faudrait disposer pour rendre la compression nulle.

En appelant C le volume de cette capacité, v la vitesse moyenne du piston, S sa surface, t le temps d'arrêt du piston exprimé en secondes, H la pression atmosphérique, h la dépression dans les galeries d'appel ; le volume aspiré par seconde sera égal à Sv, et pendant le temps t, il affluera de la mine dans la capacité C un volume Svt. Si l'air contenu dans cette capacité, était ramené à la pression extérieure, son volume diminuerait de la quantité

$$C\left(1-\frac{H-h}{H}\right)=\frac{Ch}{H}.$$

Et si cette quantité était égale au volume introduit Svt, il n'y aurait plus de compression.

D'un autre côté le temps d'arrêt t doit être sensiblement en raison inverse de la vitesse moyenne du piston, on aura donc $t=\frac{k}{v}$, k étant une quantité constante à déterminer, et par suite

$$\frac{Ch}{H}=Sk.$$

d'après cette équation, on voit que la capacité doit être :

1°. Proportionnelle à la surface du piston ;

2°. En raison inverse de la dépression. Cette dernière relation explique pourquoi dans certaines machines, où la dépression est considérable, le phénomène de la compression ne s'observe pas.

La quantité dont la dilatation diminue pendant les interruptions du mouvement, est inférieure à la différence de pression qui existe entre l'air extérieur et l'air aspiré.

La surface des cloches de Marihaye étant plus grande que celle des pistons de l'Espérance (dans le rapport de 10,51 à 9,84), cette circonstance tend à rendre la compression plus grande à la première de ces mines. Cet effet doit encore être augmenté par le choc que produit sur les tampons l'air, qui monte dans les puits avec une vitesse de $3^m,50$ au moins.

Si on supposait que pendant le temps d'arrêt, $Sk=1^{m^3}$, pour la machine de Marihaye, prenant $h=0,0443$, $H=10,33$, on aurait $C=233^{m^3}$, ce qui exigerait un puits de $3^m,50$ de diamètre sur 25^m environ de profondeur. Si l'on avait $Sk=2^{m^3}$, ce qui supposerait $t=\frac{2}{6,83}=0'',3$ seulement, la profondeur du puits devrait être double. On voit que pour de faibles dépressions et un grand diamètre des pistons il serait souvent difficile d'obtenir des capacités assez étendues.

On pourra d'ailleurs calculer à quelle distance de la machine se propage la compression, puisque les puits faisant l'office de régulateur, il se trouve une section telle que la diminution de volume éprouvée par l'air renfermé dans les espaces supérieurs, est égale au volume qui a passé par cette section dans l'intervalle de l'aspiration.

Effet des clapets sur la vitesse absolue de l'air sortant.

30. L'effet utile que nous avons trouvé de 51 pour % pourrait être considérablement augmenté, si les clapets étaient convenablement établis.

Chaque cloche porte 16 ouvertures, 8 grandes, et 8 de moindres dimensions. Celles-ci sont des trapèzes réguliers; les premières sont des trapèzes terminés du côté de la grande base par un segment de cercle. Leurs dimensions et celles des clapets qui les recouvrent sont respectivement :

	TRAPÈZES.			SEGMENT.		
	bases.		hauteur.	arc.	rayon.	flèche.
Grands clapets	$0^m,94$	$0^m,67$	$0,^m35$	$0^m,96$	$1^m,42$	$0^m,09$
Ouvertures	0, 90	0, 63	0, 30	0, 92	1, 38	
Petits clapets	0, 60	0, 32	0, 38			
Ouvertures	0, 55	0, 27	0, 35			

Tous les clapets sont munis de contrepoids et attachés par leurs petites bases. Aussi la vitesse perdue dans cette machine est bien moindre que dans celle de l'Espérance. Néanmoins elle exige encore une hauteur motrice de $0^m,01015$ pour les clapets des cloches et de $0^m,023$ pour ceux des cuves, total, $0^m,03315$ représentant une vitesse de $22^m,77$; mais il est possible de réduire considérablement cette perte.

En mesurant directement l'effort nécessaire pour soutenir les clapets par l'extrémité opposée à la charnière, nous avons trouvé $1^{kil.},25$ pour les grands et $1^{kil.}$ pour les petits, correspondant respectivement à des pressions de $0^m,0064$ et $0^m,0103$ d'eau.

L'effort nécessaire pour soulever les grands clapets du fond est au moins quatre fois aussi considérable que pour ceux des cloches, ce qui rend compte de la pression que nécessite l'ouverture de ces clapets. Mais ces chiffres ne sont qu'approximatifs parce que l'effort varie lorsqu'il y a mouvement, non-seulement par l'effet du frottement des clapets et des leviers qui soutiennent les contrepoids, mais aussi par la manière dont ceux-ci sont disposés.

Ainsi qu'on peut s'en convaincre par l'inspection de la planche II, l'action des contrepoids des cloches, loin d'être constante, va en augmentant jusqu'à ce que le levier soit dans une position horizontale ; après quoi elle diminue rapidement. Aussi lorsque les clapets s'ouvrent, il y a d'abord un mouvement rapide, en vertu duquel ils s'élèvent à toute la hauteur que leur permet d'atteindre la constitution du système ; ils retombent bientôt, et oscillent jusqu'à la fin du mouvement autour de la position horizontale du levier, qui correspond à une ouverture de $0^m,055$ environ pour les grands clapets et de $0^m,06$ pour les petits.

Dans ces conditions, la section moyenne de l'ouverture de dégagement de l'air et de $0^{m2},054$ pour un petit clapet, et de $0^{m2},0671$ pour un grand, soit pour la section totale $0^{m2},9688$.

Le volume engendré par les cloches étant de $6^{m3},83$, la vitesse de l'air sortant, en prenant 0,55 pour coefficient de contraction serait de $12^{m},8$, représentant une hauteur motrice de $0^{m},0104$, chiffre qui diffère très-peu de celui donné par l'observation.

D'après la disposition des clapets ceux-ci s'ouvrent à-peu-près de la même quantité, quel que soit le volume aspiré. Lorsque le volume diminue, la vitesse de l'air sortant est moindre, ainsi que la hauteur perdue : dans une expérience (§ 27) la compression est seulement de $0^{m},004$ pour une vitesse de 4 $^{3}/_{4}$ coups par minute.

Limite de la vitesse absolue de l'air sortant.

31. La surface totale des ouvertures recouvertes par les clapets est de $3^{m2},17$, et l'on peut voir qu'il reste à la circonférence des cloches une large couronne qui en est dépourvue ; la surface totale de la cloche dépasse d'ailleurs trois fois cette quantité.

Si l'air s'échappait librement par les ouvertures de la cloche, la vitesse perdue pour une contraction de 0,45 et un volume de $6^{m3},83$ serait de $3^{m},9$, représentant une pression de $0^{m},001$ d'eau. Cette vitesse correspondrait à un écartement des clapets de $0^{m},15$ au moins pour les petits et de $0^{m},22$ pour les grands.

La pression de $0^{m},001$ d'eau repartie sur la surface des clapets représenterait un effort appliqué au centre de gravité de $0^{kil},175$ pour les premiers et de $0^{kil},324$ pour les seconds.

Admettons que la hauteur perdue au passage des clapets au lieu d'être conforme à l'hypothèse précédente, soit deux fois et demi plus grande, ou $0^{m},0025$ d'eau pour chaque passage. La hauteur totale perdue sera de $0^{m},005$ correspondant à une vitesse de $8^{m},86$.

Dans cette supposition, la dépression utile étant proportionnelle à $0^{m},0443$, l'effort total sera proportionnel à $0^{m},0493$; et l'on aura pour le rapport de ces deux quantités

$$\frac{443}{493} = 0,9$$

Et en supposant même que les pertes s'élèvent au dixième du volume théorique, l'effet utile sera encore de 81 p. $^{0}/_{0}$.

Disposition à donner aux clapets des cloches.

32. Dans ces clapets, outre l'influence nuisible d'une course trop limitée, les leviers des contrepoids sont engagés de telle manière qu'ils ne peuvent se mouvoir sans donner lieu à un frottement considérable ; et leurs supports sont si peu élevés, que les contrepoids des clapets intérieurs viennent choquer les clapets extérieurs.

On remédierait à tous ces inconvénients :

1°. En plaçant le point d'appui des leviers sur la verticale qui passe par la charnière des clapets ;

2°. En disposant ces leviers de manière que l'action des contrepoids fût constante, ou augmentât à partir du contact d'une faible quantité (planche II, fig. 3 et 4) ;

3°. Enfin, en donnant à l'axe de suspension des leviers une forme telle que le frottement y fut très peu sensible.

On doit aussi établir les charnières en cuir qui retiennent les clapets, de manière à ce qu'elles n'opposent qu'une faible résistance au mouvement de ces derniers.

Les contrepoids doivent être attachés aux leviers au moyen d'une vis de pression qui permette de les déplacer. On pourra déterminer la limite à laquelle les clapets doivent être équilibrés, à l'aide d'un manomètre appliqué à la cloche, qui indiquera la compression pour les diverses positions des contrepoids.

Disposition à donner aux clapets des cuves.

33. Si les dispositions précédentes doivent paraître suffisantes pour les clapets des cloches, qui sont à découvert et sous les yeux du machiniste, je pense qu'elles ne seraient plus convenables pour ceux des cuves. Ceux-ci ne pouvant être visités fréquemment sont exposés à se charger d'humidité et de crasses, de manière à ne plus être équilibrés que fort imparfaitement. On peut échapper à cet inconvénient en donnant aux clapets du fond une position verticale ou peu inclinée, qui empêchent les crasses de se déposer à leur surface et dans tous les cas rendre un excès de poids peu sensible. Comme l'influence de l'espace nuisible est très minime, on atteindrait ce but en appliquant les clapets aux parois verticales d'un prisme régulier à bases concentriques au cylindre intérieur, ou plutôt aux arêtes d'un tronc en pyramide, placé de la même manière.

Dans le premier cas les charnières seraient verticales et les clapets devraient être ramenés par de légers contrepoids ; dans le second cas, le poids des clapets tendrait à les tenir fermés.

Frottement des cloches.

34. Les cloches portent à l'extérieur quatre planches glissant sur quatre autres planches fixes, enduites de savon, qui les guident verticalement dans l'espace annulaire rempli d'eau. De là deux résistances, celle de l'eau et le frottement des planches.

Lorsque la machine est bien disposée, ce frottement peut se négliger dans les calculs, parce que la pression est très faible et la surface de contact peu étendue.

On pourrait du reste substituer avec avantage à ces planches, des tringles de fer fixes, sur lesquelles glisseraient de petites poulies attachées aux cloches.

La résistance de l'eau, quoique négligeable, pour la vitesse de la machine, deviendrait bientôt sensible pour une vitesse plus considérable.

En appelant s la surface de contact du liquide, π le poids du mètre cube, v la vitesse du mouvement, g l'action de la gravité, les principes de la mécanique donnent pour l'expression de la résistance :

$$R=\pi\frac{k}{g}s(v^2+bv);$$

$$\frac{k}{g}=0{,}00035 \text{ et } b=0{,}05.$$

Dans la machine de Marihaye, la surface de contact est invariable, l'une des cloches descendant toujours de la même quantité dont l'autre s'élève. Prenons pour calculer cette surface une position extrême du piston. L'une des cloches plonge alors de $2^m{,}25$ environ, l'autre de $0^m{,}30$, soit pour la hauteur totale $2^m{,}55$. La circonférence de la cloche étant de $11^m{,}5$, et celle-ci étant mouillée sur ses deux faces, la surface totale de contact sera de $58^{m^2}65$. Comme $v=0^m{,}65$, on aura pour l'expression de la résistance

$$R=1000\cdot 0{,}00035\cdot 58{,}65\cdot 0{,}455=9^{kil.}{,}34.$$

Cette résistance équivaut à une pression, repartie sur la surface de l'une des cloches, inférieure à $0^m{,}001$ d'eau et le travail absorbé est d'environ $\frac{1}{10}$ de cheval.

Pour une vitesse de 1^m, la résistance serait de $21^{kil.},48$, correspondant à une pression de $0^m,002$ d'eau et à un travail de chev. 0,3.

Espace nuisible produit par le déplacement du liquide.

35. Dans les machines à cloches plongeantes, on doit ajouter à l'espace nuisible des machines à pistons, la perte d'effet dûe aux changements de niveau du liquide contenu dans l'espace annulaire.

Cette perte est représentée par un volume ayant pour base, la couronne qui existe entre la cloche et le cylindre intérieur, et pour hauteur, la différence des niveaux du liquide au commencement et à la fin de la course. Pour une différence de pression totale de $0^m,07765$, le niveau dans chaque couronne ne varierait que de la moitié de cette quantité, ou de $0^m,03883$, si les cloches étaient sans épaisseur.

La perte serait d'environ $0^{m^3},034$ ou de 0,0017 du volume théorique, perte, comme on le voit, très minime.

Mais en réalité, cette perte est bien moindre encore. Les cloches ayant une épaisseur de $0^m,003$ occasionnent par leur descente un déplacement de liquide dont la hauteur est proportionnelle au rapport de cette épaisseur à la largeur de l'espace annulaire. Ce rapport étant égal à $\frac{0,003}{0,3}=0,01$, pour une course de $1^m,95$ le liquide s'élève de $0^m,0195$, ce qui réduit les différences de niveau au commencement et à la fin de la course à $0^m,01933$ et la perte à moins de $0^{m^3},0175$ ou 0,00085 du volume théorique.

La perte est encore diminuée par ce que les planches attachées aux cloches déplacent une certaine quantité de liquide. On voit qu'en faisant varier soit la largeur de l'espace annulaire, soit le volume des parties qui plongent dans l'eau, soit la longueur de la course, on peut entièrement annuler ce genre de perte et même diminuer ou compenser celle due à l'espace nuisible.

Frottement des chaînes et des poulies.

36. Quoique l'emploi des chaînes et des poulies ne soit nullement inhérent au système que nous examinons, et n'ait d'autre effet que de remplacer le balancier et les parallélogrammes des autres machines, j'ai néanmoins calculé le travail perdu par le frottement de ces pièces mécaniques, pour juger de leur influence sur la marche de la machine.

Dans le principe les cloches étaient suspendues par des chaînes ordinaires ; mais la pression, pour chaque anneau, n'ayant lieu que dans un espace très limité, ces chaînes s'usaient promptement, et les ruptures étaient très fréquentes. Elles occasionnaient aussi dans le mouvement des cloches des déviations de la verticale; d'où résultaient des chocs contre les clouures des cuves, qui donnaient lieu à des pertes de force, et à un bruit assez intense.

Ces inconvénients ont disparu par l'emploi de chaînes anglaises qui donnent plus de rigidité au système.

D'un autre côté les chaînes tendent à donner une légère irrégularité au mouvement. Lorsque le piston atteint une des extrémités du cylindre, il est sollicité vers cette extrémité par le poids d'une longueur de chaîne de $1^{m},95$ ou de $80^{kil.}$ environ, qui ne se trouve pas équilibré directement. Mais par la constitution de la machine, l'équilibre se produit indirectement : la cloche que soutient la chaîne est descendue de la même longueur dans l'eau et a perdu de son poids une quantité qui compense et au-delà l'excès de poids de cette chaîne et favorise avec la réaction de l'air enfermé sous la cloche, la reprise du mouvement en sens inverse.

On a pour calculer le travail absorbé par les frottements les données suivantes :

Distance de l'axe de la poulie à celui de la chaîne. . $0^{m},63$
Rayon des tourillons des poulies. . . . . $0^{m},038$

Poids d'une cloche 1665 kil., d'une poulie 250 kil., d'une chaîne 160 kil., total 2075 kil.

La dépression sous l'une des cloches étant de $0^{m},0675$, et la compression sous l'autre de $0^{m},01015$, on a au maximum, pour la pression verticale sur le tourillon le plus chargé :

Poids total de la cloche, de la chaîne et de la poulie (1)	kil.	2075
Pression de l'air, $10,51 \times 67,5$		709
Total		2784

Pour la pression horizontale :

Le poids de la cloche.	kil.	1665
Charge de la cloche		709
Moitié du poids de la chaîne.		80
Force pour vaincre les frottements, soit. . .		40
Total		2494

La vitesse du piston étant de $0^{m},65$, et le coefficient du frotte-

(1) On ne tient pas compte de la perte de poids de la cloche dans l'eau.

ment de fer sur cuivre bien graissé de 0,07 on trouve pour le travail absorbé

$$0{,}07\times\frac{0{,}038\cdot 65}{63}\sqrt{(2784)^2+(2494)^2}=10^{km},26$$

Pour l'autre tourillon la pression verticale est de $2075-10{,}51\times 10{,}15=1969$ kil. La pression horizontale est un peu inférieure à $1665+80-106=1639$ kil.

Et le travail perdu est de.	$7^{km},03$
Soit pour le travail total.	$17^{km},29$

Pour déterminer le frottement des chaînes, le rayon du trou des chainons étant de $0^m,015$, un point de la circonférence parcourt par seconde $\frac{0^m,015\cdot 65}{63}\times 0^m,0252=0^m,0155$.

En prenant $\frac{1}{6}$ pour le coefficient du frottement de fer sur fer mouillé, on trouve que le frottement absorbe :

d'un côté un travail de	$15^{km},33$
De l'autre.	10, 15
Total.	$25^{km},48$

ou $\frac{1}{3}$ de cheval.

Le travail perdu par les deux résistances que nous venons d'examiner est donc de $42^{km},77$ ou 0,57 de cheval-vapeur, équivalent à une pression de $0^m,006$ d'eau sur l'une des cloches.

D'un autre côté, j'ai lieu de croire que la chaîne est encore trop faible et qu'il conviendrait de donner plus de solidité aux boulons. On pourrait, dans les machines qu'on aurait à établir, compenser avantageusement le surcroît de résistance qui en résulterait, en donnant aux poulies un diamètre plus grand.

Pertes d'air.

37. Je n'ai pu déterminer avec exactitude les pertes d'air qui ont lieu par les clapets, parce que l'air aspiré ne se trouvait réuni dans aucun endroit convenable pour ces sortes d'expériences. Un jaugeage exécuté à l'entrée des travaux inférieurs, à 237^m de profondeur, m'a donné $4^{m^3},2$; le volume théorique était de $6^{m^3},83$; mais une partie de l'air passait par l'étage supérieur à 179^m de profondeur. Cet étage ayant été fermé par des portes, j'ai trouvé dans une autre expérience $4^{m^3},555$ pour le volume d'air qui alimentait les travaux du midi et auquel il faut ajouter une quantité indéterminée qui passait par deux tailles plus rapprochées du puits.

D'après la manière dont se trouve établie la machine de Marihaye,

les pertes doivent être moindres qu'à celle de l'Espérance. En supposant qu'elles soient comme nous l'avons admis pour cette dernière, les 0,08 du volume théorique, nous serons certainement en dessus de la réalité.

Pour éviter l'aspiration de l'air extérieur par les tampons des puits, on a adopté un mode de fermeture, indiqué dans le cours de M. de Vaux, et qui consiste à faire plonger dans une rigole annulaire remplie d'eau, les bords d'une cloche en tôle de quelques centimètres de hauteur. Cette fermeture est non-seulement tout-à-fait étanche, mais elle peut s'ouvrir avec la plus grande facilité; et en cas d'explosion dans l'intérieur de la mine, elle n'opposerait pas de résistance au choc des gaz, et la machine échapperait très probablement à cette cause de destruction.

Effet utile des machines à Cloches Plongeantes.

38. Les diverses considérations qui précèdent nous montrent que le travail dépensé par le mouvement des cloches de la machine de Maribaye, dans les circonstances où nous l'avons examiné est de 7,07 chevaux :

Effet utile (52 pour $^{0}/_{0}$).	chev.	3,711
Pertes d'air (0,08)		0,323
Résistance des clapets.		3,037
Total.		7,071

La surface du piston étant de 506 centim. carrés, (10 pouces anglais de diamètre) pour une vitesse de $C^{m},65$ et une pression de $2\,^{1}/_{2}$ atmosphères effectives (1), la force théorique est de 11,3 chevaux dont les $^{6}/_{8}$ sont appliqués à l'appareil de ventilation. Des 4,23 chevaux non utilisés la résistance du piston et des accessoires en emploie 1,84, lorsque la machine n'est pas chargée, et le frottement des poulies et des chaines 0,57.

Une machine modifiée comme je l'ai indiqué, exigerait pour le même résultat un travail de 4,5 chevaux :

(1) L'expérience a constaté que la pression de la vapeur dans le cylindre différait très peu de celle qui a lieu dans la chaudière, et qu'elle se maintenait constante pendant toute la course du piston.

Effet utile (82 pour °/₀)	chev.	3,711
Pertes d'air.		0,323
Résistance des clapets		0,455
	Total.	4,489

Ce qui supposerait une force théorique de 7,2 chevaux.

Enfin par ce système, on pourrait obtenir l'effet que réalisait, lors de nos expériences, la machine de l'Espérance avec une force effective de 6 chevaux, ou une force théorique de 9,45 chevaux.

Frais d'établissement de l'appareil à cloches.

39. Si dans ce genre d'appareils, les frais d'entretien sont presque nuls et présentent, sous ce rapport, une notable économie, sur les machines à pistons; les frais d'établissement sont d'un autre côté, un peu plus élevés. L'appareil de Marihaye qui peut engendrer un volume de plus de 40$^{m^3}$a exigé pour sa confection :

	Fonte.	Fer.
2 Cuves doubles en tôle . . .		kil. 4369
32 Clapets avec contrepoids	kil. 221	» 463
2 Cloches en tôle.		2756
32 Clapets avec contrepoids	139	436
Total.	360	8024

à raison de 60 frs. les 100 kil. fer et tôle, et de 15 frs. la fonte, la dépense totale serait de 4868 frs. 40.

Des cuves en bois avec pistons et clapets, comme à l'Espérance, couteraient pour la même capacité au moins 3500 frs.

On voit que la faible différence de prix en faveur des machines à pistons, est loin d'établir une compensation aux frais d'entretien qu'elles nécessitent.

Ventilateurs.

40. Tous les ventilateurs employés à l'aérage des mines peuvent se diviser en deux grandes catégories, suivant leur mode d'action sur le fluide qu'ils doivent déplacer :

Ou bien ils impriment à l'air un mouvement centrifuge dans les canaux mobiles dont ils sont formés, ce sont *les ventilateurs à force centrifuge;*

Ou bien les canaux mobiles éprouvent un mouvement de translation en vertu duquel le fluide glisse sur les cloisons de l'appareil,

sans s'éloigner de l'axe : nous les appellerons : *ventilateurs à mouvement circulaire de translation.*

Théorie des appareils à force centrifuge.

41. Pour nous rendre compte du mode d'action de ce genre d'appareils, considérons un vase cylindrique (planche II, fig. 5) mu circulairement autour de l'axe vertical AB et contenant une certaine quantité de liquide. Supposons que le mouvement du vase soit communiqué au fluide ou par l'effet du frottement ou par le moyen de cloisons attachées à l'axe, et que ce mouvement soit uniforme.

On sait que dans ce cas le liquide se déprime près de l'axe pour s'élever contre les parois du vase de manière à ce que la surface affecte la forme d'un paraboloïde de révolution.

Nommons :

w La vitesse de rotation des points situés à l'unité de distance de l'axe, ou la vitesse angulaire ;

r Le rayon intérieur du vase ;

h La hauteur ND de l'intersection de la suface du liquide avec les parois du vase au-dessus du point A où cette surface coupe l'axe AB.

La Mécanique nous apprend que dans ces conditions

$$h=\frac{w^2r^2}{2g}.$$

Le point N de la surface est donc pressé par une hauteur h de liquide : Il en résulte que si l'on pratique en ce point une petite ouverture, le liquide prendra dans cette ouverture une vitesse donnée par la relation

$$u=\sqrt{2gh}=wr$$

égale par conséquent à la vitesse de rotation.

Si, au lieu de n'éprouver aucune pression à l'extérieur, l'orifice de sortie est baigné par un liquide de même densité que celui du vase, et dont la hauteur au-dessus de cet orifice soit égale à KN=H, la vitesse d'écoulement au lieu d'être égale à $\sqrt{2gh}$ sera donnée par l'expression

$$u=\sqrt{2g(h-H)}=\sqrt{w^2r^2-2gH}. \quad (a)$$

Cette vitesse sera encore diminuée, si le liquide, au lieu de

s'échapper librement par l'orifice, doit traverser des conduits, et s'il éprouve des perturbations dans son mouvement, comme des chocs, des contractions, etc. En représentant par h' la pression nécessaire pour vaincre ces diverses résistances, la vitesse de sortie deviendra

$$u=\sqrt{2g(h-H-h')}, \qquad \text{ou}$$
$$u^2=w^2r^2-2gH-2gh' \ldots\ldots (b).$$

Si de ces quatre termes, trois nous sont donnés par l'expérience, nous pourrons déterminer l'autre par le calcul.

Outre les résistances dans l'intérieur de l'appareil, le fluide en mouvement emporte avec lui une certaine quantité de force motrice : si nous supposons que l'orifice soit dans la direction du rayon, comme le liquide participe au mouvement de l'appareil et se meut circulairement avec la vitesse wr, il s'échappera avec une vitesse absolue, qui sera la résultante de celle-ci et de la vitesse u dans l'orifice, ou qui sera égale à

$$\sqrt{w^2r^2+u^2}$$

représentant une hauteur motrice

$$h''=\frac{w^2r^2+u^2}{2g} \ldots\ldots (c).$$

Si l'orifice est dirigé suivant la tangente et en sens inverse du mouvement de rotation, la vitesse absolue d'écoulement sera égale à

$$wr-u \ldots\ldots (c').$$

Enfin cette vitesse sera égale à

$$\sqrt{w^2r^2+u^2-2uwr\cos a} \ldots\ldots (c'').$$

Si a représente l'angle que forme la direction de l'orifice avec la tangente à la circonférence, du côté opposé au mouvement de rotation.

Calcul de l'effet des ventilateurs à force centrifuge.

42. Ces bases posées, nous allons voir comment les ventilateurs rentrent dans cette théorie.

D'abord les faibles différences de pression que l'on observe dans les machines d'aérage, nous permettent d'attribuer à l'air les conditions de mouvement des fluides incompressibles.

Les ventilateurs aspirans ont tous pour but de faire passer dans l'atmosphère de l'air qui se trouve dans une capacité où la pression est moindre. Il en résulte que dans tous les ventilateurs les orifices de sortie sont soumis à un certain excès de pression, qui mesuré en colonne d'air représente la hauteur KN ou H de l'hypothèse précédente. Cette hauteur H mesure la dépression opérée par l'appareil; elle est par conséquent proportionnelle à l'effet utile.

Ayant jaugé le volume d'air aspiré, par l'un des trois moyens indiqués § 7, et la section des canaux mobiles nous étant donnée, nous connaitrons u, ou la vitesse relative de l'air dans ces canaux. La vitesse angulaire est aussi connue; dès lors nous pourrons déterminer facilement h' ou l'effet des résistances dans l'intérieur de l'appareil, puisque l'équation (b) nous donne

$$h' = \frac{w^2 r^2 - u^2}{2g} - \text{H}.$$

Enfin connaissant u et wr, on calculera facilement h'', ou la hauteur perdue par la vitesse absolue de l'air sortant, par l'une des trois formules (c), (c'), (c'').

Nous aurons ainsi tous les éléments nécessaires pour déterminer le rapport de l'effet utile du ventilateur, à la force totale employée pour produire le mouvement de l'air, abstraction faite du frottement des pièces mécaniques et du frottement de l'air extérieur sur les disques tournants.

L'effet utile étant proportionnel à H et l'effort total à $\text{H}+h'+h''$, on aura pour le rapport de ces deux quantités

$$\text{E} = \frac{\text{H}}{\text{H}+h'+h''} \quad \ldots\ldots \quad (d).$$

On pourrait objecter qu'il existe une différence entre les ventilateurs et le cylindre tournant que nous avons considéré, en ce que, dans les ventilateurs, les canaux occupent seulement une couronne plus ou moins large vers le contour extérieur : Mais, si l'on remarque que les particules fluides, à leur entrée dans les canaux mobiles participent immédiatement au mouvement de rotation, de manière, que si elles sont d'abord animées dans la direction du rayon de la vitesse v', et que r' soit le rayon de la circonférence intérieure du ventilateur, elles acquerront la vitesse $\sqrt{w^2 r'^2 + v'^2}$; on concevra, que pour les appareils que nous aurons

à examiner, la théorie reste la même quelle que soit la distance à l'axe de l'origine des canaux. M. Combes, dans le supplément au Traité de l'aérage, tome XVIII des Annales des Mines, est arrivé aux mêmes résultats que ci-dessus, par une voie différente : En supposant que l'air entre sans choc dans les canaux mobiles et en négligeant les résistances, il trouve (page 612) pour l'expression de la vitesse, l'équation (*a*) ou

$$u^2 = w^2 r^2 - 2gH ;$$

et en tenant compte des résistances, il trouve (page 621) une relation identique avec l'équation (*b*).

43. Deux espèces différentes de ventilateurs à force centrifuge ont été établies en Belgique : les ventilateurs à aîles courbes de M. Combes, dont la description et la théorie se trouvent exposées dans son Traité de l'aérage, et les ventilateurs ordinaires à force centrifuge et à aîles planes, avec de légères modifications dues à M. Letoret.

N'ayant pas été à même de faire des expériences sur ces appareils, je prendrai pour base de mes calculs celles que nous devons à la sollicitude éclairée de M. Rainbeaux, chef de l'établissement du Grand Hornu, près de Mons, et qui ont été confiées aux soins de M. Glépin, directeur du charbonnage de cet établissement. Ces expériences se trouvent décrites dans le Bulletin du Musée de l'Industrie, année 1843.

Ventilateur de M. Combes.

44. Un ventilateur de ce système, construit avec les plus grands soins et toutes les modifications dont la pratique a fait reconnaître l'utilité, se trouve établi à l'une des mines du Grand Hornu. Il est formé de trois aîles, qui sont tangentes à la circonférence extérieure et forment un angle de 6°39′ avec la tangente à la circonférence intérieure. Les rayons de ces circonférences sont de $0^m,85$ et de $0^m,68$. La section totale des canaux est de $0^{m^2},1695$ et leur hauteur est à l'entrée de $0^m,34$ et à la sortie de $0^m,355$.

Ce ventilateur se trouve décrit pages 81 et suivantes du Bulletin, et les expériences dont il a été l'objet sont rapportées pages 86, 87, 297 et 298.

Vitesse absolue de l'air sortant.

45. Cette vitesse nous sera donnée par l'expression $wr - u$; il suffit donc pour chaque expérience de calculer la vitesse de l'extrémité des ailes et d'en retrancher la vitesse de l'air dans les canaux. Le tableau suivant présente le résultat de ces calculs et l'indication de la hauteur perdue $h'' = \frac{(wr-u)^2}{2g}$ à côté de la hauteur utile H.

NUMÉRO DES EXPERIENCES.	1re.	2e	3e	4e	5e
Vitesse angulaire.	48m, 9	51m,4	56m, 748	45m,227	53m,5
Volume aspiré.	2m3,413	2m3,532	2m3,851	3m3,694	4m3,567
Vitesse (*wr*) de l'extrémité des ailes.	41m,565	43m,69	48m,235	36m,74	45m,475
Vitesse relative (*u*).	14, 236	14, 94	16, 82	21, 8	26, 9
Vitesse de l'air sortant.	27, 329	28, 75	31, 415	14, 94	18, 575
Hauteur perdue C*h''* en air.	38,	42, 12	50, 27	11, 35	17, 4
« en eau.	0, 046	0, 05	0, 059	0, 014	0, 021
Hauteur utile (H) en air.	25, 64	25, 27	31, 9	0, 67	17, 035
« en eau.	0, 031	0, 03	0, 038	0, 013	0, 021

On voit d'après ces calculs que pour des dépressions qui varient de 0m,03 à 0m,04 d'eau, la vitesse perdue est de 27m à 31m et absorbe un travail moteur supérieur à 1,5 fois le travail utile, tandis que dans la machine de Marihaye, malgré l'état défectueux dans lequel elle se trouve, la vitesse perdue ne dépasse pas 23m, correspondant à une colonne d'eau de 0m,033. Pour des dépressions plus faibles, la perte est encore supérieure au travail, et cette perte serait probablement énorme pour des volumes et des dépressions considérables. Admettons par exemple, que dans le ventilateur calculé par M. Combes pour faire l'effet de la machine de l'Espérance (pages 611 et suivantes du supplément au Traité de l'aérage),

la vitesse angulaire nécessaire soit 1,5 fois la vitesse théorique, comme dans les trois premières expériences du tableau, nous trouverons pour la vitesse absolue de l'air $47^m,53$ correspondant à une hauteur génératrice de $115^m,25$ d'air ou $0^m,14$ d'eau. Dans la machine de l'Espérance, la hauteur perdue est de $0^m,1063$ d'eau.

Le but que l'on avait eu en vue en substituant les ventilateurs à aîles courbes aux machines à soupapes est donc loin d'avoir été atteint, et ce sont ces dernières qui présentent incomparablement les meilleures conditions sous le rapport de la vitesse absolue de l'air sortant, surtout lorsque l'aspiration a lieu sous des dépressions un peu élevées.

Effet de la résistance de l'air dans les ventilateurs à aîles courbes.

46. Il existe dans les ventilateurs d'autres causes encore d'absorption de travail moteur qui ne se rencontrent pas dans les machines à soupapes : Ce sont les frottements des fluides aspirés et les perturbations qu'ils éprouvent dans leur mouvement.

La nécessité d'imprimer à ces appareils une vitesse angulaire beaucoup plus considérable que celle qu'indique la théorie, démontre que l'effet des résistances est bien supérieur à celui que donne le calcul par les principes ordinaires de la Mécanique. Il suffit, pour le prouver à l'évidence, de mettre dans l'équation (b) les données de l'expérience.

Comme $\frac{1}{2g}=0,051$, on aura pour l'expression de la hauteur absorbée par les résistances, l'expression

$$h'=0,051(w^2r^2-u^2)-\mathrm{H}.$$

Et en faisant le calcul pour chaque expérience, on dressera le tableau suivant :

EXPÉRIENCES.	1re	2e	3e	4e	5e
$0,051(w^2r^2-u^2)$	$77^m,87$	$91^m,06$	$104^m,20$	$44^m,60$	$68^m,52$
H	25, 64	25, 27	31, 90	10, 67	17, 04
h'	52, 23	65, 79	72, 30	33, 93	51, 48

On voit d'après ces calculs que les résistances occasionnent une perte de travail moteur, supérieure à deux et trois fois l'effet utile, suivant que les dépressions sont plus ou moins élevées.

Effet utile des ventilateurs Combes.

47. Les deux tableaux précédents nous donnent pour chacune des expériences la valeur de h' et de h'' : H est d'ailleurs connu. Il en résulte que pour obtenir l'effet utile, sans tenir compte des résistances des pièces mécaniques, il suffit de substituer les valeurs trouvées dans l'expression (d) ou

$$E = \frac{H}{H + h' + h''} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

On dressera ainsi le tableau suivant :

EXPÉRIENCES.	1re	2e	3e	4e	5e
H	25m,64	25m,27	31m,90	10m,67	17m,04
h'	52, 25	65, 79	72, 30	33, 95	51, 48
h''	38, 00	42, 12	50, 27	11, 35	17, 40
$H+h'+h''$	115, 87	133, 18	154, 47	55, 95	85, 92
Effet utile (E)	0, 221	0, 197	0, 206	0, 19	0, 20
Effet en chevaux.	ch 1, 00	1, 01	1, 44	0, 64	1, 27

On voit que les résultats de ces expériences concordent parfaitement, et que l'effet utile n'est que les 0,20 du travail moteur nécessaire pour imprimer le mouvement à l'air. En ajoutant à ce

(1) Si l'on ne tenait pas à déterminer isolément les diverses causes de perte de travail moteur, on arriverait plus simplement à ce résultat en substituant à h' et à h'' leurs valeurs tirées des équations (b) et (c'), on aurait ainsi pour l'expression de l'effet utile

$$E = \frac{H}{\frac{2w^2r^2 - 2uwr}{2g}} = \frac{H}{0{,}102wr(wr-u)}.$$

travail celui des résistances passives, telles que le frottement de l'axe du ventilateur, la raideur des courroies et le frottement de l'air extérieur sur les disques, l'effet utile n'atteindrait probablement pas 15 p. °/₀ de la force transmise par la machine.

Ce résultat n'étonnera pas, si l'on remarque que les conditions théoriques d'après lesquelles l'appareil a été établi ne se réalisent nullement.

Ainsi, au lieu que l'air entre sans choc dans les canaux et se meuve ensuite suivant le rayon, par l'effet de la vitesse relative u dans les canaux combinée avec la vitesse de rotation, cet air d'après les données de la première expérience, la seule pour laquelle j'aie effectué le calcul, serait frappé par l'origine des ailes du ventilateur et entraîné avec une vitesse absolue considérable dans une direction qui ferait un angle de 4° 52′ seulement avec celle du mouvement de rotation (1).

Ajoutons toutefois que ce ventilateur ne s'est pas probablement trouvé dans les conditions qui correspondent au maximum d'effet utile qu'il peut réaliser. Mais dans tous les cas, il est certain que les résultats qu'il fournirait ne seraient jamais très favorables, parce que le surcroit de résistance que produit la forme des canaux entraine non-seulement une grande perte de travail moteur ; mais il en résulte que la vitesse du courant d'air dans l'appareil est toujours fort inférieure à la vitesse de rotation, et que l'avantage d'opposer ces deux vitesses est largement compensé par la plus grande différence qui existe entr'elles. Cet effet prévu avec beaucoup de sagacité par M. Péclet, dans son Traité de la chaleur, sera mis hors de doute par nos calculs des expériences faites sur les ventilateurs ordinaires à force centrifuge.

On remarquera d'ailleurs que le rapport de la perte produite par la vitesse absolue de l'air sortant à l'effet utile augmente avec

---

(1) En nommant v' la vitesse absolue de l'air entrant dans les canaux, r_0 le rayon de la circonférence intérieure du ventilateur, et sachant que l'angle que l'orifice des ailes fait avec la tangente à cette circonférence est de 6° 39′, on aura pour la valeur de v'

$$v' = \sqrt{w^2 r^2 + u^2 - 2wru \cos 6° 39'} = 19^m,2$$

en désignant par δ l'angle que forment les deux vitesses v' et wr_0 on a la relation :

$$u^2 = w^2 r_0^2 + v'^2 - 2wr_0 v' \cos \delta$$

d'où l'on tire $\delta = 4° 52'$.

la dépression dans les galeries d'appel, mais que par compensation le rapport de la perte due aux résistances à l'effet obtenu croit lorsque la dépression diminue. C'est ce qui explique le peu de variation de l'effet utile théorique dans les expériences précédentes.

M. Glépin en mesurant à l'aide du frein la force appliquée au ventilateur a trouvé pour les trois premières expériences un effet utile de 39, 36 et 38 p. °/₀. Pour les deux dernières, cet effet n'est plus que de 25 et 27 °/₀. D'après les calculs qui précèdent, j'ai lieu de croire que M. Glépin s'est trompé dans l'évaluation du travail moteur, et qu'un examen plus attentif l'eut conduit à d'autres résultats.

Ventilateurs à ailes planes.

48. Depuis longtemps déjà on emploie en Allemagne et en Belgique les ventilateurs ordinaires à force centrifuge pour l'aérage de certaines parties de mines où une ventilation plus active est momentanément nécessaire. M. Letoret est je pense le premier, qui vers 1841, les ait appliqués à l'aérage d'une grande exploitation et on lui doit une disposition particulière de ces appareils, qui en facilite l'usage. Elle consiste à établir le ventilateur entre deux canaux en maçonnerie, qui en forment les joues et qui communiquent avec la mine (planche II, fig. 6). L'axe du ventilateur est horizontal et chacun des canaux est percé autour de cet axe, d'une ouverture, dont le diamètre est moindre que celui du ventilateur.

L'espace compris entre les deux canaux est entièrement ouvert, et l'air aspiré est rejeté dans l'atmosphère par l'intervalle qui les sépare. Pour éviter l'effet nuisible de la rencontre des courants qui arrivent par deux directions opposées un diaphragme lenticulaire en tôle, formé par la réunion de deux cones très évasés, se trouve établi au centre du ventilateur.

M. Letoret a en outre fait subir à ces ventilateurs une modification dont l'avantage est plus problématique, en articulant les ailes planes de manière qu'on puisse leur donner une inclinaison plus ou moins grande sur la direction du mouvement de rotation.

Effet utile des ventilateurs à ailes planes.
(Système de M. LETORET).

49. Lorsque les ailes sont dans la direction du rayon, on a pour

l'expression de la vitesse absolue de l'air sortant $\sqrt{w^2r^2+u^2}$ et pour la hauteur perdue la relation (*c*) § 41

$$h''=\frac{w^2r^2+u^2}{2g}.$$

Dans les ventilateurs du système de M. Letoret, les aîles sont inclinées sur le rayon ; mais comme la vitesse u est toujours très-faible, nous pourrons sans erreur sensible adopter l'expression précédente pour représenter la vitesse perdue.

On a d'un autre côté pour déterminer les résistances de l'air dans l'intérieur de l'appareil l'équation (*b*) § 41, ou

$$h'=\frac{w^2r^2-u^2}{2g}-H$$

En ajoutant ces deux équations, on trouve

$$H+h'+h''=2\frac{w^2r^2}{2g}=2\cdot0{,}051\,w^2r^2$$

Et par suite pour l'expression de l'effet utile théorique

$$E=\frac{H}{H+h'+h''}=\frac{H}{2\cdot0.051w^2r^2}$$

D'après ces principes calculons le résultat des expériences faites par M. Glépin sur différents ventilateurs.

Ventilateur du charbonnage de S^te^-Victoire, près de Mons.

Ce ventilateur établi comme nous l'avons indiqué ci-dessus présente les dimensions suivantes. (Mémoire de M. Glépin, page 76).

Longueur des aîles.	$0^m,77$
Largeur dans le sens parallèle à l'axe.	$0^m,93$
Longueur des bras à l'extrémité desquels se trouvent articulés les montants qui supportent les aîles. . .	$0^m,80$
Longueur de ces montants.	$0^m,90$
Nombre d'aîles.	4
Diamètre des ouvertures par lesquelles l'air de la mine arrive au ventilateur.	$1^m,60$

J'ai pris parmi les expériences rapportées page 77 les deux dernières où l'on avait mesuré directement la force appliquée.

Dans une de ces expériences, le ventilateur débitait $2^{m3},939$ sous une pression de $12^m,49$ d'air ou de $0^m,0152$ d'eau.

Le nombre de révolutions était de 113 par minute et l'angle formé par les bras et par les ailes du ventilateur était de 135°. L'effet utile réalisé était de $0^{ch},6$.

D'après ces données, on arrive aux résultats suivants :

Le rayon extérieur du ventilateur est égal à

$$\sqrt{(0,80)^2+(0,90)^2-2\cdot 0,8\cdot 0,9\cos 135^\circ}=1^m,571.$$

La vitesse angulaire $w=11^m,833$

d'où $0,051w^2r^2=17^m,617$

et $$E=\frac{12,49}{2\cdot 17,617}=0,35$$

La section des canaux étant supérieure à $4^{m^2},5$, on voit que la vitesse u est inférieure à $\frac{2,939}{4,5}$, ou à $0^m,66$, et que par suite $h''=\frac{w^2r^2+u^2}{2g}$ ainsi que $H+h'=\frac{w^2r^2-u^2}{2g}$ diffèrent très-peu de $\frac{w^2r^2}{2g}$. On peut donc sans erreur sensible prendre pour la hauteur perdue par la vitesse de l'air sortant l'expression $\frac{w^2r^2}{2g}$ $=17^m,617$ et pour la hauteur absorbée par les résistances

$$\frac{w^2r^2}{2g}-H=17^m,617-12^m,49=5^m,127.$$

Dans l'expérience suivante, le ventilateur aspirait $3^{m^3},01$ par seconde sous une pression de $15^m,45$ d'air ou de $0^m,0188$ d'eau, et réalisait ainsi un effet utile de $0^{ch},754$. Le nombre des révolutions était de 137 par minute et l'angle formé par les ailes et les bras qui les supportent de 105°.

D'après les données on trouve que $r=1^m,35$, $w=14^m,348$ et $0,051w^2r^2=19^m,121$; par conséquent $E=\frac{15,45}{2,19,121}=0,40$.

La pression nécessaire pour mouvoir l'air est ainsi employée :

Effet utile.	$15^m,45$
Résistance de l'air dans l'appareil.	$3^m,671$
Vitesse absolue.	$19^m,121$
Total	$38^m,242$

Pour obtenir l'effet utile pratique, il faudrait ajouter à cet effort le frottement de l'axe, la résistance des courroies et les vibrations des diverses parties du ventilateur. Pour un travail utile de $0^{ch},6$

à $0^{ch},754$, comme dans les expériences précédentes, qui correspond à une force théorique, nécessaire pour mouvoir l'air de $1^{ch},71$ et $1^{ch},88$, on pourrait admettre que le travail absorbé par les résistances inhérentes au mouvement de la machine est égal au travail théorique.

On aurait alors pour l'effet utile pratique la moitié des nombres trouvés plus haut ou 17, 5 et 20 p. %.

M. Glépin en mesurant à l'aide du frein le travail moteur transmis par la machine, a trouvé 16 et 18 p. %.

Ventilateur du charbonnage de l'Agrappe et Grisœil.

Les dimensions de cet appareil diffèrent peu de celles du ventilateur précédent. Dans une expérience (mémoire de M. Glépin, page 78) il débitait $3^{m3},948$ par seconde sous une pression de $16^{m},25$ d'air ou de $0^{m},02$ d'eau et réalisait un travail utile de $1^{ch},05$. Le nombre de révolutions était de 144 par minute et l'angle formé par les bras avec les aîles de 110°. Dans ces conditions j'évalue à $1^{m},35$ le rayon extérieur du ventilateur.

On obtient d'après ces données

$$0{,}051 w^2 r^2 = 21^{m},125$$

$$E = \frac{16{,}25}{2 \cdot 21{,}125} = 0{,}38.$$

En réduisant cet effet de moitié pour tenir compte des résistances passives de la machine on a pour l'effet utile pratique 19 p. %.

M. Glépin a trouvé 20 p. %.

Ventilateur du charbonnage de Marcinelles.

Ce ventilateur décrit page 304 du Bulletin de l'année 1843, est composé de 8 aîles en tôles, fixées à des rayons en fonte, et courbées à leurs extrémités suivant des portions de surface cylindrique.

Le rayon de la circonférence extérieure est de. .	$1^{m},023$
Celui de la circonférence intérieure et des ouvertures centrales de.	$0^{m},315$
La largeur des aîles est de.	$0^{m},60$
L'espace libre laissé entre les joues et les tranches latérales des aîles de.	$0^{m},025$

Ce ventilateur aspirait $2^{m3},91$ par seconde sous une pression de $8^{m},6$ d'air ou de $0^{m},01$ d'eau et réalisait un travail utile de $0^{ch},387$ en faisant 246 tours par minute.

De ces données on déduit $0{,}051w^2r^2 = 35^{m},322$

et $$E = \frac{8{,}6}{2 \cdot 35{,}322} = 0{,}12.$$

M. Glépin a trouvé pour l'effet utile pratique 10 p. °/₀.

Ce faible résultat est évidemment dû à la disposition défectueuse de l'appareil, dont l'un des vices principaux est l'étendue des aîles, comparée à la faible section des ouvertures par lesquelles arrive l'air de la mine. L'air doit se mouvoir dans ces ouvertures avec une vitesse de 8 à 9^{m}, et outre la perte due à la hauteur génératrice de cette vitesse, il doit se produire des perturbations très-nuisibles.

Le tableau suivant présente le résumé des quatre expériences rapportées ci-dessus :

EXPERIENCES.	1re	2e	3e	4e
Volume aspiré	$2^{m3},939$	$3^{m3},01$	$3^{m3},948$	$2^{m3},91$
Valeur de H	$12^{m},49$	$15^{m},45$	$16^{m},25$	$8^{m},6$
» » h'	$5^{m},127$	3, 671	4, 875	26, 722
» » h''	17, 617	19, 121	21, 125	35, 322
Effet utile théorique	0, 35	0, 40	0, 38	0, 12
» » pratique	0, 16	0, 18	0, 20	0, 10
» en chevaux	0, 6 ch	0, 754 ch	1, 05 ch	0, 387 ch

D'après ce tableau on voit, qu'à l'exception de la dernière expérience, la vitesse absolue de l'air sortant dans les ventilateurs à aîles planes n'est pas plus grande que dans les ventilateurs à aîles courbes, tandis que les résistances dans l'intérieur de l'appareil sont beaucoup moindres.

D'un autre côté la vitesse relative u étant très-faible et inférieure à 1^{m}, on voit que l'inclinaison donnée aux aîles pour annuler une partie de cette vitesse doit être plutôt nuisible qu'utile.

Ventilateurs à mouvement circulaire de translation.

THÉORIE.

50. Dans ces appareils l'aspiration est déterminée par la translation des canaux mobiles au milieu de l'air qu'il s'agit de déplacer. Pour nous faire une idée des phénomènes qui se produisent, nous admettrons en grande partie les principes théoriques que M. Combes a développés dans son supplément au Traité de l'aérage. Considérons un tuyau en mouvement dans la direction de son axe au milieu d'un fluide soumis à une pression constante. Les molécules fluides placés à l'intérieur du tuyau tendront à glisser avec une vitesse égale à celle avec laquelle les parois du tuyau se dérobent sous elles. Si v est la vitesse de translation, théoriquement la vitesse d'écoulement sera égale à v, et sera la même que si le tuyau immobile mettait en communication deux capacités où la différence de pression serait égale à $\frac{v^2}{2g} = h_1$.

Si, lorsque le tuyau est en repos, la pression de l'air au lieu d'être uniforme, est moindre d'une quantité H à l'entrée qu'à la sortie, la vitesse théorique u de l'air, pour une vitesse v de translation sera seulement produite par la hauteur $h_1 - H$ ou $\frac{v^2}{2g} - H$ et l'on aura :

$$u = \sqrt{v^2 - 2gH}$$

Enfin les résistances que l'air éprouvera dans son mouvement rendront cette vitesse moindre encore ; et si nous représentons par h' l'effet de ces résistances la vitesse d'écoulement sera seulement

$$u = \sqrt{v^2 - 2g(H + h')} = \sqrt{2g(h_1 - H - h')}.$$

d'un autre côté l'air possédant une vitesse égale à u et le tuyau une vitesse égale à v, l'air sortira avec une vitesse absolue $v - u$; représentant une hauteur perdue

$$h'' = \frac{(v-u)^2}{2g}$$

cette perte sera d'autant plus grande pour une vitesse donnée de l'air, que la dépression utile H sera elle-même plus grande et cette perte ne pourra jamais être anéantie.

D'après ces diverses relations, l'effet utile étant proportionnel à

H, l'effort total proportionnel à $H+h'+h''$, le rapport de ces deux quantités ou l'effet utile théorique sera égal à

$$E=\frac{H}{H+h'+h''}=\frac{2g\cdot H}{2v(v-u)}.$$

51. Dans les appareils de ventilation les canaux mobiles sont inclinés sur la direction du mouvement, ce qui exige une modification dans l'expression de la vitesse théorique produite. M. Combes partant du cas particulier, où le plan de l'orifice est perpendiculaire à la direction du mouvement, admet que l'effet de l'inclinaison est nul, et que pour une vitesse de translation donnée, la vitesse d'écoulement est constante quelle que soit l'inclinaison du tuyau. Il applique ensuite ce principe à la théorie de la vis, ou le plan de l'orifice, comme dans tous les autres appareils, est parallèle à la direction du mouvement : on en tirerait la conséquence que même dans ce cas, l'effet ne varie pas pour une même vitesse de translation, que l'axe du tuyau soit perpendiculaire ou parallèle à la direction de cette vitesse, ce qui me paraît inadmissible.

Je pense, au contraire, d'après les principes posés, que la vitesse théorique de l'air est égale à la vitesse avec laquelle la surface sur laquelle il repose tend à se dérober sous lui : si le tuyau fait avec la direction du mouvement un angle a, la vitesse de translation parallèle à l'axe du tuyau sera $v\cos a$ et la hauteur théorique correspondante

$$h_t=\frac{v^2\cos^2 a}{2g}.$$

Nous devrons pour obtenir la vitesse réelle de l'air, retrancher comme ci-dessus de cette hauteur la dépression H et l'effet des résistances h', ce qui nous donnera

$$u=\sqrt{v^2\cos^2 a-2g(H+h')}$$

Enfin l'air possédant une vitesse relative u qui fait un angle a avec la direction du mouvement on aura pour l'expression de la vitesse perdue

$$\sqrt{v^2+u^2-2uv\cos a};$$

et

$$h''=\frac{v^2+u^2-2uv\cos a}{2g}.$$

Et l'effet utile théorique sera exprimé par

$$E=\frac{H}{H+h'+h''}=\frac{2gH}{v^2(\cos^2 a+1)-2uv\cos a}\ (f).$$

Remarquons que la vitesse théorique de l'air étant donnée par la relation

$$u=\sqrt{v^2\cos^2 a-2g\mathrm{H}}$$

l'air cesserait d'être aspiré par le tuyau si l'on avait $\frac{v^2\cos^2 a}{2g}=\mathrm{H}$. Dans ce cas, le tuyau ferait l'office d'obturateur en empêchant l'air extérieur de rentrer. Pour qu'il y ait aspiration il faut que la valeur de v dépasse celle qui est donnée par cette équation. Dans le cas où H serait plus grand que $\frac{v^2\cos_2 a}{2g}$, l'air extérieur rentrerait dans la capacité où existe la dépression H.

On peut voir aussi que pour un effet donné, le mouvement de translation devra être d'autant plus rapide que cos a aura une valeur plus petite. Il en résultera que u sera non-seulement moindre par rapport à v, ce qui contribuera à augmenter la vitesse absolue de l'air sortant, mais aussi qu'au lieu d'être opposées, les deux vitesses u et v formeront entre elles un angle et que leur résultante sera d'autant plus grande que cet angle sera lui-même plus petit, ou que a sera plus grand.

Il convient donc de rendre l'angle a aussi petit que le permet la bonne disposition de l'appareil.

52. Parmi les divers ventilateurs à mouvement de translation, j'examinerai seulement les trois suivants :

1° La vis pneumatique de M. Motte ;

2° Le ventilateur à aîles plano-coniques que je propose d'employer ;

3° Le ventilateur à aîles de moulin dont l'idée est due à M. Lesoinne, professeur de métallurgie à l'université de Liége.

Vis pneumatiques.

Théorie.

53. Les vis pneumatiques peuvent être considérées comme formées par une suite de canaux hélicoïdes, dont l'inclinaison sur la direction du mouvement varie avec la distance à l'axe.

Nommons w la vitesse angulaire du mouvement de rotation, p le pas de la vis et r un rayon quelconque, la longueur de l'hélice correspondante sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont $2\pi r$ serait la base et p la hauteur, égale par conséquent à $\sqrt{4\pi^2r^2+p^2}$. L'in-

clinaison de l'hélice sur la base ou sur la direction du mouvement sera donnée par la relation

$$\cos a = \frac{2\pi r}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}}$$

et comme wr est la vitesse de translation, on aura pour la vitesse relative théorique

$$u = \sqrt{w^2 r^2 \cos^2 a - 2g\mathrm{H}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 w^2 r^4}{4\pi^2 r^2 + p^2} - 2g\mathrm{H}} \quad (1)$$

La section du canal hélicoïde, compris entre deux surfaces cylindriques consécutives, de rayons r et $r+dr$ sera égale à la surface annulaire $2\pi r dr$, multipliée par le sinus de l'angle que forment les hélices avec cette surface, soit $2\pi r dr \sin a$: ou bien, cette section est égale à la projection sur un plan perpendiculaire à l'hélice, de la surface rectangulaire qui sépare les génératrices des deux cylindres situées sur le même rayon. Soit

$$p dr \cos a = \frac{2\pi r dr p}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}}$$

Par conséquent l'on aura pour l'équation différentielle du volume aspiré

$$\frac{2\pi r dr \cdot p}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}} \sqrt{\frac{4\pi^2 w^2 r^4}{4\pi^2 r^2 + p^2} - 2g\mathrm{H}};$$

mais dans les applications pratiques, nous pourrons, sans trop grande erreur, prendre à l'exemple de M. Combes, au lieu d'un rayon variable, le rayon de l'hélice moyenne ; et en nommant r_0 et r_1 les rayons du noyau et de l'enveloppe et r le rayon moyen $\frac{r_0 + r_1}{2}$ on aura pour la section du canal

$$\frac{h(r - r_0) 2\pi r}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}}$$

La vitesse relative u sera exprimée comme ci-dessus. Une conséquence importante de la théorie précédente, que M. Combes a développée dans le supplément au traité de l'aérage, c'est que le noyau doit avoir un diamètre tel, que la vitesse imprimée à la

(1) M. Combes en supposant nulle l'influence de l'inclinaison des canaux trouve pour cette vitesse $u = \sqrt{w^2 r^2 - 2g\mathrm{H}}$

première hélice soit au moins égale à $\sqrt{2gH}$, autrement il s'établit deux courants en sens inverse, l'un près du noyau, l'autre près de l'enveloppe. Le plus petit rayon doit donc être égal ou supérieur à celui que donne la relation

$$\sqrt{\frac{4\pi^2w^2r^4}{4\pi^2r^2+p^2}}-2gH=0$$

ou

$$\frac{4\pi^2w^2r^4}{4\pi^2r^2+p^2}=2gH. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

équation du quatrième degré facile à résoudre.

Aucune des vis établies en Belgique ne satisfait à cette condition; mais le calcul des expériences faites sur ces appareils nous prouvera que l'effet d'un trop faible noyau, quoique nuisible, l'est moins que ne le ferait supposer la théorie précédente.

Effet utile des vis pneumatiques, actuellement en activité.

54. Les vis ne se trouvant pas dans des conditions théoriques convenables, les expériences dont elles ont été l'objet, tout en nous fournissant des indications utiles, ne pourront toutefois nous donner des résultats bien positifs.

Vis pneumatique du charbonnage de Sauwartan sur Dour.

55. L'appareil se compose de deux cloisons hélicoïdes, construites chacune sur un demi pas de vis de $0^m,73$. Le diamètre de l'axe est de $0^m,046$, le diamètre de la vis de $1^m,40$, et celui du cylindre enveloppe de $1^m,406$. (Mémoire de M. Glépin, page 279 du Bulletin du Musée de l'Industrie, année 1842).

Dans une expérience, la vis débitait $3^{m^3},908$ d'air par seconde, sous un excès de pression de l'air extérieur de $16^m,87$ d'air, ou de $0^m,0216$ d'eau : Le nombre de révolutions était de 450 par minute.

D'après ces données, $w=47^m,123$; les angles des hélices extrêmes avec le plan du mouvement sont de $84°,21'$ et de $18°,22'$; le rayon *de partage* ou celui où l'impulsion de la vis fait équilibre à la pression extérieure, calculé d'après l'équation (g) est égal à $0^m,437$ auquel correspond un angle d'inclinaison de l'hélice de 28°.

Si on considère, comme seule efficace pour l'aspiration, la partie de la vis qui est au-delà de ce rayon, cette partie aura une largeur dans le sens du rayon de $0^m,70-0^m,437=0^m,263$ et le rayon

moyen de cette partie sera de $0^m,565$, auquel correspond un angle d'inclinaison de l'hélice, $a = 22°,13'53''$. La section de la partie utile de la vis sera égale à $p \cos a$. $0^m,263 = 1^m,3517 \cdot 0,263 = 0^{m2},3555$.

La vitesse théorique correspondante serait de $u = \sqrt{w^2 r^2 \cos^2 a - 2gH} = 17^m$ et le volume théorique serait de $6^{m3},0435$.

En divisant le volume extrait par la section utile on aurait

$$u = \frac{3,908}{0,3555} = 11^m$$

et en faisant abstraction de l'effet de la section nuisible, on aurait pour l'effet utile théorique (f)

$$E = \frac{2gH}{w^2 r^2 (\cos^2 a + 1) - 2uwr \cos a} = \frac{331}{615,2 \cdot 717,7 - 22 \cdot 241,83} = 0,373.$$

Mais ce résultat ne représente pas l'état réel des choses, parce qu'il doit s'établir près de l'axe un courant d'air, qui est ensuite aspiré vers la circonférence, de sorte que le volume réellement débité par la section utile de la vis nous est inconnu.

La théorie indique que toute la partie de la vis, comprise dans la circonférence de $0^m,437$ de rayon, ne doit pas produire d'aspiration, mais doit au contraire laisser pénétrer l'air extérieur dans les conduits d'appel.

Mais l'expérience prouve que le courant rentrant est moindre que ne l'exprime le calcul théorique.

Le rayon de l'axe étant de $0^m,023$, la largeur de la partie nuisible serait de $0^m,437 - 0^m,023 = 0^m,414$ et son rayon moyen de $0^m,23$.

L'angle de l'hélice correspondant à ce rayon serait de $45°,17'34''$ et la hauteur de la section de $1^m,027$. La section de la partie nuisible serait donc très-approximativement de $0^m,425$ et l'air extérieur tendant à rentrer avec la vitesse

$$u = \sqrt{2gH - w^2 r^2 \cos^2 a} = 16^m,5.$$

le volume rentrant serait de $7^{m3},012$ et comme le volume théorique aspiré est seulement de $6^{m3},04$ on voit que ces résultats sont en contradiction avec les données de l'expérience.

Il faut donc nécessairement que le mouvement imprimé à l'air dans la section qui est au-delà du rayon de partage, secondé par la pression qu'exerce dans cette direction la force centrifuge, ait

pour effet d'entraîner une certaine quantité d'air de la partie nuisible, et de rendre ainsi le courant rentrant bien moindre que ne l'indique la théorie.

Dans l'impossibilité de déterminer à quel point s'arrête la section utile, on voit que nos calculs fondés sur la supposition que les effets de la section nuisible théorique se neutralisent, sont entièrement hypothétiques ; mais d'un autre côté la méthode que nous avons employée s'appliquerait facilement au cas où la vis serait disposée de manière à ce que toute la section agît efficacement pour produire l'aspiration.

M. Glépin avait évalué l'effet utile de cette vis à 33 p. °/₀, en répétant l'expérience avec le frein il a trouvé de 24 à 26 p. °/₀. Nous avons trouvé pour l'effet utile théorique 37 p. °/₀, et il est permis de supposer que s'il n'y avait pas aspiration de l'air extérieur, cet effet utile serait supérieur à 40 p. °/₀.

Les molécules fluides animées de la vitesse relative u sur les cloisons et emportées dans le mouvement de rotation avec une vitesse wr, décrivent dans l'espace des hélices, inclinées en sens inverse de celles des cloisons. Si la vitesse relative le long de l'enveloppe était égale à la vitesse théorique, l'hélice décrite par le mouvement de l'air sur cette enveloppe, ferait un angle de 45°, avec le plan perpendiculaire à l'axe.

Vis de Monceau Fontaine (près de Charleroy).

56. Cette vis de 0ᵐ,80 de diamètre se compose de deux cloisons hélicoïdes dont le demi pas est égal au rayon, et qui sont fixées sur un axe en fer de 0ᵐ,029 de diamètre.

Des expériences ont été faites sur cet appareil par M. Gonot et M. Glépin. Les premières se trouvent rapportées pages 226 et 227 du tome 1ᵉʳ des Annales des travaux publics, les secondes, page 281 du Bulletin de l'année 1843.

Ces expériences conduisent aux résultats suivants :

EXPERIENCES.	N° 1.	N° 2.
Volume aspiré	1ᵐ³,79	2ᵐ³,152
Dépression en air	5ᵐ,25	5ᵐ,04
« en eau	0, 0065	0, 0065
Nombre de tours par 1′	600,	750,
Vitesse anglaire	62, 83	78, 54
Rayon de partage	0, 195	0, 161

Delà on déduit par des calculs semblables à ceux du § précédent :

EXPÉRIENCES.	N° 1.		N° 2.	
	Section utile.	Section nuisibl.	Section utile.	Section nuisibl
Rayon moyen	0m,2963	0m,104	0m,2804	0m,0877
Angle (a) correspondant	25°,44'24"	50°,55'55"	24°,25'18"	55°,54'49"
Vitesse (u) correspondante	13m,8	8m,62	17m,41	9m,14
Largeur ($r_1 - r_0$) de la section	0, 207	0, 178	0, 239	0, 1464
Hauteur (p cos a)	0, 7351	0, 6503	0, 7285	0, 4558
Surface	0m²,1522	0m²,1157	0m²,1741	0m²,0664
Volume théorique	2m³,10	1m³	3m³,033	0m³,607

Dans les expériences de M. Gonot, le volume extrait est de $1^{m^3},79$ tandis que le volume théorique serait seulement de $2^{m^3},10 - 1^{m^3} = 1^{m^3},10$, ce qui nous fait voir qu'il se produit ici un phénomène analogue à celui de l'exemple précédent.

Si on supposait que l'effet de la section nuisible fut nul, la vitesse relative dans la section utile serait de $\frac{1,79}{0,152} = 11^m,77$ et l'on aurait pour l'effet utile théorique calculé d'après l'équation (f) :

$$E = \frac{102,21}{293,02 + 347,5 - 2 \cdot 11,77 \times 17,12} = 0,43.$$

M. Gonot évalue l'effet utile pratique à 0,29, ce qui, vu la grande vitesse de la machine et le faible travail produit, suppose un effet utile théorique encore supérieur au précédent.

Dans les expériences de M. Glépin, le volume aspiré est de $2^{m3},152$ et le volume théorique de $3^{m^3},033 - 0^{m^3},607 - 2^{m^3}426$. On voit qu'ici les résultats de l'observation se rapprochent davantage de ceux de la théorie, ce que l'on doit attribuer à la faible section de la partie nuisible.

Si on admet comme précédemment que l'effet de la section nuisible soit nul, on aura pour la vitesse relative

$u = \frac{2,152}{0,174} = 12^m,36$ et pour l'effet utile théorique E=0,25.

Si l'on suppose d'un autre côté, que la section utile doive extraire

outre le volume donné par l'expérience une quantité égale à $0^{m3},607$ qui rentre par la section nuisible, alors on aura pour la vitesse relative $u = 15^{m},85$, et pour l'effet utile théorique de la section efficace 0,39.

L'expérience donne pour l'effet utile pratique 24 à 25 p. °/₀.

Vis du Charbonnage de Trieukaisin.

57. Le diamètre de la vis est de 3^{m}, le pas de $1^{m},40$ et je suppose le diamètre de l'axe de $0^{m},08$.

Dans une expérience rapportée page 303 du Bulletin de 1843, la vis faisant 189 tours par minute aspirait un volume de $6^{m3},458$ en produisant une dépression de $0^{m},021$ d'eau ou de $17^{m},846$ d'air, à la température et sous la pression de l'expérience.

De ces données on déduit : vitesse angulaire $19^{m},79$, rayon de partage 1^{m}.

	Section utile.	Section nuisible.
Rayon moyen	$1^{m},25$	$0^{m},52$
Angle (a) correspondant	10°,6′25″	23°,11′43″
Vitesse (u) correspondante	$15^{m},58$	$16^{m},1$
Largeur de la section	$0^{m},50$	0, 96
Hauteur ($p \cos a$)	$1^{m},378$	1, 286
Surface	$0^{m2},689$	$1^{m2},234$
Volume théorique	$10^{m3},90$	$19^{m3},74$

On voit qu'ici les résultats du calcul sont en opposition manifeste avec ceux de l'expérience et que l'air est entraîné avec plus de force que ne le ferait supposer la théorie. Si nous appliquons à ce cas le mode de calcul déjà employé, nous aurons pour la vitesse relative, $u = 9^{m},37$ et pour l'effet utile théorique

$$E = 0,457 ;$$

l'effet utile pratique a été trouvé de 23 p. °/₀.

Les données des expériences que nous avons soumises au calcul étant insuffisantes pour permettre de comparer, avec quelque certitude, les résultats théoriques obtenus, avec ceux des appareils à force centrifuge, nous devons nous borner à l'appréciation des résultats pratiques.

Dans le ventilateur ordinaire à force centrifuge, qui est plus avantageux que le ventilateur Combes, l'effet utile est d'environ 20 p. °/₀ tandis que dans la vis cet effet varie de 23 à 30 p. °/₀.

Nul doute d'ailleurs, que par une disposition plus convenable on ne puisse obtenir des résultats plus favorables encore.

Avantages de la vis pneumatique comparée aux ventilateurs à force centrifuge.

58. J'attribue en partie la supériorité de la vis, sur les ventilateurs à force centrifuge aux divers degrés de vitesse des canaux mobiles qui dans ces machines doivent exercer une influence favorable.

Dans les ventilateurs, la vitesse de l'origine des canaux mobiles est la même pour tous : lorsque cette vitesse est celle qui correspond au maximum d'effet utile, les résultats doivent être bien plus avantageux, que lorsque cette condition ne se réalise pas. Mais outre que toutes les circonstances du mouvement de l'air, sont trop peu connues, pour qu'on puisse installer ces appareils dans la prévision d'obtenir ce résultat ; les exigences de la ventilation par suite de la température, du travail dans la mine, etc. sont si variables, qu'un ventilateur, fût-il même établi dans les conditions convenables ne pourrait y être maintenu longtemps. D'ailleurs, même dans les circonstances les plus favorables, l'air est toujours frappé violemment par les ailes, ce qui donne lieu à des perturbations très-nuisibles : et dans tous les cas la vitesse absolue de l'air sortant est toujours très-considérable.

Dans les ventilateurs à mouvement circulaire de translation, les degrés de vitesse de l'origine des canaux sont très-variés, et il s'en trouve probablement toujours quelques-uns qui correspondent au maximum d'effet utile. Il doit en résulter que le mouvement de l'air ; placé dans ces conditions, exerce sur les particules fluides plus éloignées ou plus rapprochées de l'axe, une espèce de traction qui contribue à les entraîner dans les canaux.

La différence que nous avons observée entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie, quant à l'influence de la section nuisible, me porterait aussi à croire, qu'une partie assez notable de l'air aspiré, s'engage entre les cloisons moins éloignées de l'axe que le rayon de partage, et que cet air est ensuite entraîné par l'effet du mouvement de rotation dans la section utile, les fluides ne pouvant pénétrer directement dans les canaux éloignés de l'axe avec autant de facilité, ni les remplir entièrement à cause de la grande vitesse de l'origine de ces canaux.

L'effet de la vis serait ainsi dû à un mouvement de translation combiné avec l'action de la force centrifuge.

Défectuosités de la vis.

59. Tout en reconnaissant à la vis une supériorité sur les ventilateurs à force centrifuge, je ne pense pas que cette forme soit la plus convenable et la plus rationnelle pour les appareils à mouvement de translation. Les hélices successives qui composent la cloison de la vis forment près de l'axe un angle presque droit, avec la direction du mouvement, tandis que cet angle va en diminuant en s'approchant du contour extérieur. Ainsi pour la vis de Trieukaisin l'inclinaison de l'hélice extrême est seulement de 8°,27′.

Cette disposition me paraît présenter plusieurs inconvénients :

1° La vitesse relative étant donnée par la relation $\sqrt{w^2r^2\cos^2\alpha - 2gH}$, cette vitesse diminue lorsqu'on s'approche de l'axe, non seulement parce que le rayon est moindre, mais aussi parce que l'angle α augmente. Ces deux causes se réunissent donc pour favoriser la rentrée de l'air extérieur dans la section qui avoisine l'axe.

2° L'inclinaison des hélices sur la direction du mouvement étant très considérable jusqu'à une certaine distance de l'axe, la vitesse absolue de l'air sortant est augmentée par cette circonstance.

3° Lorsque la vis doit avoir un grand diamètre, l'inclinaison des hélices extrêmes peut devenir trop faible.

4° Enfin il est fort difficile d'exécuter en tôle des surfaces gauches, cette matière ne se prêtant convenablement qu'à former des surfaces développables.

Aucun de ces inconvénients ne se retrouve dans les ventilateurs à aîles plano-coniques.

Ventilateurs à aîles plano-coniques.

60. Ce ventilateur a quelque ressemblance avec les petits appareils que l'on emploie dans les cabarets. Il se compose d'un certain nombre d'aîles planes, terminées par des portions peu étendues de surfaces coniques propres à diriger l'air sortant en sens inverse du mouvement de rotation. L'enveloppe est cylindrique comme dans la vis, mais le noyau est formé d'un tronc de cône dont le sommet se trouve du côté de l'entrée de l'air, c'est-à-dire, que la section des canaux va en diminuant à partir de l'origine.

Pour simplifier la théorie, considérons d'abord un ventilateur à aîles planes contenues entre deux surfaces cylindriques. Pour en

faire un ventilateur plano-conique il suffira de courber un peu l'extrémité des aîles et d'évider le noyau à la partie inférieure ; l'on pourra d'ailleurs, sans inconvénient, admettre pour le second les résultats théoriques applicables au premier.

Le ventilateur à aîles planes diffère de la vis en ce que dans ce ventilateur, les aîles sont formées d'une suite d'hélices toutes de même inclinaison et de pas différent, tandis que dans la vis le pas reste constant et l'inclinaison varie. Les aîles doivent être construites de manière que l'extrémité de l'une et l'origine de la suivante soient dans le même plan passant par l'axe. Elles affectent ainsi la forme d'un trapèze curviligne.

Il résulte de cette disposition que la couronne comprise entre les deux surfaces cylindriques est égale à la projection de la surface des aîles sur un plan perpendiculaire à l'axe. Si on désigne par a l'angle d'inclinaison des aîles, le pas p d'une hélice quelconque correspondant au rayon r, sera donné par la relation $p = 2\pi r \operatorname{tang} a$.

En substituant à r la valeur du rayon de l'enveloppe, on aura la hauteur de cette enveloppe pour un ventilateur composé d'une seule aîle. Pour deux aîles cette hauteur pourra être réduite de moitié et ainsi de suite; de sorte que si n désigne le nombre d'aîles, la hauteur du ventilateur à une distance r de l'axe sera égale à

$$\frac{2\pi r \operatorname{tang} a}{n}.$$

L'étendue des canaux étant aussi proportionnelle au rayon, sera bien moindre que dans la vis lorsqu'on s'approchera de l'axe. Ainsi dans la vis de Sauwartan, l'inclinaison de la première hélice est de 84°21′ et sa longueur développée est de $1^{m},467$. Dans un ventilateur où l'angle constant d'inclinaison serait de 18°22′, celui de l'hélice extrême de la vis, cette longueur serait réduite à $0^{m},153$.

On voit donc que le mouvement de l'air près de l'axe est favorisé non seulement par l'effet d'une inclinaison moins grande, mais aussi parce que l'espace à parcourir est moins étendu ; pour les parties éloignées de l'axe on peut conserver l'inclinaison jugée la plus favorable.

Théorie du ventilateur plano-conique.

61. Appelons comme précédemment :

w la vitesse angulaire du ventilateur ;

r_0 et r_1 les rayons du noyau et de l'enveloppe ;

H la hauteur de la colonne d'air qui mesure l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure ;

a, l'angle d'inclinaison des aîles.

La section totale des canaux sera égale à la surface de la couronne comprise entre les deux cylindres, projetée sur un plan faisant avec cette surface un angle de $90°-a$, ou égale à

$$\pi(r_1^2-r_0^2)\sin a. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nous aurons d'un autre côté pour la vitesse théorique à une distance r de l'axe

$$u=\sqrt{w^2r^2\cos^2 a-2g\mathrm{H}}$$

et comme l'élément de la section est égale à

$$2\pi r dr \sin a$$

le volume théorique extrait sera donné par l'intégrale

$$r_0 \int^{r_1} 2\pi r dr \sin a \sqrt{w^2r^2\cos^2 a-g\mathrm{H}},$$

en la résolvant et supposant $w\cos a=w'$, on obtient

$$\mathrm{V}=\frac{2\pi\sin a}{3w'^2}\left\{(w'^2r_1^2-2g\mathrm{H})^{\frac{3}{2}}-(w'^2r_0^2-2g\mathrm{H})^{\frac{3}{2}}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

L'expérience seule peut prononcer sur l'inclinaison la plus favorable à donner aux cloisons et sur le nombre d'aîles qu'il convient d'adopter. Je me propose à cet effet de faire construire un ventilateur de ce système et de le placer dans des conditions assez variées pour obtenir sur ces problèmes et sur l'efficacité de l'appareil les notions pratiques indispensables.

Théoriquement, en augmentant le nombre d'aîles on diminue les résistances dues au frottement. La surface totale des aîles est constante, quel que soit leur nombre, et toujours égale à $\frac{\pi(r_1^2-r_0^2)^2}{\cos a}$; les aîles sont en contact avec l'air, sur chacune de leurs faces, ce

---

(1) On a pour l'élément de la section l'expression $2\pi r dr \sin a$ et pour la section entière $r_0 \int^{r_1} 2\pi r dr \sin a = \pi \sin a (r_1^2-r_0^2)$

qui donne pour la surface invariable de contact deux fois cette quantité. Mais la hauteur du noyau et du cylindre enveloppe est en raison inverse du nombre d'ailes ; par conséquent l'étendue du parcours de l'air contre ces parties, et par suite le frottement qui en résulte, suivront la même proportion.

Supposons que l'on ait construit un ventilateur composé de 6 ailes, inclinées de 10°, et que sous un excès de pression de $30^{m},5$ d'air ou de $0^{m},04$ d'eau, il fasse 600 tours par minute.

Nous aurons pour la vitesse angulaire $w=62^{m},83$ et pour la vitesse angulaire suivant l'inclinaison $w\cos a=w'=61^{m},887$. Si la partie supérieure du noyau a $0^{m},40$ de rayon, on aura à cette distance pour la vitesse relative, $u=\sqrt{w'^2r_0^2-2g\Pi}=\sqrt{14,26}$, qui indique que ce rayon est plus que suffisant pour empêcher la rentrée de l'air. Si l'on suppose le rayon de l'enveloppe de $0^{m},80$ on trouvera pour le volume théorique aspiré, d'après la formule (m)

$$V=7^{m3},565.$$

Si on suppose que le rayon croisse de $0^{m},10$ en $0^{m},10$, on aura pour le volume débité par chaque section partielle

section comprise en $0^{m},40$ et $0^{m},50$ de rayon. . . .		$0^{m3},64$
« «	$0^{m},50$ et $0^{m},60$	1, 423
« «	$0^{m},60$ et $0^{m},70$	2, 274
« «	$0^{m},70$ et $0^{m},80$	3, 228
	Total.	$7^{m3},565$

En divisant le volume par la section totale, on a la vitesse moyenne théorique. On aura la vitesse moyenne pratique en divisant par cette même section le volume réellement aspiré. On pourra admettre, avec une exactitude suffisante, que la différence de ces deux vitesses est due aux résistances que l'air éprouve dans son mouvement, et si on représente la première par v et la seconde par u, on aura pour l'expression de ces résistances :

$$h'=\frac{v^2-u^2}{2g}$$

Appelons x le rayon auquel correspond la vitesse théorique v, on aura la relation

$$v^2=w'^2x^2-2g\Pi.$$

On pourra, je pense, admettre avec une approximation suffisante, que la vitesse absolue moyenne de l'air sortant est égale à $wx-u$ correspondant à une hauteur

$$h''=\frac{(wx-u)^2}{2g}$$

et comme d'après la relation précédente $w^2x^2 = \dfrac{v^2+2gH}{\cos^2 a}$,

on aura $$h'' = \frac{v^2+2gH}{\cos^2 a \cdot 2g} + \frac{u^2}{2g} - \frac{2u\sqrt{v^2+2gH}}{2g\cos a}$$

et pour l'expression de l'effet utile :

$$E = \frac{H}{H+h'+h''} =$$

$$= \frac{2gH\cos^2 a}{(1+\cos^2 a)(v^2+2gH) - 2u\cos a\sqrt{v^2+2gH}} \quad (n)$$

On voit qu'à l'aide de cette formule on pourra calculer très-approximativement l'effet utile théorique, lorsqu'on aura déterminé v et u comme nous venons de l'indiquer.

62. La forme conique que nous proposons de donner au noyau du ventilateur, a pour objet de favoriser l'introduction de l'air aspiré dans les canaux : les parties rapprochées de l'axe, étant animées d'une moindre vitesse, l'air peut y pénétrer plus facilement, et par l'effet du mouvement de rotation, il est entraîné vers les orifices de sortie avec les particules fluides, qui sont entrées dans les canaux à une plus grande distance de l'axe. D'un autre côté, en donnant à la base extérieure du noyau un diamètre suffisant, on évite l'établissement de doubles courants dans l'intérieur de l'appareil.

En courbant l'extrémité des aîles suivant une portion de surface conique, non seulement on oppose la vitesse relative de sortie au mouvement de rotation, mais par le léger rétrécissement que cette forme occasionne, on rend la vitesse dans l'orifice un peu plus grande que la vitesse relative dans les canaux.

Pour empêcher le mouvement giratoire des fluides aspirés dans le conduit d'appel, il serait convenable, je pense, d'établir en avant du ventilateur à l'exemple de M. Lesoinne, une cloison formée de deux plans de $0^m,10$ à $0^m,20$ de hauteur, rectangulaires entre eux et passant par l'axe. Les circonstances du mouvement de l'air sont trop variables et trop peu connues pour que l'on puisse soumettre au calcul la forme qu'il faudrait donner aux cloisons pour que l'air pénétrât sans choc dans les canaux mobiles de l'appareil ; mais on devrait laisser un certain intervalle entre l'origine de ces canaux et la tranche des cloisons pour éviter les violentes compressions

qui pourraient avoir lieu par le mouvement rapide de l'une des parties, si cet intervalle était trop faible. (1)

Ventilateur à ailes de moulins à vent.

63. Ce ventilateur, quoique peu connu, date cependant déjà de 1837 : Il est par conséquent antérieur à tous ceux que nous avons examinés, et me paraît devoir donner des résultats plus favorables que ceux actuellement en usage.

M. Lesoinne a été guidé dans sa construction par cette idée, que la forme la plus convenable pour un récepteur de la force du vent, serait aussi la plus convenable pour un appareil d'aspiration.

M. Combes a renversé la turbine pour en faire un ventilateur à ailes courbes : M. Lesoinne a adopté pour son appareil la forme indiquée par Smeaton pour les ailes des moulins à vent. Il a en outre placé dans le canal d'aspiration un diaphragme pour empêcher le mouvement giratoire de l'air.

Le ventilateur à ailes de moulin est maintenant fréquemment employé pour aérer des parties de mines peu étendues, comme des tailles ou des galeries isolées, où il faut momentanément activer la ventilation. Dans ces circonstances, il paraît avoir donné des résultats très-satisfaisants ; mais les dépressions nécessaires étaient toujours très-faibles, et comme il n'a jamais servi à l'aérage d'une grande mine, il n'a fait l'objet d'aucune expérience rigoureuse.

Les ventilateurs qui ont été construits ont de six à dix ailes ; les diamètres du noyau et de l'enveloppe sont respectivement de $0^m,10$ à $0^m,15$ et de $0^m,85$ à $0^m,90$.

Les ailes sont construites en tôle et ont à-peu-près l'inclinaison que Smeaton a reconnue la plus favorable pour les moulins à vent, ou environ 18° à 19° près du noyau, et 7° à 8° près de l'enveloppe.

L'inclinaison va en augmentant à mesure qu'on se rapproche de l'axe comme dans la vis, mais dans une proportion beaucoup moindre. Il en résulte, que si les inductions que j'ai tirées des faits observés, sont sanctionnées par l'expérience, le ventilateur à ailes de moulin est intermédiaire pour les avantages et les inconvénients entre la vis pneumatique et le ventilateur plano-conique ; il diffère cependant beaucoup moins de ce dernier que de la vis, et il doit

(1) Un ventilateur à mouvement de translation et à ailes planes se trouve établi près de Charleroi : dans une expérience faite par M. Glépin, il utilisait seulement 5 % du travail moteur. Mais il est tellement en dehors des conditions rationnelles d'un bon appareil de ventilation que ce résultat ne doit pas étonner.

donner des résultats plus favorables que tous les ventilateurs qui ont été jusqu'ici mis en usage.

Je me propose d'ailleurs de soumettre cet appareil à des expériences comparatives de nature à fournir les indications pratiques nécessaires.

Conclusions.

64. D'après l'ensemble des considérations que j'ai développées, lorsqu'il faut extraire de grands volumes d'air, sous un excès de pression marqué par une colonne d'eau supérieure à $0^m,01$ ou $0^m,015$, on peut ranger les machines d'aérage dans l'ordre suivant :

1° Machine à cloches plongeantes (M. de Vaux) ;

2° Machine à pistons ;

3° Ventilateur à ailes plano-coniques ;

4° Ventilateur à ailes de moulin (M. Lesoinne) ;

5° Vis pneumatique (M. Motte) ;

6° Ventilateur à force centrifuge et à ailes planes (M. Letoret) ;

7° Ventilateur à force centrifuge et à ailes courbes (M. Combes).

Je crois avoir établi d'une manière incontestable la supériorité des machines à soupapes bien construites et principalement des machines à cloches, sur toutes les autres pour l'aérage des grandes mines, dans les circonstances ordinaires où l'on est forcé d'avoir recours à des moteurs, c'est-à-dire lorsque l'appel de l'air nécessite une grande hauteur motrice.

Lorsqu'il ne s'agit que d'aérer des parties de mines restreintes, des lieux habités etc., et que par suite la dépression à produire est peu considérable ; ou lorsqu'on est gêné par l'espace dont on peut disposer pour établir la machine, on doit employer les ventilateurs de préférence aux machines à soupapes.

Les ventilateurs sur lesquels nous possédons des indications pratiques seraient, d'après ce qui précède, rangés dans l'ordre suivant :

1° Vis pneumatique ;

2° Ventilateur à force centrifuge et à ailes planes ;

3° Ventilateur à ailes courbes :

Mais les considérations que j'ai exposées, sont de nature, je pense, à rendre fort probable le succès des ventilateurs à ailes plano-coniques et à ailes de moulin, et à faire adopter l'ordre, où j'ai rangé ces divers appareils comme celui des avantages relatifs qu'ils présentent.

LÉGENDE EXPLICATIVE DES PLANCHES I ET II.

PLANCHE I.

Élévation de la machine à pistons de l'Espérance.

A Cylindre à vapeur.

BB Boîte de distribution de la vapeur ; le tiroir est mis en mouvement par l'action des taquets *bb* de la tige F sur le levier E.

C Tige du piston liée au parallélogramme au moyen d'une fourchette qui embrasse la traverse de l'extrémité du balancier.

DD Pierres sur lesquelles se trouve assis le cylindre à vapeur.

F Tige dont une extrémité est fixée à l'un des côtés du parallélogramme et dont l'autre glisse dans un cylindre fixe. Elle imprime le mouvement aux tiroirs de la machine.

G Axe du balancier.

HH Tiges des pistons de l'appareil de ventilation.

LL Cuves de la machine.

MM Conduits qui amènent l'air de la mine sous les cuves.

N Pistons des cuves dont le pourtour est garni d'un boyau en cuir, bourré de crins.

O Tuyau amenant la vapeur de la chaudière au cylindre.

a Levier servant à manœuvrer la soupape d'admission.

cc Traverses du balancier destinées à éviter le choc des pistons contre le fond des cuves.

d Pompes d'alimentation.

e Tuyau d'alimentation.

PLANCHE II.

Fig. 1. *Élévation de la machine à cloches plongeantes de la mine de Marihaye, à Seraing, avec la coupe de l'une des cloches.*

A Cylindre à vapeur.

B Boîte de distribution de la vapeur. Le tiroir est mu par un levier, qui à chaque extrémité de la course du piston est poussé par des taquets fixés à une barre B′, attachées aux guides du piston.

C Cloches en tôle plongeant dans l'eau de l'espace annullaire des cuves.

D Tuyau qui amène la vapeur du cylindre au réservoir R.

II Petit balancier auquel sont fixées les pompes à eau froide et d'alimentation P et P'.

Fig. 2. Plan d'une cloche.

Fig. 3 et 4. Disposition à donner aux contrepoids qui servent à équilibrer les clapets.

Fig. 5. Effet de la force centrifuge sur un liquide contenu dans un vase.

Fig 6. Disposition adoptée par M. Letoret pour l'établissement des ventilateurs à force centrifuge.

HH Canaux qui mettent en communication le puits d'aérage avec le ventilateur.

O Diaphragme lenticulaire destiné à empêcher la rencontre des courants qui arrivent par les ouvertures I, I.

aa Ailes du ventilateur formées de plaques en tôle fixées sur les montans *hh*, qui sont articulés aux extrémités des bras du ventilateur et fixés dans une position plus ou moins inclinées par des demi cercles.

V. — *Observations sur le procédé indiqué par Monsieur Ed. Frémy, pour séparer la Potasse de la soude,*

Par Is. KUPFERSLAEGER,

PRÉPARATEUR DE CHIMIE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

L'existence de la soude en solution n'a pu être démontrée jusqu'a présent, avec l'apparence positive*, parce que on ne possédait encore aucun réactif qui pût la précipiter de ses combinaisons, dans lesquelles sa présence ne pouvait être constatée que par des réactions négatives.

Delà l'emploi fréquent et journalier de la soude et de ses sels, pour falsifier les composés potassiques usités tant en médecine qu'en industrie, sans qu'on pût convenablement déceler la fraude, ni séparer en totalité et avec avantage la soude ou ses composés, des composés de potasse (1).

Cette constatation positive de la soude en solution, était donc un problème important, que pendant longtemps on a cherché à résoudre, et dont la solution était vivement sollicitée par la science et l'industrie, qui réclamaient un moyen propre à faire reconnaître et à séparer la soude, même dans des dissolutions potassiques.

Ce problème fut, dans ces derniers temps, résolu par M. Ed. Frémy; dans la séance du 23 janvier 1843 de l'Académie des sciences de Paris (Journal l'Institut, année 1843, N° 474), il annonça avoir découvert un réactif, qui accuse la présence de la soude en solution, même en petite quantité, et qui de plus, est propre à la séparer tout à fait de la potasse lorsqu'elle y est mélangée.

Ce réactif est l'*antimoniate potassique basique*, lequel, dissout et versé dans une solution renfermant de la soude, ou un sel sodique, donne au bout de quelque temps et par l'agitation, un précipité d'aspect cristallin, composé d'Antimoniate sodique pur, lors même qu'il prend naissance dans une solution qui contient aussi de la potasse.

Ce résultat, comme on le pense, fut bien accueilli, et reçut l'approbation des personnes compétentes, (Barreswil, et Sobrero)

* Par opposition avec négative, réaction de la soude.

(1) On sait que le chloride platinique précipite la potasse de ses dissolutions concentrées et non pas la soude; cependant si cette derniere est mélangée à la potasse, a séparation est moins complète, parce que la soude forme avec le chloride platinique et par évaporation, un chlorure platinico-sodique, qui se dépose par la concentration de la liqueur. Si on ajoute à cela la cherté du réactif, on aura la mesure de ce que l'on peut faire, lorsqu'il s'agit de masses considérables a traiter, comme il arrive dans l'industrie.

qui indiquèrent l'emploi de cet antimoniate potassique basique, dans les analyses chimiques, pour séparer la potasse de la soude.

Dans son mémoire M. Frémy dit que l'on peut employer l'antimoniate potassique basique pour précipiter la soude sans entraîner la potasse ; mais il ne dit pas si tous les composés potassiques peuvent être séparés des sels sodiques, sans qu'ils soient eux-mêmes précipités, ni quels sont ceux qui peuvent l'être, dans le cas où il s'en trouverait qui fussent précipitables. Ce qui fait que ce procédé de séparation, destiné à recevoir un fréquent usage et à acquérir de l'importance dans la suite, pourrait fort bien être pris à la lettre et être appliqué indistinctement à tous les composés et sels potassiques, comme on est porté à le croire, puisque l'auteur n'y a fait aucune restriction.

C'est ce qui nous a engagé, pour faire disparaître tous les doutes à cet égard, à tenter quelques recherches relatives à l'emploi de ce réactif, recherches que nous consignons ci-après avec leurs résultats.

Ayant fait usage de l'antimoniate potassique alcalin, préparé comme il est indiqué dans l'*Appendice à tous les traités d'analyse chimique de MM. Barreswil et Sobrero* (page 532), voici ce que nous avons observé avec des sels potassiques et sodiques purs.

Sels potassiques.

Le carbonate potassique, n'a rien fourni, ni à froid ni à chaud.
Le bicarbonate a fourni un précipité blanc.
L'oxalate neutre rien même à chaud.
Le bioxalate id. id.
Le quadroxalate id. id.
L'Azotate potassique, un précipité blanc abondant.
Le sulfate idem.
Le bisulfate se trouble, et précipite à chaud.
L'Arséniate précipité blanc abondant.
L'arsénite idem.
Le Phosphate précipité blanc par l'ébullition.
Le chlorate précipité blanc.
Le chlorure rien, léger trouble par l'ébullition.
L'iodure de même.

Sels sodiques.

Le Carbonate sodique, se trouble et précipite par l'agitation de la chaleur.
Le bicarbonate précipité blanc.
Le biborate (Borax) idem.

Le *c* Phosphate	rien à froid, précipité blanc à chaud.
L'Azotate	précipité blanc.
Le sulfate	idem
Le chlorure	idem.
L'iodure	idem.

Les précipités des sels potassiques sont pulvérulents et instantanés, tandis que ceux de soude sont d'apparence cristalline, et lents à se déposer; excepté celui des carbonates, qui est floconneux quand il se forme instantanément. L'agitation ou l'application de la chaleur hâte la formation des précipités sodiques.

Comme on le voit, par ce petit tableau, sur 14 solutions potassiques employées, 8 ont donné des précipités, ce qui fait que l'on doit consulter le genre du sel potassique, sur lequel on opère, avant de faire usage d'antimoniate potassique.

Cependant nous devons ajouter qu'ayant versé de l'antimoniate potassique basique dans une solution mixte, faite à partie égale de carbonate potassique et de carbonate sodique, neutres, il ne s'est rien formé à froid, ni par l'agitation; mais que l'ayant soumise à la chaleur, le précipité s'est montré avec son aspect cristallin. Après un repos suffisant nous avons séparé le précipité de la liqueur, et lavé parfaitement; puis l'ayant dissout dans quelques gouttes d'acide chlorhydrique, et neutralisé la liqueur par du carbonate sodique, nous y avons versé du chloride platinique, et nous n'avons pas obtenu le moindre précipité; tandis que la liqueur filtrée a donné instantanément, par le chloride platinique, un précipité jaune; caractère comme on sait qui distingue les sels potassiques, des sels sodiques.

Ce qui précède s'accorde avec ce que dit M. Frémy que l'on peut séparer la potasse de la soude; mais nous ajoutons, *le plus convenablement lorsque ces deux bases sont à l'état de carbonates neutres.* Nous ferons remarquer que la précipitation du bicarbonate potassique, par l'antimoniate potassique, n'est pas un motif qui doive faire rejeter l'emploi de ce réactif pour séparer la potasse de la soude, lorsque le sel est un bicarbonate; car l'on sait que l'ébullition prolongée, ramène le bicarbonate à l'état de carbonate neutre, lequel ne précipite pas; c'est donc ce que l'on devra faire avant d'y ajouter le réactif.

Nous n'entrerons point dans de plus longs détails à cet égard, n'ayant eu d'autre but en livrant ces observations, que d'attirer l'attention des savants sur ce point important, en même temps que d'être utile aux personnes qui s'occupent d'analyses chimiques.

VI. — *Mémoire sur les propriétés de l'Ellipse;*

Par J.-N. Noel,

professeur a l'université de liége.

Préliminaires.

I. Les lignes du second ordre, dont l'étude est l'objet de la géométrie analytique plane, possèdent, comme on sait, un grand nombre de propriétés importantes. On sait aussi que, parmi ces propriétés, les plus utiles sont celles de l'ellipse et de la circonférence, lesquelles se déduisent souvent les unes des autres, à raison de la grande analogie entre les deux courbes.

II. La possibilité de représenter les lignes planes par des équations, entre les coordonnées variables x et y de chacun de leurs points, en facilite singulièrement l'étude complète; et d'abord l'équation étant donnée, on en déduit la nature et la forme de la ligne, lesquelles dépendent essentiellement du degré de l'équation; et celle-ci fournit toujours quelques propriétés *caractéristiques* de la ligne proposée, d'où l'on peut la définir et la décrire ensuite.

III. Ligne droite. On démontre aisément que *toute équation du premier degré, ramenée à la forme*

$$y=nx+h,$$

représente une ligne droite, et réciproquement. Pour que la droite soit déterminée de *position* sur le plan, il faut que les deux *constantes arbitraires* n et h soient des nombres connus, *positifs* ou *négatifs*. Or, $x=0$ donne $y=h$; ainsi h est la distance numérique de l'origine au point où la droite coupe l'axe des y. De même, $x=1$ donne $n=y'-h$; de sorte que n est la différence des ordonnées qui répondent à $x=0$ et à $x=1$. Or, si h est connue, $x=0$ donne un premier point de la droite proposée; tandis que si n est donnée numériquement, $x=1$ fait connaître y' et par suite un second point de la droite : celui-ci en détermine donc la *direction*. Voilà pourquoi il convient d'appeler *direction* de la droite, le coefficient n de x dans son équation. La direction n a donc $y'-h$ pour valeur analytique; et quant à son expression trigonométrique, c'est le rapport

des sinus des angles α et β que la droite fait avec les axes des x et des y. De sorte que si les coordonnées sont rectangulaires, on a $n=\text{tang}\,\alpha$.

Observons d'ailleurs que si k désigne la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des x; la droite est alors représentée par l'équation *homogène*

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{h}=1\text{; d'où } n=-\frac{h}{k}.$$

Cette équation l'emporte sur l'autre pour résoudre certains problèmes, et particulièrement dans la théorie des *transversales* rectilignes; mais généralement l'équation $y=nx+h$ est préférée dans la *combinaison* des droites et des points.

IV. Par exemple, connaissant les extrémités (x,y) et (x',y') d'une droite donnée d; si l'on veut calculer le point (X,Y), divisant d en deux parties p et q, dans le rapport connu R, d'où $p=q\text{R}$, il faudra employer l'équation $y=nx+h$, avec les expressions des distances p et q, l'angle θ des coordonnées étant quelconque : on trouvera

$$(1+\text{R})\text{X}=x+\text{R}x' \text{ et } (1+\text{R})\text{Y}=\text{Y}+\text{R}y'.$$

Si $p=q=\frac{1}{2}d$, ou $\text{R}=1$, il vient $2\text{X}=x+x'$ et $2\text{Y}=y+y'$. D'ailleurs $2\text{X}=x+x'$ revient à $x'-\text{X}=\text{X}-x$; de sorte que le pied de Y divise $x'-\text{X}$ en deux parties égales. Ainsi *dans tout trapèze, la droite* Y *qui joint les milieux des côtés latéraux* d *et* x'—X, *est parallèle aux deux bases* y' *et* y, *et vaut leur demi-somme.* Si d'ailleurs $x=y=0$, d'où $2\text{Y}=y'$, on en conclut que *la droite joignant les milieux des côtés latéraux de tout triangle, est parallèle à la base* y' *et en vaut la moitié.*

De plus, pour R quelconque, on a $p:q=x'-\text{X}:\text{X}-x=y'-\text{Y}:\text{Y}-y$. On retrouve donc ainsi la propriété des triangles équiangles, d'où l'on est parti pour démontrer que $y=nx+h$ représente une suite de points en ligne droite.

V. Soient $y=nx+h$ et $y=n'x+h'$ deux droites données, et (x',y') un point connu de la seconde : si l'on veut calculer le point (x,y) d'intersection de ces deux droites, on posera $a=y'-nx'-h$ et l'on trouvera

$$(n-n')(x-x')=a \text{ et } (n-n')(y-y')=an'.$$

Si les deux droites proposées sont parallèles, leur intersection (x,y) n'existe pas; les deux valeurs de $x-x'$ et $y-y'$ sont donc impossibles. Or, cela exige que a n'étant pas nul, on ait $n-n'=0$

ou $n=n'$. Réciproquement, si $n=n'$, a n'étant pas nul, *les deux droites sont parallèles.*

Si l'intersection (x,y) existe, soit d sa distance au point (x',y'); soit $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$: on aura, pour calculer d,

$$(n-n')^2d^2=a^2(1+n'^2+2cn').$$

Si n' est variable avec d seule, cette équation, résolue par rapport à n', donne, pour le *minimum* de d,

$$d\sqrt{(1+2cn+n^2)}=as=(y'-nx'-h)s.$$
$$\text{et } (d^2-a^2)n'=d^2n+a\,c.$$

Puisque d est la plus courte distance du point (x',y') à la droite $y=nx+h$, d est nécessairement perpendiculaire à cette droite. Éliminant donc d^2, d'où $(c+n)(1+nn'+cn+cn')=0$, on aura, pour la condition de *perpendicularité* des deux droites $y=nx+h$ et $y=n'x+h'$, la relation

$$1+nn'+(n+n')\cos\theta=0.$$

Telle est la condition, nécessaire et suffisante, pour que les deux droites, dont n et n' sont les directions, soient perpendiculaires entre elles. Et comme cette condition est indépendante de h et de h', on voit que toute droite perpendiculaire à l'une des parallèles (de direction n commune) est perpendiculaire à toutes les autres.

VI. La condition ci-dessus et l'expression du minimum d se simplifient beaucoup lorsque $\theta=90°$, d'où $\cos\theta=0$ et $\sin\theta=1$. Aussi lorsqu'il s'agit de calculer les angles et les distances, faut-il prendre l'angle $\theta=90°$, comme dans les propositions que voici, à établir :

1° Tous les points chacun à égales distances de deux droites qui se coupent appartiennent à deux droites rectangulaires, bissectrices des angles de ces deux droites. Mais ces droites ne seraient pas rectangulaires, si l'une des distances de chaque point devait être double de l'autre.

2° Si du point $(a,0)$ de l'axe des x rectangulaires, on mène une oblique quelconque à l'axe des y, l'extrémité de la perpendiculaire à l'oblique, de même longueur et menée par son pied, se trouve sur l'une des deux droites rectangulaires $y=x+a$ et $y=-x-a$. (Cela conduit à une propriété, assez remarquable, du carré).

3° Une droite et un point au-dehors étant donnés ; quel est le lieu géométrique des points divisant chacun toute droite, menée du point à la droite, en deux parties, dans le rapport connu de a à b?

4° Chaque point du plan d'un rectangle donné est tel, que la somme des carrés faits sur les distances de ce point à deux sommets

opposés vaut la somme des carrés construits sur ces distances aux deux autres sommets. Mais si la différence des deux premiers carrés doit être équivalente à la différence des deux derniers, ou si les quatre carrés doivent être proportionnels, ou enfin si la somme de deux premières distances doit être égale à la somme des deux autres; chaque fois les points, dont chacun jouit de la propriété énoncée, se trouvent sur deux droites rectangulaires.

VII. Les axes rectangulaire simplifient les calculs; cependant il est parfois préférable de les rendre obliques ; comme dans les propositions que voici :

1° Trois parallèles, de longueurs données inégales, étant deux à bases de trois trapèzes, les trois intersections des trois couples de côtés latéraux appartiennent à une même droite. (Ici l'axe des x obliques étant sur l'une des parallèles, celui des y doit passer par deux des trois intersections).

2° Soit O un point du parallélogramme donné MNPQ : si O est l'origine des coordonnées obliques dont les axes soient respectivement parallèles aux côtés du parallélogramme, savoir l'axe des x rencontrant en A et C les côtés opposés NP et MQ, tandis que celui des y rencontre en B et D les côtés opposés PQ et MN ; il y aura, dans l'ensemble des cinq parallélogrammes, six systèmes de trois diagonales se coupant en un même point, savoir : 1° QA, BN et MO; 2° MB, CP et NO; 3° MA, DP et QO; 4° QD, CN et PO; 5° CB, DA et PM; 6° enfin, CD, BA et QN.

3° Les trois intersections 1°, 4° et 5° ne seraient-elles pas en ligne droite, de même que 2°, 3° et 6° ? Ce qui le ferait penser, c'est que quand l'origine O est le centre de MNPQ, 5° et 6° cessent d'exister, tandis que 1°, 2°, 3° et 4° sont les sommets d'un parallélogramme, semblable et concentrique à MNPQ.

4° Soit le triangle quelconque ABC : par les sommets B et C, on mène, aux côtés opposés AC et AB, les parallèles BD et CE, de longueurs données arbitraires, d'où les droites BE et CD se coupent en un point O; si de plus, par D et E, on mène à AB et à AC, deux parallèles se coupant en P; les trois points O, A, P sont en ligne droite.

VIII. Circonférence. L'équation de la circonférence prend diverses formes, pour exprimer que tous les points de cette ligne plane sont à la même distance du centre fixe. Cette équation conduit, avec facilité, à toutes les propriétés de la ligne circulaire ; mais les coordonnées doivent être rectangulaires, comme dans les propositions que voici :

I° Le lieu géométrique de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun aux sommets du triangle T, dont a, b, c, sont les côtés donnés, soit le carré constant m^2, est la circonférence ayant pour centre celui de gravité de T. Le *minimum* de m^2 est $3m^2=a^2+b^2+c^2$; et alors la circonférence se réduit à son centre.

Il existe un théorème analogue pour le parallélogramme et pour tant de points, qu'on voudra donner sur un plan.

2° La circonférence à décrire est telle, que le carré fait sur la distance de l'un quelconque de ces points à l'extrémité de la base d'un triangle isocèle tracé, vaut la somme des carrés construits sur les distances de ce points aux deux autres sommets.

3° Calculer le rayon de la circonférence, lieu géométrique de tous les points tels, qu'en menant de l'un quelconque O de ces points les droites OA, OB, OC et OD aux quatre points A, B, C, D, donnés sur une droite, on ait l'angle AOB=COD. On suppose AB=2, AC=5 et AD=8.

4° Le point (4,0) est le sommet fixe d'un angle droit mobile, dont un côté s'arrête constamment à l'axe des y rectangulaires; quel est le lieu géométrique du point (x,y) de l'autre côté tel, 1° que la longueur de ce côté soit égal à l'abscisse x de ce point? 2° que le triangle résultant soit constamment isocèle? 3° que l'aire du triangle variable résultant soit toujours équivalente au carré 36?

5° Si l'espace plan autour d'un point O est divisé en m parties égales, par m droites; le point dont la somme des carrés de ces distances à ces n droites vaut le carré donné c^2, appartient à la circonférence ayant O pour centre et $2c^2$ sur m pour carré numérique du rayon.

6° Un polygone régulier de m sommets et son apothème a étant donnés; chaque point, dont la somme des carrés des distances aux m côtés, vaut le carré donné c^2, appartient à la circonférence, de même centre que le polygone et de rayon r tel, qu'on a $\frac{1}{2}mr^2=c^2-\frac{1}{2}ma^2$. Pour le minimum de c^2, cette circonférence se réduit à un seul point.

7° Deux circonférences concentriques, dont les rayons a et b sont donnés, sont toujours telles, que la somme des carrés des distances de chaque point de la plus petite aux m points, qui divisent la plus grande en m parties égales, vaut constamment $m(a^2+b^2)$.

(Ces trois derniers théorèmes exigent la sommation de certaines séries trigonométriques).

IX. LIGNES DU SECOND ORDRE. L'équation la plus générale du second degré, à deux variables x et y, peut toujours se ramener à la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ ;\ .\ .\ .\ (a)$$

A étant positif et les autres coefficients, donnés numériquement, aussi bien que A, ayant des signes et des valeurs quelconques. Si cette équation est *possible*, elle détermine chacun des points (x,y) d'une ligne nécessairement courbe, dite *ligne du second ordre* ou *courbe du second degré*. Comme la *forme* et le *genre* de cette courbe dépendent essentiellement des valeurs et des signes des coefficients et que l'équation, supposée toujours possible, représente toutes les courbes imaginables du second degré, pour une même valeur de l'angle θ des coordonnées, il est naturel d'en déduire toutes les *propriétés* de ces courbes, comme d'une source commune, qui les rend parfaitement *analogues*, en passant d'une courbe à une autre, et étend ainsi la théorie, développée pour un genre, à tous les autres genres, moyennant certaines modifications, très-simples et faciles à prévoir. Mais l'étude des lignes du second ordre, d'après l'équation complète ci-dessus, serait fort difficile, à raison de la complication des calculs, qui masqueraient souvent les conséquences. Il faut donc *représenter* les lignes du second ordre par leurs équations les plus simples; et il existe, à cet effet, plusieurs méthodes. La suivante, indiquée dans mon traité de géométrie analytique et dont mon collègue, M. Brasseur, avait fait usage de son côté, dans son traité lithographié, est la plus directe; car il en résulte immédiatement la *forme* générale des courbes de même genre, cette forme étant caractérisée par le binome B^2-4AC.

Coupons en effet, la courbe (a) par la sécante $y=nx+h$, n et h étant deux constantes entièrement arbitraires : comme aux points d'intersection les x et les y ont mêmes valeurs respectives, dans les équations des deux lignes, on peut éliminer y; et alors on a

$$(An^2+Bn+C)x^2+(2Ahn+Bh+Dn+E)x$$
$$+Ah^2+Dh+F=0.$$

Cette équation finale en x étant du second degré, il y aura généralement deux abscisses, deux ordonnées et deux points d'intersection, au plus. Or, n et h étant complètement arbitraires, l'équation en x fournit les conditions pour que, 1° *la droite ne coupe la courbe qu'en un seul point*; 2° *ne la coupe pas*; 3° *lui soit tangente*; 4° *lui soit asymptote*, c'est-à-dire s'en approche continuellement,

sans jamais la rencontrer. Développons la première de ces conditions.

Pour que la droite $y=nx+h$ ne coupe la courbe (a) qu'en un seul point, il faut que l'équation finale en x n'ait qu'une seule racine et soit par conséquent du premier degré ; il faut donc qu'on ait rigoureusement

$$An^2+Bn+C=0 \text{ ; d'où } 2An=-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}.$$

Or, le binome B^2-4AC ne peut être que *nul*, *négatif* ou *positif;* il ne peut donc exister que *trois genres distincts de courbes du second degré;* et la forme de chaque courbe dépend essentiellement de la valeur du binome *caractéristique* B^2-4AC.

X. Parabole. Supposons $B^2-4AC=0$; nous aurons $2An=-B$. Dans ce cas, la direction n est constante ; elle est toujours réelle et unique, pour une même valeur arbitraire de h. Il existe donc, depuis $h=0$ jusqu'à $h=\pm\infty$, une infinité de droites *parallèles* ne coupant la courbe (a) qu'en un seul point chacune. Cette propriété caractérise essentiellement la ligne du second ordre, appelée *parabole;* car cette courbe est évidemment *infinie* et *ouverte* dans un seul sens : elle peut toujours se représenter par l'équation très-simple

$$y^2=2px ;$$

vu qu'ayant ici $A=1$, $B=0$ et $C=0$, la condition caractéristique $B^2-4AC=0$ est satisfaite.

XI. Ellipse. Si le binome B^2-4AC est *négatif*, les deux valeurs de n sont *imaginaires ;* la droite $y=nx+h$ ne peut donc jamais couper la courbe (a) en un seul point : elle la coupe en deux points ou pas du tout. La courbe, dans ce cas, est nécessairement *fermée*, *convexe*, *finie* et *rentrante sur elle même :* on l'appelle *ellipse* et peut toujours se représenter par chacune des équations, où les signes sont en évidence :

$$My^2+Nx^2=P \text{ et } y^2=2px-qx^2 ;$$

car chaque fois la condition caractéristique B^2-4AC *négatif* est satisfaite. Ce binome se réduit, en effet, à $-4MN$ ou à $-4q$.

XII. Hyperbole. Enfin, si B^2-4AC est *positif*, les deux valeurs de n sont réelles, inégales et constantes, quel que soit h ; il existe donc, deux systèmes, composés chacun d'une infinité de droites *parallèles*, ne coupant chacune la courbe (a) qu'en un seul point. De plus, les 2 valeurs de n, qui satisfont à l'équation $(2An+B)h+Dn+E=i$, i étant un *infinimenent petit* d'un *ordre* quelconque,

donnent à h deux valeurs *finies* et *réelles* : ces valeurs de h, substituées dans

$$ix+Ah^2+Dh+F=0 \text{ et } y=nx+h,$$

donnent à x deux valeurs *infinies* et à y quatre valeurs, aussi *infinies;* les deux valeurs proposées de h fournissent donc deux sécantes qui se coupent (vu que les deux valeurs de n sont différentes) et coupent chacune la courbe (a) en deux points situés à l'*infini*. Cette courbe, bien différente de la parabole, a nécessairement deux *ouvertures* et deux *branches*, *séparées* et *infinies*, contenues dans deux angles opposés des deux droites d et d', qui répondent à i rigoureusement nul; car alors, pour les deux valeurs finies de h, les deux de x et les quatre de y cessent d'exister; donc les deux droites d et d' ne rencontrent point la courbe (a); tandis que pour i infiniment petit, les deux droites résultantes rencontraient chacune la courbe en deux points, situés à l'infini. Cette courbe, nommée *Hyperbole*, est donc composée de deux branches, séparées, égales, infinies et contenues dans les deux angles opposés de deux droites d et d', qui se coupent. D'ailleurs celles-ci s'approchent continuellement des deux branches, sans jamais les rencontrer; elles en sont donc les *asymptotes*.

L'hyperbole peut se représenter par chacune des trois équations

$$My^2-Nx^2=-P,\ y^2=2px+qx^2 \text{ et } xy=H^2;$$

car chaque fois la condition caractéristique, savoir B^2-4AC *positif*, est satisfaite. Ce binome, en effet, se réduit à $+4MN$ dans la première équation, à $+4q$ dans la seconde et à $+1$ dans la troisième. Celle-ci représente l'hyperbole, rapportée à ses *asymptotes*, axes des x et des y, qu'elle ne rencontre jamais.

Par exemple, *si toutes les droites, partant du point donné* (8,6) *sont terminées, de part et d'autre, aux deux axes des coordonnées; le lieu géométrique de tous leurs milieux est une hyperbole, rapportée à ses asymptotes.* Ce lieu est, en effet, représenté par

$$xy=3x+4y, \text{ ou par } xy=12,$$

en passant à un système de coordonnées parallèles, pour faire disparaître les premières puissances de x et de y.

XIII. Il existe un grand nombre de problèmes, sur les *lieux géométriques* d'une infinité de points, fournissant les courbes du second degré. Par exemple, on trouve que la *parabole* est le lieu géométrique de tous les points tels, que la distance de chacun à l'axe des y soit égal à sa distance au point (2,0), donné sur l'axe des x. Le

lieu serait une *ellipse*, si la seconde distance devait être double de la première, ou si la somme des carrés des deux distances devait valoir le carré donné 36. Le lieu serait une *hyperbole*, si la première distance devait être double de la seconde, ou si le produit des deux distances devait être triple de celui des coordonnées du point.

On peut chaque fois calculer l'équation numérique de la courbe, 1° lorsque l'angle θ des coordonnées est droit, 2° lorsqu'il est de 60°. Chaque fois aussi, en résolvant l'équation proposée, par rapport à y, on peut construire la courbe, *par points successifs;* mais il est souvent plus simple et plus exact, à cet effet, de *rapporter* la courbe à ses *axes conjugués*, ou à ses *axes principaux.*

XIV. Axes conjugués. Si l'équation d'une ligne du second ordre conserve la même forme, quel que soit l'angle θ des coordonnées, moindre que 180°, on dit que la courbe est rapportée à ses *axes principaux* ou à ses *axes conjugués*, suivant que l'angle θ est droit ou non. Or, *une même ligne du second ordre admet une infinité de systèmes d'axes conjugués et un seul système d'axes principaux;* et c'est ce qu'il faut d'abord démontrer, pour les trois courbes. On y parviendrait par la *transformation des coordonnées;* mais il est bien plus clair et plus simple de procéder comme il suit.

XV. Parabole. Cherchons l'équation de la courbe plane telle, que la distance d de chacun de ses points (x,y) à l'axe des x soit moyenne proportionnelle entre l'abscisse x de ce point et le nombre donné $2p$.

Supposons d'abord l'angle θ des coordonnées, compris entre 0 et 90°; la distance d sera opposée à l'angle θ du triangle rectangle dont l'ordonnée y est l'hypoténuse; et ainsi $d=y\sin\theta$. Par l'énoncé, on doit avoir $x:d::d:2p$ ou $d^2=2px$; donc $y^2\sin^2\theta=2px$. Posant donc $2p=2p'\sin^2\theta$, d'où $2p'>2p$, on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$y^2=2p'x \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Si l'on fait croître, *par degrés insensibles*, l'abscisse positive x, depuis zéro jusqu'à l'infini; comme $2p'$ est un nombre constant et donné, essentiellement positif, il est clair que l'ordonnée y croîtra, positivement et négativement, depuis $y=\pm 0$ jusqu'à $y=\pm\infty$: d'ailleurs x ne saurait avoir le signe —; la courbe (b) est donc *infinie* et *ouverte*, dans le sens des x positifs; c'est par conséquent une *parabole*, quel que soit l'angle θ; et c'est une parabole, rapportée à ses *axes conjugués* des x et des y.

On voit d'ailleurs que celui-ci *est tangent à la courbe, à l'origine* O ; car $x=0$ donne $y=\pm 0$. De plus, comme $x=k$ donne $y=\pm h$; la *corde* $2h$, parallèle à l'axe des y, est divisée en deux parties égales par l'axe *conjugué* des x. Celui-ci est un *diamètre* de la courbe ; parce que, dans les lignes du second ordre, on appelle *diamètre*, la droite *bisectrice* d'un système de cordes parallèles.

Le point M ou (x,y) restant invariable, aussi bien que $2p$, il est clair que la distance d augmente avec l'angle θ ; l'axe des x, toujours perpendiculaire à la droite sur laquelle d se trouvait, s'éloigne de plus en plus de sa position primitive, sans cesser de lui être parallèle, ni d'être *bisecteur* du système de cordes parallèles à son conjugué, axes des y, toujours tangent à la courbe. Car on a toujours $y^2=2p'x$, bien que $2p'$ diminue de plus en plus, depuis $\theta=0$ sur ∞ jusqu'à $\theta=90°$. Or $\theta=90°$ donne $2p'=2p$ et $y^2=2px$; l'équation (b) conserve donc toujours la même forme, quel que soit l'angle θ des coordonnées. Ainsi non-seulement la parabole admet une infinité de systèmes d'axes conjugués et un seul système d'axes principaux ; mais de plus, tous les axes des y touchent la courbe en chaque origine et tous les axes conjugués des x, *diamètres* de la parabole, sont parallèles à son axe principal des abscisses. Celui-ci d'ailleurs est le seul *axe de symétrie* de la courbe, comme bisecteur de toute corde $2h$ qui lui est perpendiculaire. La *forme* de la parabole est d'autant plus *ouverte*, que les coefficients constants $2p'$ et $2p$ sont plus grands : c'est pourquoi ces deux coefficients sont appelés *paramètres* de la courbe : $2p'$ est dit le *paramètre diamétral* et $2p$ le *paramètre principal* ou simplement le *paramètre*.

Puisque l'axe principal des x est déjà tracé et contient le pied P de la nouvelle ordonnée $MP=y=d$, il est clair que si l'on prend, sur cet axe et du côté des x positifs, la longueur $PN=2p$; la perpendiculaire à MN, élevée par le point M, ira couper le même axe au point S ; et comme alors $MP^2=2p$. SP, le point S, origine des axes principaux, appartient à la courbe : c'est le *sommet* de la parabole. Prenant sur l'axe principal des x et à partir de S, la longueur arbitraire SQ, qu'on prolongera de $2p$; la circonférence décrite sur le diamètre $SQ+2p$, coupera la perpendiculaire, menée par le point Q, sur QS, aux deux points G et G', appartenant à la parabole ; laquelle se décrit ainsi très-simplement, *par points successifs*.

Prenons sur l'axe principal des x, et de part et d'autre de l'origine S, les longueurs égales à $\frac{1}{2}p$, savoir SF et SK, F étant du côté des x positifs ; par le point K élevons sur FK la perpendiculaire

indéfinie KE, appelée *directrice* de la parabole : il est facile de démontrer, d'après l'équation $y^2=2px$, que *la parabole est une courbe plane telle, que les distances de chacun de ses points* M, *à la directrice et au point fixe* F, *sont égales entre elles* et à $x+\frac{1}{2}p$. Chaque distance r, de M à F, est appelée *rayon vecteur* du point M de la courbe, dont F est dit le *foyer*. Cette égalité des distances est tellement *caractéristique* de la parabole, qu'en cherchant le lieu géométrique de tous les points M, à égale distance du point F et de la droite EK, on retrouve l'équation $y^2=2px$. Cette équation fournit, comme on sait, la *description* de la parabole, soit d'*un mouvement continu*, soit *par points successifs;* mais pour ce dernier cas, le procédé indiqué ci-dessus est le plus simple, quoique peu connu.

Réciproquement, *la parabole étant tracée, voyons comment on trouve son équation aux axes conjugués et aux axes principaux.* Menant la droite D', par le milieu de deux cordes parallèles quelconques; puis par le point O, où D' coupe la parabole, menant la parallèle P' aux deux cordes; il est clair que P' *touche* la courbe au point O, vu que O est le milieu de la corde *nulle* sur P'. Or, D' et P' étant les axes conjugués des x et des y, dont O est l'origine, les coordonnées x et y du point M sont connue; on connaîtra donc le paramètre diamétral $2p'$, par $y^2=2p'x$ ou par $x:y::y:2p'$.

Menant ensuite à D', par le point M, la perpendiculaire, que l'on prolongera en P, de telle sorte qu'on ait $MP=y$; la parallèle à D', menée par P, sera l'axe principal des x, coupant la courbe au sommet S. Menant enfin à SM, la perpendiculaire, coupant en N le prolongement de SP, la longueur PN sera le paramètre $2p'$, ainsi déterminé; car $MP^2=PN\cdot SP$. L'équation aux axes principaux sera donc $y^2=2px$.

Les autres propriétés de la parabole sont maintenant bien faciles à démontrer, d'après ses équations aux axes conjugués et aux axes principaux, et d'après $2p=2p'\sin^2\theta$. Il en résulte que, 1° les droites, menées du point de tangence, au foyer et parallèlement à l'axe principal, font avec la tangente et d'un même côté, deux angles égaux; 2° le milieu de la portion OT de la tangente, entre le point de contact O, et l'axe principal des x, est à la fois sur l'axe principal des y et sur la perpendiculaire à OT, menée du foyer F, cette perpendiculaire et le diamètre en O se coupant sur la directrice; 3° l'ordonnée du milieu de OT étant moitié de l'ordonnée du point O, il est facile de tracer la tangente en ce point; 4° le rayon vecteur r du point quelconque O, origine d'un diamètre, est le quart du paramètre $2p'$, relatif à ce diamètre; 5° connaissant donc les deux axes conjugués et le paramètre diamétral $2p'$, il en résulte le foyer,

la directrice et le paramètre principal ; 6° la distance du foyer à la tangente est moyenne proportionnelle entre le quart du paramètre $2p$ et le rayon vecteur du point de contact ; 7° soit d la distance au foyer du point d'où partent deux tangentes à la parabole, de longueurs t et t', depuis ce point jusqu'aux deux contacts, dont r et r' sont les rayons vecteurs : on aura $rt'^2=r't^2$, $d^2=rr'$ et par suite d est bisectrice de l'angle (rr') ; 9° si l'angle $(rr')=180°$, $r+r'$ est une corde, à laquelle d est perpendiculaire ; les deux tangentes aux extrémités de cette corde se coupent donc à angle droit sur la directrice ; d'où résultent plusieurs propriétés réciproques ; 10° enfin, quel est le lieu de tous les points tels, que la distance de chacun à l'origine soit l'abscisse de ce point augmentée de la longueur p donnée ?

Observons encore que, S étant le sommet de la parabole $y^2=2px$; si l'on prolonge l'abscisse SP du point M, de la longueur $PN=2p$ et NM de la longueur MN' telle qu'on ait $MN'=MN\cdot v$, v étant un rapport constant ; le lieu géométrique de tous les points N' est une seconde parabole. Mais si par chaque point M de la parabole proposée, on mène à l'axe principal des x, la parallèle égale au paramètre $2p$, puis du pied de l'ordonnée de l'extrémité de cette parallèle, une perpendiculaire à la corde SM; suivant que la parallèle $2p$ sera dirigée vers les x positifs ou vers les x négatifs, le lieu du pied de la perpendiculaire sera la parabole proposée elle-même ou bien sera la courbe $(y^2+x^2)y^2=2px(x^2-y^2)$. La parallèle pourrait être SP ou MP, etc.

XVI. Ellipse. — Cherchons l'équation de la ligne décrite par les intersections successives de deux droites, mobiles autour de deux points fixes, de telle sorte que le produit de leurs directions variables n et n' soit un nombre donné k, constamment négatif.

Soit $2d$ la longueur connue de la droite joignant les deux points fixes ; plaçons au milieu l'origine des coordonnées *obliques*, comprenant l'angle θ, et soient (x',y') une extrémité de $2d$; l'autre extrémité sera $(-x',-y')$, puisque l'origine (0,0) est le milieu de $2d$. Les équations des droites, mobiles autour de ces deux points, sont donc

$$y-y'=n(x-x') \text{ et } y+y'=n'(x+x').$$

Au point quelconque (x,y), où les deux droites se coupent, les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans leurs équations. On peut donc multiplier celles-ci membre à membre, et à cause de $nn'=-k$, par hypothèse, il vient

$$y^2-y'^2=-k(x^2-x'^2) \text{ ou } y^2+kx^2=y'^2+kx'^2 \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Tout est positif, dans cette équation, évidemment de la forme $My^2+Nx^2=P$; donc *elle représente une ellipse.*

Le point quelconque (x,y) de la courbe restant fixe, aussi bien que l'origine, milieu de $2d$, on peut, en déplaçant les axes autour de l'origine fixe, faire varier l'angle θ, depuis θ infiniment petit jusqu'à $\theta=180°$, k restant constant : il est clair que x' et y' varieront, en restant constants, pour une même valeur de θ ; l'équation (c) conservera toujours la même forme, sans cesser de représenter les mêmes points, et par conséquent la même ellipse ; laquelle est ainsi *rapportée à ses axes conjugués* des x et des y. De sorte que l'*ellipse admet une infinité de systèmes d'axes conjugués, des* x *et des* y, *et un seul système d'axes principaux, pour lequel l'angle* θ *est droit.* Dans ce cas, ayant $y'=0$ et $x'=d$, l'équation (c) devient $y^2+kx^2=kd^2$: elle représente la *circonférence*, si $k=1$; car alors $nn'+1=0$.

XVII. Hyperbole. Lorsque le produit $nn'=k$ est donné constant, mais toujours *positif*, l'équation (c) devient

$$y^2-kx^2=y'^2-kx'^2 \text{ ou } My^2-Nx^2=-P.$$

C'est donc l'*hyperbole*, *rapportée à ses axes conjugués*, des x et des y ; car cette équation conserve toujours la même forme, sans cesser de représenter les mêmes points M ou (x,y) et conséquemment la même courbe, lorsque l'angle θ varie, depuis 0 jusqu'à 180°. *Une même Hyperbole admet donc une infinité de systèmes d'axes conjugués des* x *et des* y, *et un seul système d'axes principaux, pour lequel l'angle* θ *est droit.* Dans ce cas, l'équation devient $y^2-kx^2=-kd^2$; et les axes principaux, des x et des y, sont en même temps *axes de symétrie* de la courbe, comme bisecteur chacun de toute *corde* qui lui est perpendiculaire.

De plus, si alors a et b sont les distances de l'origine aux points où la courbe rencontre ses axes de symétrie des x et des y, on aura $a^2=d^2$ et $b^2=-kd^2$. L'hyperbole rencontre donc l'axe principal des x aux deux points, extrémités fixes de $2d$; et voilà pourquoi $2a$ est dit le *premier axe*, l'*axe réel* ou l'*axe transverse* de l'hyperbole : elle ne rencontre point l'axe de symétrie des y, car $b=\pm d\sqrt{-k}$; la longueur *réelle* $2b=d\sqrt{k}$, sur l'axe principal des y, et dont le milieu est à l'origine, est dite le *second axe*, l'*axe imaginaire* ou *non transverse* de la courbe. Si $k=1$, d'où $2a=2b$, l'hyperbole est dite *équilatère* et son équation devient $y^2-x^2=-a^2$.

L'équation de l'hyperbole, aux *axes conjugués* ou aux *axes principaux*, conduit très-simplement, comme on sait, à toutes les propriétés, *descriptives* et autres, de la courbe ; en observant que,

quand l'hyperbole est équilatère, *ses asymptotes sont perpendiculaires entre elles, et réciproquement.*

Posons $\cos\theta = c$ et $\sin\theta = s$: si du point $(a,0)$, donné sur l'axe des x, on mène une oblique quelconque L à l'axe des y, puis du pied de celle-ci, la parallèle à l'axe des x, de longueur égale à L ; l'extrémité (x,y) de cette parallèle appartient à l'hyperbole

$$y^2 - x^2 + 2acy + a^2 = 0.$$

Prenant les valeurs de y, puis développant la racine carrée du binome $x^2 - a^2s^2$ ou $x^2 - m$, pour abréger, on aura

$$y = -ac \pm x \mp \left(\frac{m}{2x} + \frac{m^2}{8x^3} + \frac{m^3}{16x^5} + \text{etc.}\right).$$

Les équations des asymptotes de cette hyperbole sont donc

$$Y = -ac \pm x ;$$

car x ayant la même valeur, croissante depuis 0 jusqu'à $\pm\infty$, dans les deux systèmes d'équations, la différence $Y - y$ diminue continuellement et devient infiniment petite, sans jamais devenir rigoureusement nulle. Ici l'hyperbole est *équilatère*, puisque ses deux asymptotes sont *perpendiculaires entre elles.* On voit d'ailleurs comment cette courbe peut se décrire, par points successifs. On aurait pu d'abord faire disparaître la première puissance de y. On peut examiner les deux cas de $\theta = 90°$ et $60°$, lorsque $a = 10$.

Enfin, lorsque par le point donné (a,a), on mène une suite illimitée de droites, dont on considère les portions entre les axes des x et des y rectangulaires ; si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points tels, que chacun divise la portion de droite en deux parties dont celle adjacente à l'axe des x soit double de l'autre, on trouve encore une hyperbole équilatère ; mais l'équation est compliquée de facteurs étrangers, qu'il faut d'abord faire disparaître.

XVIII. SIMILITUDE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ. *Deux lignes du second ordre, du même genre et rapportées à un même système de coordonnées, sont semblables dès que les coefficients des termes du second degré, dans leurs équations, sont respectivement égaux.*

Pour démontrer ce théorème, on pourrait prendre les deux équations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = Hx \text{ et } Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 = H'x'.$$

Mais il est plus simple de considérer les deux courbes, de même genre, représentées par les équations, aux *axes conjugués :*

$$y^2 = 2px + qx^2 \text{ et } y'^2 = 2p'x' + qx'^2.$$

Soit d'abord posé $2p'=2pr$: on peut toujours choisir, sur les deux courbes, les deux points (x,y) et (x',y') tels qu'on ait $x'=rx$; et alors, en vertu des deux équations, on aura $y'=ry$. Les deux points (x,y) et (x',y') se *correspondent* sur les courbes et sont dits *homologues*, parce que l'un étant donné, l'autre s'en déduit immédiatement ; vu que le rapport r de p' à p (dit *rapport de similitude*) est connu, aussi bien que p' et p. D'ailleurs la droite $y=nx$, menée de l'origine au premier point, passe par le second ; car ayant $y:x=y':x'$, il est clair qu'en désignant par n le rapport commun, on aura simultanément $y=nx$ et $y'=nx'$.

Soient d et d' les distances de l'origine, point homologue commun aux deux courbes, à chacun des deux points (x,y) et (x',y') : on trouve $d'^2=d^2r^2$ ou $d'=dr$. De sorte que les droites *homologues* d' et d sont dans le rapport r de similitude ; et il en est de même de tous les couples de droites homologues, menées de l'origine, telles que D' et D ; car on trouve aussi $D'=Dr$. Soient a et a' les arcs des deux courbes, interceptés par les deux couples d et D, d' et D' : si l'angle commun, entre d et D ou d' et D', est *infiniment petit*, les deux arcs a et a' seront infiniment petits eux-mêmes et conséquemment *rectilignes ;* les deux triangles résultants sont donc semblables ; et ainsi a' est parallèle à a et de plus $a'=ar$.

On voit que, dans les deux courbes proposées, des arcs *homologues*, c'est-à-dire terminés à des points homologues chacun à chacun, sont *semblables ;* comme lignes brisées composées du même nombre infini de côtés ou éléments homologues proportionnels, respectivement parallèles et comprenant des angles homologues égaux. Non-seulement ces deux arcs, dans le rapport r de similitude, sont semblables de *forme*, mais aussi de *position*, à raison du parallélisme des éléments homologues. Donc aussi les deux courbes proposées sont semblables, de forme et de position. Ce qu'il fallait démontrer.

Observons que les deux paraboles $y^2=2px$ et $y'^2=2p'x'$ sont toujours *semblables*, même lorsque les angles ne sont pas égaux dans les deux systèmes de coordonnées. Car la seconde peut toujours se rapporter au système de la première. Mais pour les deux autres genres, les deux courbes, de même nature, sont semblables dès que les coefficients des termes du second degré étant égaux chacun à chacun, les angles des deux systèmes de coordonnées sont égaux, quoique séparés.

Scholie. Lorsque deux courbes sont semblables, l'une *représente*

complètement l'autre, pour l'étude de leurs propriétés communes et pour les opérations *descriptives* ou de *mesurage*, qu'il serait impossible d'effectuer directement sur celle-ci, soit à cause de son étendue, soit à raison de divers obstacles sur le terrain, qui borneraient la vue ou qui empêcheraient d'agir; comme un bois, une rivière, etc. Le tracé d'une figure *semblable* à une autre a donc pour but de mettre celle-ci sous les yeux sur le papier, afin de l'étudier avec plus de facilité et plus complètement. Aussi les théories de la géométrie n'ont-elles lieu que sur des figures semblables ou supposées telles; mais dans la géométrie analytique, on simplifie encore en représentant les points et les lignes par des équations; ce qui dispense de tracer la figure et conduit à ses propriétés, par de simples transformations analytiques, beaucoup plus sûrement que si elle était sous les yeux. C'est ce que Descartes a mis en évidence le premier, comme on sait; et c'est ce que l'on reconnaîtra, pensons-nous, dans ce qui va suivre, où nous ne considérerons aucune figure tracée.

Enfin, comme l'étude de chaque ligne du second ordre porte toujours sur une ligne semblable, pouvant se tracer sur le papier, d'après différents procédés, que cette étude fait connaître; le théorème de la similitude des courbes du second degré doit suivre immédiatement leur distribution en trois genres distincts, pour l'ordre et la clarté des idées.

XIX. LES CONIQUES. Les trois courbes du second degré peuvent s'obtenir en coupant, par des plans différemment inclinés, toute surface conique circulaire, droite ou oblique, composée de deux *nappes;* et c'est pourquoi, la *parabole*, l'*ellipse* et l'*hyperbole* sont appelées *sections coniques* ou simplement *coniques*. Or, l'angle θ des coordonnées étant quelconque, on trouve aisément, d'après la trigonométrie, pour représenter les trois courbes

$$y^2 = 2px + qx^2 \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Dans cette équation aux *axes conjugués* des x et des y, le premier étant un *diamètre* et le second, *tangent* à l'origine, les nombres p et q sont connus; et suivant que le coefficient q est *nul*, *négatif* ou *positif*, l'équation (d) représente une *parabole*, une *ellipse* ou une *hyperbole*, comme on l'a déjà démontré.

Soit a la distance de l'origine aux points où la courbe rencontre l'axe des x: on trouve $a=0$ et $qa=-2p$. La seconde distance n'existe pas, pour la parabole, où $q=0$; elle est positive ou négative, mais réelle, pour l'ellipse ou l'hyperbole; vu qu'alors q est un nombre

donné, négatif ou positif. Multipliant les deux membres par a, il vient l'équation *homogène*

$$ay^2 = 2p(ax - x^2).$$

L'équation (d), très-simple, faisant ressortir la grande analogie qui règne entre les trois courbes, peut servir utilement à l'étude de leurs propriétés ; puisque moyennant les modifications dues à la valeur et aux signes du coefficient q, les propriétés de l'une des trois courbes étant connues, on en déduit celles des deux autres. On pourrait commencer par la parabole ; mais, le coefficient q ayant disparu et ne se trouvant point dans les propriétés de cette courbe, il serait parfois assez difficile de bien connaître les modifications que la présence de ce coefficient doit amener dans ces propriétés, pour les deux autres courbes. Il est donc préférable de commencer par l'ellipse, parce que ses propriétés sont parfaitement *analogues* à celles de la circonférence, déjà connues.

Au surplus, l'équation (d), dans son état général, conduit immédiatement aux propriétés, communes aux trois courbes. D'abord cette équation fournit la propriété *caractéristique* de chaque courbe, ou propre à la *définir* et à la *décrire*, *en calculant le point* (x',y') *dont la distance* r, *à un point quelconque* (x,y) *de la courbe*, *soit* FONCTION RATIONNELLE *de l'abscisse* x *de ce point.* (Les coordonnées ici doivent être rectangulaires, pour plus de simplicité).

Calculant, d'après l'équation (d), *le lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes parallèles, dans la courbe*, il en résulte les définitions de son *centre* et de ses *diamètres*. Il en résulte aussi l'équation de toute *tangente*, et cette équation, avec l'équation (d), sert à démontrer que *le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés sont tangents à une conique, décrit une circonférence*, qui devient la *directrice*, dans la parabole.

Pour ce théorème, l'angle θ doit être droit, de même que pour la recherche des *directrices* de toute conique : chaque directrice est une droite et le foyer voisin un point tels, qu'*en cherchant le lieu géométrique de tous les points, dont les distances de chacun au foyer et à la directrice soient dans un rapport constant*, on retrouve l'équation (d). Il en résulte une propriété, propre à décrire la courbe, quand on connaît trois de ses points, un foyer et la directrice voisine. De plus, *si un angle droit a pour sommet, l'un des foyers de toute conique ; la tangente au point où l'un des côtés coupe la courbe, va couper l'autre côté sur une directrice.*

Observons encore que les deux droites, menées des extrémités du diamètre, sur l'axe des x, aux extrémités de toute corde parallèle à l'axe conjugué des y, se coupent sur une autre conique.

Enfin, l'équation (d) servirait encore à établir les propriétés des *polaires* et des *pôles*, dans les coniques; mais, en général, l'étude des courbes du second degré se fait plus simplement, d'après l'équation aux axes conjugués, quand l'origine est au centre.

XX. Projections orthogonales. Soit D la longueur d'une droite donnée dans l'espace et soit D' la *projection orthogonale* ou simplement la *projection* de D sur une autre droite, située ou non dans le même plan : si v désigne la mesure de l'angle compris, on démontre aisément que $D'=D\cos v$.

Soit F une aire plane quelconque, rectiligne, mixte ou curviligne, et soit F' sa projection sur un autre plan : si par un point de l'intersection des deux plans, on mène à celle-ci un plan perpendiculaire, il coupera F et F' suivant les deux droites *inscrites* D et D', dont l'angle v mesure le coin des deux plans proposés, et l'on a $D'=D\cos v$. Or, d'après la définition, la projection F' se trouve avec F absolument comme la projection D' se trouve avec D; donc puisque $D'=D\cos v$, on a aussi nécessairement $F'=F\cos v$.

Menant d'ailleurs un second plan perpendiculaire à l'intersection de deux plans de F et de F', et infiniment proche du premier, ce second plan coupera F et F' suivant les deux droites inscrites E et E', respectivement parallèles à D et à D'. Il est clair que D et E sont les bases d'un trapèze T, de hauteur h infiniment petite, lequel conséquemment est rectiligne; d'où $2T=h(D+E)$. De même, D' et E' sont les bases et h la hauteur du trapèze rectiligne T', projection de T; d'où $2T'=h(D'+E')=h(D+E)\cos v=2T\cos v$ et $T'=T\cos v$. Or, F est la somme de tous les T et F' celle de tous les T'; donc puisque $\cos v$ est constant, il vient $F'=F\cos v$.

On voit que *la projection est toujours le produit de la grandeur projetée multipliée par le cosinus numérique de l'angle compris.*

XX. But de ce mémoire. Les propriétés de la circonférence, qui n'est qu'une *particularité* de l'ellipse, conduisent immédiatement aux propriétés de cette dernière courbe, ou du moins les font prévoir; surtout quand on regarde l'ellipse comme la *projection* de la circonférence, ainsi que plusieurs géomètres l'ont pratiqué, pour quelques propriétés faciles. Dans le tome VIII de la *correspondance* Mathématique et Physique, dans les notes de géométrie, 2me édition et dans le traité de géométrie analytique (en

1837), les projections nous ont servi à établir plusieurs beaux théorèmes sur l'ellipse ; mais notre travail était incomplet. Le but spécial du présent Mémoire est de démontrer un grand nombre de propriétés de l'ellipse, d'après les méthodes les plus élémentaires.

Propriétés de l'Ellipse.

I. Axes principaux. Considérons la circonférence dont a est le rayon. Si nous faisons tourner le cercle autour de son diamètre horizontal fixe $2a$, pris pour axe des x rectangulaires, jusqu'à ce que le nouveau plan fasse avec le premier un angle v, moindre que 90° ; les pieds des perpendiculaires abaissées de tous les points de la circonférence, fixée dans la seconde position, déterminent, sur le premier plan, une courbe fermée et rentrante sur elle-même, *projection* de la circonférence proposée C. D'abord cette projection E a le même *centre* que C, puisque chaque diamètre $2a$ de C a pour projection une *corde* $2d$ de E, divisée en deux parties égales par le centre de C; de sorte que $2d$ est un *diamètre* de la courbe E. Ensuite, si b est la projection du rayon a, perpendiculaire à l'axe des x communs; les axes des y rectangulaires, dans les deux courbes, sont dirigés suivant le rayon a et sa projection b. Or, v est nécesssairement l'angle compris entre a et b ; donc $b=a\cos v$. De même, si Y et y' sont les ordonnées de C et de E, pour la même abscisse x,y sera la projection de Y et v l'angle compris : donc $y=Y\cos v$. D'ailleurs $Y^2+x^2=a^2$; ainsi $y^2+x^2\cos^2 v=a^2\cos^2 v$, d'où à cause de $b=a\cos v$, il vient

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit le point (x,y) de la projection E, la *représente* complètement et peut servir à la décrire. D'abord $x=0$ donne $y=\pm b$, et $y=0$ fournit $x=\pm a$; de sorte que $2a$ et $2b$ sont deux diamètres rectangulaires, situés sur les *axes de symétrie* des x et des y : ce sont les *axes principaux* ou simplement les *axes* de la courbe E. De plus, à cause de $b=a\cos v$ et de $\cos v<1$, on a $b<a$ ou $2b<2a$; ainsi $2a$ est le *grand axe* et $2b$ le *petit axe* de la courbe.

Rien n'empêche de poser $c^2=a^2-b^2$: le nombre c aura deux valeurs réelles, égales et de signes contraires, mais chacune $<a$. Prenant alors sur l'axe des x, de part et d'autre de l'origine O, centre de C et de E, deux longueurs égales à c; les deux points

résultants F et F′ tomberont sur le grand axe $2a$. Si donc r et r' sont les droites joignant F et F′ à un point quelconque (x,y) de la courbe E ; les deux triangles rectangles donnent

$$r^2=y^2+(x-c)^2 \text{ et } r'^2=y^2+(x+c)^2.$$

Dans ces deux équations (1), les x et les y ont mêmes valeurs respectives ; il en résulte donc

$$r=a-\frac{cx}{a} \text{ et } r'=a+\frac{cx}{a} ; \text{ d'où } r+r'=2a.$$

On appelle *ellipse* une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F′ est constamment égale à une droite donnée $2a$; donc la projection E est une ellipse, dont F et F′ sont les *foyers*, c l'*excentricité*, r et r' les *rayons vecteurs* d'un point quelconque (x,y) de la courbe. Connaissant donc les deux axes $2a$ et $2b$, de longueur et de position, il en résulte les deux foyers et la description de l'ellipse E, soit par *points* soit d'un *mouvement continu*.

2. Diamètres. Deux droites parallèles et leurs milieux, ayant pour projections respectives deux parallèles et leurs milieux ; on voit que tout diamètre $2a$ du cercle, évidemment *bisecteur* d'une suite de *cordes* parallèles entre elles et aux *tangentes* à ses extrémités, a pour projection un diamètre $2d$ de l'ellipse, lui-même *bisecteur d'une suite de cordes parallèles entre elles et aux tangentes à ses extrémités*. Car le contact et la tangente au cercle ont nécessairement pour projections le contact et la tangente à l'ellipse. Or, on a $2d=2a\cos v'$; et comme le maximum ou le minimum de l'angle v' est v ou 0, il est clair au contraire que le minimum ou le maximum du diamètre $2d$ est $2b$ ou $2a$. Ainsi *les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus petit et l'autre le plus grand de tous ses diamètres*.

3. Équations aux axes conjugués. Prenons deux diamètres rectangulaires de la circonférence C pour axes des coordonnées X et Y ; ils auront pour projections deux diamètres $2a'$ et $2b'$, axes des x et des y *obliques*, de l'ellipse E. Soit (X,Y) un point quelconque de C, d'où $X^2+Y^2=a^2$; ce point a pour projection le point (x,y) de E. Or, a et X, sur une même droite, ont pour projections a' et x, sur une même droite ; donc $a:a'=X:x$. De même, Y et sa projection y sont respectivement parallèles au rayon a et à sa projection b' ; donc $a:b'=Y:y$. Prenant dans ces proportions, les

valeurs de X et de Y, puis substituant dans $X^2+Y^2=a^2$, on trouve

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Comme le point (x,y) de E est ici quelconque, les équations (1) et (2) *représentent* chacune l'ellipse E. Ces équations ont absolument la même forme, quel que soit, dans la seconde, l'angle θ; et dans celle-ci les axes des coordonnées sont dits *conjugués*, parce qu'ils vont toujours ensemble et que l'un étant tracé, l'autre s'en déduit immédiatement. De plus, dans l'équation (2), les diamètres $2a'$ et $2b'$, sur les axes conjugués des x et des y, sont dits eux-mêmes *diamètres conjugués;* ainsi *deux diamètres rectangulaires quelconques de la circonférence* C *ont toujours pour projections deux diamètres conjugués de l'ellipse* E. Celle-ci admet donc une infinité de systèmes de diamètres conjugués, dont un seul rectangulaire, celui des deux axes $2a$ et $2b$.

4. Paramètres. En général, l'angle θ des coordonnées étant quelconque, toute équation de la forme $My^2+Nx^2=P$ représente une ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$; car $y=0$ dans cette équation donne $Na'^2=P$ et $x=0$ fournit $Mb'^2=P$; d'où en substituant dans cette équation les valeurs de M et de N, savoir P sur b'^2 et P sur a'^2, il vient l'équation (2). Celle-ci, en y changeant x en $x-a'$, et posant $a'p=b'^2, a'^2q=b'^2$, devient

$$y^2=2px-qx^2=px(2a'-x) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

C'est l'équation au *paramètre diamétral* $2p$, donné par la proportion $2a':2b'::2b':2p$. Dans l'équation (1) de l'ellipse, le *paramètre* $2p$ est la double ordonnée dont le pied tombe au foyer F; c'est une troisième proportionnelle aux deux axes $2a$ et $2b$.

5. Cordes supplémentaires I. Dans les lignes du second ordre, les cordes menées des extrémités d'un même diamètre à un point quelconque de la courbe, sont dites *cordes supplémentaires*. Or, il est évident que les deux diamètres rectangulaires de C sont bissecteurs de deux cordes supplémentaires, respectivement parallèles à eux et aux tangentes à leurs extrémités; donc aussi *les deux diamètres conjugués* $2a'$ *et* $2b'$ *sont bissecteurs des deux cordes supplémentaires de l'ellipse* E, *respectivement parallèles à eux et aux tangentes à leurs extrémités.* Les deux cordes comprennent donc un angle égal et opposé à celui des deux diamètres. Si donc l'ellipse E et un diamètre sont tracés; en décrivant sur celui-ci un segment capable de l'angle donné α, les deux diamètres respectivement

parallèles aux deux cordes supplémentaires menées à l'un des points d'intersection de l'arc du segment avec l'ellipse, sont conjugués et comprennent l'angle donné α. Si cet angle est droit, on a les deux axes $2a$ et $2b$.

II. L'angle des deux cordes supplémentaires du cercle, menées des extrémités du grand axe $2a$, étant droit, sa projection, angle des deux cordes supplémentaires de l'ellipse, menées des deux mêmes extrémités, est nécessairement obtus et le plus grand possible lorsque les deux cordes se coupent à une extrémité de $2b$; car l'axe du segment capable du premier angle obtus, arc décrit sur la corde $2a$, rencontre le prolongement de b. On verra de même que l'angle compris entre les deux cordes supplémentaires menées des extrémités du petit axe $2b$, est toujours aigu et le moindre possible lorsque les deux cordes se coupent à une extrémité de $2a$. Or, les extrémités des deux axes $2a$ et $2b$, s'appellent les *sommets* de l'ellipse E : il y a donc quatre sommets de la courbe, en même temps sommets d'un *losange inscrit*, dont les côtés sont les *cordes* des sommets de l'ellipse. Ce *losange des sommets*, ayant les deux axes $2a$ et $2b$ pour diagonales, est la moitié du *rectangle circonscrit*, touchant la courbe aux quatre sommets. Celui-ci ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles à $2a$ et $2b$, est dit le *rectangle des axes*, et son aire a pour mesure $4ab$. Il est clair d'ailleurs que le rectangle des axes et le losange des sommets sont les projections respectives du carré circonscrit, touchant le cercle aux extrémités du grand axe $2a$, et du carré inscrit, joignant les contacts du premier.

III. Les diagonales du rectangle des axes, étant respectivement parallèles aux cordes supplémentaires des sommets et les divisant en deux parties égales chacune, ont sur elles deux diamètres conjugués, égaux évidemment et comprenant l'angle obtus maximum ou l'angle aigu minimum. Car ces deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, projections des deux diamètres rectangulaires du cercle (dirigés suivant les diagonales du carré circonscrit, dont le rectangle $4ab$ est la projection) font avec ces diamètres, deux angles égaux à v'; d'où $a'=a\cos v'$ et $b'=a\cos v'$. Cela donne $2a'=2b'$ et l'équation (2) de l'ellipse E devient $y^2+x^2=a'^2$.

IV. Soient d'ailleurs n et n' les directions des cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe de l'ellipse E : on trouve aisément $a^2nn'+b^2=0$. Il est clair que n et n' sont aussi les directions des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, respectivement paral-

lèles à ces deux cordes ; le produit nn' est donc constant et négatif. Et comme la relation $a^2nn'+b^2=0$ est unique, on voit que *tout diamètre de l'ellipse a son conjugué et n'en a qu'un seul*, ce diamètre étant bisecteur d'un seul système de cordes parallèles. De sorte que le centre et les milieux d'une suite de cordes parallèles sont en ligne droite. Donc l'ellipse E étant tracée, *les droites passant par les milieux de deux couples de cordes parallèles, se coupent au centre.* De plus, dans un système de cordes parallèles, les cordes à égales distances du centre de part et d'autre, sont égales entre elles ; et plus une corde est éloignée du centre, plus elle est petite.

V. Observons encore que tout diamètre divise l'ellipse en deux parties *superposables* et *symétriques* par rapport au centre ; tandis que deux diamètres quelconques de la courbe divisent toute corde, parallèle à celle qui joint leurs extrémités, en trois parties dont les deux extrêmes sont égales entre elles. Observons enfin que la plus petite corde, menée par un point donné dans l'intérieur de l'ellipse, est parallèle au conjugué du diamètre passant par ce point ; ce dernier diamètre étant lui-même la plus grande corde en ce point donné.

6. Relations des diamètres avec les axes. Soient n et n' les directions de deux diamètres quelconques $2a'$ et $2b'$ de l'ellipse E, dont $2a$ et $2b$ sont les axes, sur ceux de symétrie des x et des y. Pour l'extrémité (x,y) de a', on a les trois équations simultanées

$$y=nx,\ a'^2=x^2+y^2 \text{ et } a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Éliminant x et y de ces équations et opérant de même pour b', on trouve

$$\left.\begin{aligned}(a^2n^2+b^2)a'^2&=a^2b^2(1+n^2),\\(a^2n'^2+b^2)b'^2&=a^2b^2(1+n'^2).\end{aligned}\right\}\ \cdots\ (4)$$

Ces deux relations remarquables serviront à calculer les diamètres $2a'$ et $2b'$, dès que leurs directions n et n' seront données, avec les axes, et réciproquement, en observant qu'on ne saurait avoir $n=n'$.

7. Diamètres égaux. Si $n'=-n$, il est clair qu'on aura $a'=b'$; réciproquement, si $a'=b'$, les relations (4), divisées l'une par l'autre, donneront ensuite

$$(a^2-b^2)(n'-n)(n'+n)=0\ ;\ \text{d'où } n'=-n.$$

Comme la direction n reste encore tout-à-fait arbitraire, on voit que *l'ellipse admet une infinité de couples de diamètres égaux, également inclinés sur le grand axe, de part et d'autre du petit.* Il

existe par conséquent une infinité de *rectangles inscrits*, dont les côtés sont parallèles aux deux axes ; et parmi ces rectangles, un seul *carré inscrit*, ayant ses diagonales égales et perpendiculaires entre elles, leurs directions étant par suite $n=1$ et $n'=-1$.

8. DIAMÈTRES RECTANGULAIRES. Pour que les diamètres $2a'$ et $2b'$ soient perpendiculaires l'un à l'autre, il faut que leurs directions n et n' satisfassent à la relation $nn'+1=0$. Cette relation est unique et laisse entièrement indéterminée n' ou n, vu que les relations (4) ne donnent a' et b' que quand n et n' sont connues ; ainsi l'*ellipse admet une infinité de couples de diamètres rectangulaires, diagonales d'une infinité de losanges inscrits, concentriques.*

De plus, soit z l'hypoténuse du triangle dont a' et b' sont les deux autres côtés, et soit h la hauteur menée de l'angle droit : on aura simultanément $hz=a'b'$ et $z^2=a'^2+b'^2$. Par ces deux relations, on voit d'abord que 1 sur h^2 vaut 1 sur a'^2+1 sur b'^2 ; mais cette dernière somme vaut 1 sur a^2+1 sur b^2, en vertu des relations (4), où l'on substitue, au lieu de n' sa valeur -1 sur n ; donc

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

Cette double relation est indépendante de n et s'applique encore au losange des sommets ; de sorte que *h est le rayon du cercle inscrit dans tous les losanges, inscrits eux-mêmes dans l'ellipse proposée* E *et tous concentriques avec elle, dont un seul carré.*

9. DIAMÈTRES CONJUGUÉS I. Si n et n' sont les directions de deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, on aura la relation unique $a^2nn'+b^2=0$; et alors les relations (4) deviendront, en éliminant $b^2=-a^2nn'$:

$$(n'-n)a'^2=a^2n'(1+n^2),$$
$$(n'-n)b'^2=-a^2n(1+n'^2).$$

Combinant ces deux égalités par addition et multiplication, puis désignant par s le sinus de l'angle θ entre les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, d'où $(1+n^2)(1+n'^2)s^2=(n'-n)^2$, ainsi qu'on le vérifie par $s=\sin(\alpha'-\alpha)$, $n=\operatorname{tang}\alpha$ et $n'=\operatorname{tang}\alpha'$; il est clair qu'on trouvera

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \text{ et } a'b's=ab \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

II. Ces relations sont importantes et la première, qui revient à $4a'^2+4b'^2=4a^2+4b^2$, nous apprend que, *dans l'ellipse, la somme des carrés faits sur deux diamètres conjugués quelconques, vaut la*

somme des carrés faits sur les deux axes et se réduit au carré construit sur la double corde 2z *des sommets.*

III. Quant à la seconde relation $4a'b's=4ab$, comme les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles à son conjugué (5), les quatre tangentes aux extrémités de $2a'$ et $2b'$ forment un parallélogramme P *circonscrit*, dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles à $2a'$ et $2b'$; ils comprennent donc l'angle dont s est le sinus ; de sorte que l'aire $P=4a'b's=4ab$. On voit que, *dans l'ellipse, le parallélogramme circonscrit, ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, vaut le rectangle des deux axes.*

IV. Le parallélogramme P circonscrit est dit *conjugué*, pour le distinguer de tout autre parallélogramme circonscrit, formé par les quatre tangentes aux extrémités de deux diamètres quelconques ; lequel ne jouit pas des mêmes propriétés que P. D'ailleurs, tout carré $4a^2$ circonscrit au cercle C a évidemment pour projection un parallélogramme conjugué P ; donc $P=4a^2\cos v=4ab$. De plus, tout parallélogramme P' circonscrit au cercle C a pour projection un parallélogramme P circonscrit à l'ellipse, d'où $P=P'\cos v$. Or, P' est le moindre possible dès qu'il est le carré $4a^2$; donc P sera aussi le moindre possible et vaudra $4ab$. *Le parallélogramme conjugué est donc le plus petit de tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse*, ce parallélogramme conjugué pouvant être le rectangle des deux axes.

V. Observez d'ailleurs que la somme des carrés faits sur les diagonales de tout parallélogramme conjugué vaut le double carré fait sur la double corde des sommets ; tandis que si les deux diamètres conjugués sont égaux, le carré fait sur l'un est double du carré fait sur la corde des sommets. D'ailleurs les directions n et n' des deux diamètres conjugués égaux sont données par $an=b$ et $an'=-b$; elles sont donc respectivement les mêmes que les directions des diagonales du rectangle des deux axes.

VI. Soit z la corde des sommets, d'où $z^2=a^2+b^2$; les relations (5) deviennent donc

$$(a'+b')^2=z^2+2ab:s \text{ et } 2ab:s=z^2-(a'-b')^2.$$

Les nombres a, b, z, sont constants, tandis que les nombres s, a', b' sont variables ; donc si $a'=b'$, s est un *minimum* et $a'+b'$ un *maximum* égal à $z\sqrt{2}$. De plus, on voit que les deux diamètres conjugués égaux comprennent le plus petit angle aigu ou le plus

grand angle obtus. Enfin, le *maximum* du sinus s étant le rayon 1, on voit au contraire que le *minimum* de $a'+b'$ est $a+b$.

VII. Soient (X,Y) et (X',Y') les extrémités de deux diamètres rectangulaires de la circonférence C ; elles ont pour projections les extrémités (x,y) et (x',y') des deux demi-diamètres conjugués a' et b' de l'ellipse E. Or, il est aisé de voir que $X=Y'$, et $Y=X'$; donc les deux rectangles XY et X'Y' sont égaux : ils ont pour projections les parallélogrammes faits sur x et y, sur x' et y' ; donc *ces deux parallélogrammes sont équivalents*. De plus, les coordonnées étant rectangulaires, dans C et E, on a $x=X$, $x'=X'$, $y=Y\cos v=X'\cos v$ et $y'=Y'\cos v=X\cos v$. D'ailleurs $a^2=X^2+Y^2=X^2+X'^2$; donc $a^2=x^2+x'^2$, et par suite $b^2=y^2+y'^2$. Ces deux théorèmes remarquables fournissent la relation $a'^2+b'^2=a^2+b^2$.

10. EQUATIONS DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE. L'angle des coordonnées étant quelconque, dans l'ellipse E, rapportée à ses diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, il est bien facile de calculer l'équation de sa tangente, d'après celle de la tangente au point (X',Y') de la circonférence C. D'abord en ce point, il n'y a que la seule tangente $YY'+XX'=a^2$; donc au point (x',y') de l'ellipse, il n'y a que la seule tangente $y=nx+h$. D'ailleurs a et X', situés en ligne droite, ont pour projections a' et x', aussi en ligne droite ; donc $a:a'=X':x'$. De même, Y' et sa projection y' sont respectivement parallèles à a et à sa projection b' ; donc $a:b'=Y':y'$. On a donc les quatre relations simultanées :

$$ax'=a'X',\ ay'=b'Y',\ ax=a'X \text{ et } ay=b'Y.$$

Par ces relations et en substituant dans $YY'+XX'=a^2$, l'équation de la tangente à l'ellipse, au point (x',y'), devient

$$a'^2yy'+b'^2xx'=a'^2b'^2 \quad . \ . \ . \quad (6)$$

C'est d'ailleurs ce qu'on trouverait en éliminant y' des deux équations simultanées $a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$ et $y'=nx'+h$, puis en observant que les deux valeurs de x', dans l'équation finale, sont égales entre elles, comme devant se réduire à une seule. Cette condition fournit les deux relations

$$a'^2n^2+b'^2=h^2 \text{ et } a'^2ny'=-b'^2x' ;$$

lesquelles réduisent à (6) l'équation de la tangente $y=nx+h$, mise sous la forme $y-y'=n(x-x')$. Si les cordonnées sont rectangulaires, a' et b' se changent en a et b.

Enfin, comme d'un point donné hors de la circonférence, on

peut mener deux tangentes à cette courbe ; de même, il y a deux tangentes à l'ellipse qui partent d'un point donné au-dehors. Il est clair d'ailleurs que les tangentes à l'ellipse et au cercle, étant la première projection de la seconde, rencontrent au même point T l'axe des x rectangulaires ; elles ont donc la même *soutangente* TP, P étant le pied commun des deux ordonnées y' et Y' ; d'où $x' \cdot TP = a^2 - x'^2$. Delà *le moyen de mener la tangente à l'ellipse* E, *par un point donné sur cette courbe ;* mais le suivant est préférable.

11. Construction de la tangente. Les deux foyers F et F' sont utiles, non-seulement pour décrire l'ellipse E, dont on connaît le grand axe $2a$; mais aussi pour lui mener une tangente GT, par un point donné M sur cette courbe. En effet, le point M étant sur l'ellipse, on a, d'après la définition, $MF + MF' = 2a$; tandis que le point G de la tangente GT étant hors de l'ellipse, on a $GF + GF' > 2a$. Le point M de GT est donc tel que la somme de ses distances aux deux foyers F et F' est la moindre possible ; donc (géométrie) l'angle FMT = F'MG. Soient d'ailleurs v et v' les deux angles FMT et F'MT : on trouve $cy' \operatorname{tang} v = b^2$ et $cy' \operatorname{tang} v' = -b^2$; donc $v = 180° - v'$ = F'MG. Ainsi *dans l'ellipse, les rayons vecteurs du point* M *de contact font avec la tangente* GT *et d'un même côté, deux angles égaux* (delà vient la dénomination de *foyer* donné à chacun des points F et F'). Donc *pour tracer la tangente au point* M, *il suffit de mener la bisectrice du supplément de l'angle* FMF'.

Cette construction montre aussi comment on peut mener les deux tangentes à l'ellipse, soit par un point donné au-dehors, soit parallèles ou perpendiculaires à une droite donnée ; et il en résulte les théorèmes, faciles à démontrer, que voici :

I. La circonférence décrite sur le grand axe $2a$, comme diamètre, coupe la tangente aux pieds des perpendiculaires P et P', abaissées sur elle des deux foyers F et F'.

II. Le demi-second axe b est moyen proportionnel entre ces deux perpendiculaires ; de sorte que $PP' = b^2$.

III. La droite, passant par le foyer et partant du point de contact M, extrémité d'un diamètre MOM', est égale au grand axe $2a$, quand on la termine à la tangente en M', les deux tangentes en M et en M' étant d'ailleurs parallèles entre elles. Il y a toujours quatre de ces deux droites, se coupant deux à deux aux foyers F et F'.

IV. On peut toujours décrire l'ellipse dont on connaît un diamètre et la longueur du grand axe, si l'on a la tangente à une extrémité de ce diamètre.

V. On peut sans connaître les axes d'une ellipse tracée, lui mener une tangente, soit en un point donné, soit parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

VI. La portion de toute tangente à l'ellipse, entre les deux tangentes aux extrémités du grand axe $2a$, est le diamètre de la circonférence passant par les deux foyers. De plus, Y et Y' désignant les ordonnées de la première tangente, qui ont leurs pieds aux extrémités de $2a$, on a $b^2=YY'$. Et si d et d' sont les distances d'un foyer aux extrémités de $2a$, on aura $b^2=dd'$.

12. Description de l'ellipse. I. On peut toujours décrire, *par points successifs*, l'ellipse dont on a l'équation numérique; mais le calcul des coordonnées successives est beaucoup plus compliqué que quand la courbe est rapportée à ses axes principaux, où alors on a les deux foyers et où d'ailleurs la description peut se faire par un mouvement continu. Pour décrire l'ellipse, dont on a l'équation numérique, il faut donc calculer d'abord ses deux axes ou les construire. La chose est facile quand l'ellipse est rapportée à ses deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, donnés et tracés; et il y a, pour cet effet, deux procédés, également très-simples.

1° Les relations (5), combinées par addition et soustraction, après avoir doublé la seconde, donnent celles-ci :

$$(a+b)^2=a'^2+b'^2+2a'b's=d^2,$$
$$(a-b)^2=a'^2+b'^2-2a'b's=d'^2.$$

Les seconds membres seront toujours positifs, vu que le sinus $s<1$ et que $a'^2+b'^2>2a'b'$; dont les deux droites d et d' seront toujours réelles. Soit v le complément de l'angle θ des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, d'où $s=\cos v$; d et d' sont donc les troisièmes côtés des deux triangles t et t', dont a' et b' sont les deux autres côtés donnés, les angles compris étant $180°-v$ dans t et v dans t'. D'après la trigonométrie, les côtés d et d' se calculent aisément par logarithmes; mais on peut construire immédiatement d et d'.

Soit O le centre de l'ellipse E, où $OA=a'$ et $OB=b'$. Menons BK perpendiculaire à OA, d'où $BK=b's$; sur les prolongements de BK, prenons $BD=BKC=a'$: il en résulte $OD=d=a+b$ et $OC=d'=a-b$; donc $2a=OD+OC$ et $2b=OD-OC$.

2° Soient X et Y les distances du centre O aux points où la tangente $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$ rencontre les deux axes prolongés, d'où $Xx'=a^2$ et $Yy'=b^2$; soient s et s' les distances de ces deux points

au contact (x',y'), extrémité du diamètre $2a'$, son conjugué $2b'$ étant parallèle à la tangente. On a donc simultanément

$a'^2+b'^2=a^2+b^2$, $(s+s')^2=X^2+Y^2$, $s^2=y'^2+(X-x')^2$.

et $s'^2=x'^2+(Y-y')^2$; d'où $ss'=b'^2$.

La circonférence décrite sur $s+s'$, comme diamètre, passe par le centre O ; et si d désigne le prolongement de a' jusqu'à la circonférence, on aura $da'=ss'=b'^2$. La longueur d étant ainsi connue, aussi bien que la droite $d+a'$, il est clair que la perpendiculaire au milieu de celle-ci va couper la parallèle à $2b'$, menée par l'extrémité (x',y') de a', au centre H de la circonférence proposée, ayant HO pour rayon et interceptant $s+s'$ sur la parallèle tangente. De sorte que les distances X et Y, directions des deux axes $2a$ et $2b$, sont déterminées entièrement, aussi bien par suite que x' et y'. Ayant ainsi les directions des deux axes, on calculera ou construira leurs longueurs par $a^2=Xx'$ et $b^2=Yy'$. On aura donc aussi les deux foyers F et F' et l'on pourra décrire ensuite l'ellipse E. (Ce second procédé très-simple est peu connu : il s'applique à la description de l'*hyperbole*).

II. L'ellipse E étant la projection de la circonférence, il en résulte, pour *décrire l'ellipse circonscrite à un pentagone convexe donné*, ce théorème : Si dans l'ellipse, deux sécantes, qui se coupent, sont respectivement parallèles à deux autres sécantes qui se coupent, et si l'on multiplie entre eux les deux segments d'une même sécante, depuis le point commun jusqu'à la courbe ; les produits fournis par les deux premières sécantes sont proportionnels aux produits fournis par les deux dernières.

Cette propriété fait connaître, de longueurs et de position, deux diamètres conjugués de l'ellipse circonscrite cherchée.

En général, l'équation complète du second degré n'ayant au fond que cinq coefficients arbitraires ; ceux-ci étant connus, déterminent la courbe complètement. *La construction d'une ligne du second ordre exige donc, au plus, cinq données ou cinq conditions distinctes ;* et ainsi l'on peut décrire l'ellipse inscrite dans un pantagone convexe tracé, laquelle est unique.

III. Lorsque l'ellipse E est rapportée à deux diamètres quelconques, son équation est de la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=1, \quad \ldots \quad (7)$$

A, B, C étant des nombres donnés, le premier et le dernier positifs. Soit d un demi-diamètre quelconque, p le cosinus et s le sinus de l'angle des coordonnées ; on a donc

$$y=nx \text{ et } d^2=x^2+y^2+2pxy.$$

Ici x et y sont les coordonnées de l'extrémité de d et leurs valeurs sont respectivement les mêmes, dans les trois équations. Eliminant donc x et y, on aura une équation finale du second degré, ne contenant plus que les deux variables n et d. Or, les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit de tous ses diamètres (2); pour calculer les deux axes $2a$ et $2b$, il faut donc résoudre l'équation finale par rapport à n. Observant alors que le maximum et le minimum de d rendent nulle la quantité sous le radical de n, on aura, pour calculer ce maximum a et ce minimum b, l'équation

$$(4AC-B^2)d^4-4(A+C-Bp)d^2+4s^2=0.$$

Donc puisque a^2 et b^2 sont les deux racines de cette équation, on a

$$(4AC-B^2)(a^2+b^2)=4(A+C-Bp) \text{ et } (4AC-B^2)a^2b^2=4s^2 \ldots (8)$$

Ces deux relations serviront à calculer $2a$ et $2b$; lesquels sont nécessairement les deux axes, puisque leurs directions n et n' satisfont à la condition de perpendicularité, savoir $1+nn'+(n+n')p=0$. On sait d'ailleurs que ces deux axes sont ceux de l'*ellipse* ou de l'*hyperbole*, suivant que $4AC-B^2$ est positif ou négatif; et si les coordonnées sont rectangulaires, on aura $p=0$ et $s=1$. Si $B=0$, les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$ seront donnés par $Ca'^2=1$ et $Ab'^2=1$; d'où $a'^2+b'^2=a^2+b^2$ et $a'b's=ab$.

IV. Lorsque l'ellipse est représentée par l'équation complète, du second degré entre les deux variables x et y; on la ramène d'abord à la forme (7), en passant du système proposé à un autre parallèle, pour faire disparaître les premières puissances de x et de y. Par exemple, proposons-nous de *décrire la courbe passant par les cinq points donnés* (0,1), (0,2), (2,0), (3,0) et $(1,\frac{1}{3})$, *les coordonnées étant rectangulaires.*

Substituant dans l'équation du second degré complète

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0;$$

on aura cinq équations, du premier degré chacune, pour calculer les six coefficients inconnus A, B, C, D, E, F; et la courbe cherchée sera représentée par

$$3y^2+2xy+x^2-9y-5x+6=0.$$

Faisant disparaître les premières puissances de x et de y, la même courbe est représentée par

$$12y^2+8xy+4x^2=9.$$

Ici $A=\frac{13}{9}$, $B=\frac{8}{9}$, $C=\frac{4}{9}$, $p=0$ et $s=1$; donc les relations (8) deviennent

$$2(a^2+b^2)=9 \text{ et } 32a^2b^2=81.$$

Il en résulte, d'une manière aussi rapprochée qu'on veut, les deux axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse cherchée. On connaît d'ailleurs le centre à la nouvelle origine, et les directions des deux axes ; on peut donc aisément décrire l'ellipse demandée. Les longueurs des demi-diamètres rectangulaires d et d', auxquels elle est rapportée, sont données par $4d^2=9$ et $12d'^2=9$.

V. Observons enfin que, dans l'équation complète, on peut, en la résolvant par rapport à y, en déduire l'équation $6Y=-2x+9$ d'un diamètre $2a'$, facile à construire, par $x=0$ et $Y=0$. Les extrémités de $2a'$ sont données par les valeurs de x, qui rendent nul le radical de y, savoir $4x=6\pm\sqrt{6}$; d'où $12y=12\mp\sqrt{6}$. Aux extrémités de $2a'$, ainsi déterminées, les deux ordonnées sont tangentes à la courbe ; donc la parallèle à l'axe des ordonnées, menée par le milieu de $2a'$; c'est-à-dire par le *centre* de l'ellipse, est la direction du diamètre $2b'$, conjugué de $2a'$. Substituant dans l'équation complète la valeur de l'abscisse du centre, savoir $x=\frac{3}{2}$, on aura les ordonnées des extrémités de $2b'$, savoir $y=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. On connaît donc, de position et de longueur, chacun des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$; et ainsi l'on peut décrire l'ellipse. Les longueurs sont $2a'=\frac{1}{3}\sqrt{15}$ et $2b'=\sqrt{3}$; vu que les coordonnées étant rectangulaires, $2a'$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ et $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ sont les autres côtés ; tandis que $2b'$ est la différence des ordonnées de ses extrémités.

VI. Tels sont les divers procédés pour décrire l'ellipse, dont l'équation est donnée numériquement. Mais on peut quelquefois simplifier les calculs, comme dans le problème : *Les coordonnées rectangulaires de chaque point du plan sont les dimensions d'un rectangle variable* R ; *quel est le lieu géométrique de tous ces points*, 1° *lorsque le carré de la diagonale de* R, *plus l'aire du rectangle, donne le carré* 36 ? 2° *lorsque le carré de la diagonale, plus ou moins le double rectangle, donne* 64 ? 3° *enfin, lorsque* 4 *fois l'aire du rectangle, moins le carré de sa diagonale, fournit le carré* 100 ?

Dans le premier cas, on a $x^2+y^2+xy=36$ et $x^2+y^2=d^2$. On trouve aisément, pour le maximum de d^2, $y=-x$ et $a^2=72$; pour le minimum de d^2, $y=x$ et $b^2=24$. Le lieu cherché est donc une ellipse, facile à décrire, puisque l'on connaît ses deux axes $2a$ et $2b$, bisecteurs des angles droits des axes des coordonnées.

13. NORMALE I. Toute *normale* à l'ellipse est perpendiculaire à la tangente, au point de contact ; *la normale est donc bisectrice de l'angle compris par les deux rayons vecteurs, menés au point de tangence*, et rencontre, par suite, le grand axe entre les deux foyers. Connaissant donc les deux foyers et un point de l'ellipse, il est facile de lui mener, par ce point, la normale et par suite la tangente.

II. Soit n' la direction de la normale et n celle de la tangente à l'ellipse, au point (x',y'), les coordonnées étant rectangulaires ; on aura donc simultanément

$$nn'+1=0 \text{ et } a^2ny'+b^2x'=0 \text{ ; d'où } b^2n'x'=a^2y'.$$

L'équation de la normale, savoir $y-y'=n'(x-x')$, devient donc

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x') \quad . \quad . \quad (9)$$

La *sounormale* est $x-x'$; elle répond à $y=0$, dans (9), et elle est fournie par

$$a^2(x-x')=-b^2x'.$$

La sounormale ne dépend point de l'ordonnée y' du contact et a toujours un signe contraire à celui de x'; d'où $x<x'$.

III. Soit Y l'ordonnée qui répond à l'abscisse x', pour la circonférence décrite sur $2a$, comme diamètre, et dans le plan de l'ellipse ; on aura $Y:y'::a:b$ ou $bY=ay'$. Soit d la distance de l'origine au point où la normale (9) va couper la droite $y=px$, passant par le point (x',Y) ; d'où $d^2=x^2+y^2$, $Y=px'$ et $bpx'=ay'$. L'équation $y=px$ devient donc $y-Y=p(x-x')$ et $bx'y-ax'y'=ay'(x-x')$.

Les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans cette équation, celle de la normale et $d^2=x^2+y^2$, pour l'intersection (x,y) de la droite $y=px$ avec la normale (9) ; éliminant donc x et y de ces équations et ayant égard à $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, on trouve

$$d=a+b.$$

(Ce théorème remarquable m'a été communiqué par mon collègue M. Brasseur).

IV. Soit (X,0) un point donné sur l'axe des x rectangulaires et z la distance de ce point au point quelconque (x,y) de l'ellipse. Pour calculer le minimum de z, on a les deux équations simultanées

$$z^2=y^2+(x-X)^2 \text{ et } a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Éliminant y^2, on verra que le minimum de z répond à

$$c^2x=a^2X, \text{ d'où } c^4y^2=b^2(c^4-a^2X^2) ;$$

et que ce minimum est donné par la relation

$$c^2z^2 = b^2(c^2 - X^2).$$

Le plus grand minimum de z répond à $X=0$ et se réduit à b; tandis que le moindre minimum de z répond au maximum de X, savoir c^2 sur a; il est donc donné par $az=b^2$; d'où $y=0$ et $x=\pm a$. Le maximum de X est moindre que c, comme on le sait déjà (1).

Soit n' la direction de la droite minimum z; on aura $y=n'(x-X)$. La direction n de la tangente au point (x,y) de l'ellipse, est donnée par $a^2ny=-b^2x$; donc puisque $c^2x=a^2X$, il vient $nn'+1=0$. Ainsi *un point étant donné sur le grand axe, entre les deux foyers; la plus courte distance de ce point à l'ellipse est la normale à cette courbe.*

V. On verrait semblablement que *la plus grande distance* z, *d'un point* (0,Y) *du second axe* 2b, *à l'ellipse, est la normale menée de ce point.* On trouve en effet, pour le maximum de z, les relations $c^2y=-b^2Y$, $c^4x^2=a^2(c^4-b^2Y^2)$ et $c^2z^2=a^2(c^2+Y^2)$.

Comme on le pouvait prévoir, les ordonnées y et Y sont toujours de signes contraires. Cela résulte d'ailleurs de ce que le maximum et le minimum de Y étant c^2 sur b et 0, le plus grand et le moindre maximum de z sont a^2 sur b et a, répondant à $y=-b$ et à $x=\pm a$.

14. Des courbures dans l'ellipse I. Toute courbe plane pouvant être considérée comme formée d'un nombre infini d'*éléments rectilignes*, chacun infiniment petit, on appelle *courbure* de la courbe en un point donné, l'angle *infiniment petit*, ayant pour sommet ce point donné et pour côtés un élément et le prolongement de celui qui le précède immédiatement.

Il suit de là que *la circonférence est une courbe uniforme, ayant la même courbure en chaque point.* On sait, en effet, que le cercle n'est au fond qu'un polygone régulier, d'un nombre infini n de côtés, égaux à x et infiniment petits; de sorte que la circonférence a nx pour longueur rectiligne. Dans ce polygone régulier, tous les angles *extérieurs*, formés dans le sens du périmètre, c'est-à-dire tous les *angles de courbure*, sont égaux à l'angle au centre ω et valent ensemble 360°, d'où $n\omega=360°$. De sorte que la courbure ω est un angle constant infiniment petit.

II. Considérons la droite nx, composée du nombre infini n d'éléments égaux à x, et courbons-là en *arc circulaire*, de rayon r. Soit α l'arc, de rayon 1, qui mesure la courbure, égale alors à l'angle au centre : les deux arcs α et x étant semblables, on a

$1 : r = x : x$; d'où $x = rx$. Si $r = 1$ et que α' mesure la nouvelle courbure, on aura alors $x = \alpha'$; d'où $r\alpha = \alpha'$. Prenant pour *unité* invariable la courbure α', dans le cercle dont 1 est le rayon, d'où $r\alpha = 1$; *la courbure* α *de toute circonférence aura pour mesure la valeur inverse de son rayon.* Et si ce dernier est *infini*, ou plutôt s'il est 1 sur 0, on aura $\alpha = 0$. Il n'y a donc point de courbure quand l'arc circulaire n'a point de rayon, c'est-à-dire devient une droite.

III. La courbure de toute circonférence étant ainsi bien connue, peut servir à évaluer numériquement la courbure de toute ligne plane en un point donné, commun à deux éléments consécutifs de cette courbe. Car si par les milieux de ces deux éléments, on conçoit deux normales, infiniment voisines, se coupant en un point O, ce point est le centre du cercle, dont la circonférence contient sur elle les deux éléments proposés, évidemment ; la courbure au point donné est donc la même que celle de la circonférence, en ce point (nommé *contact du second ordre* de la courbe avec la circonférence, dite *osculatrice* de la courbe au point donné) ; et cette *courbure est mesurée par la valeur inverse du rayon du cercle.* Voilà pourquoi le centre O, le rayon r et le cercle sont dits *centre*, *rayon* et *cercle de courbure* au point donné. De plus, ce point donné est un point d'*inflexion* ou de *rebroussement* de la courbe proposée, quand le rayon r change de signe ou devient infiniment petit.

15. DÉVELOPPÉE ET DÉVELOPPANTE. Les centres de tous les cercles *osculateurs* d'une courbe plane donnée C, étant infiniment voisins les uns des autres, déterminent une autre courbe C′ telle, que *chaque tangente à celle-ci est normale à la première, et réciproquement ;* car les éléments successifs de C′ sont les prolongements des rayons de courbure consécutifs de C. De plus, concevons C′ enveloppée d'un *fil* inextensible et flexible, ce fil étant prolongé tangentiellement au-delà de la première extrémité de C′, d'une longueur égale au premier rayon de courbure de C ; il est clair que si, tenant toujours ce fil tendu, on le fait mouvoir de manière à le détacher successivement des divers points de C′, l'extrémité mobile décrira la courbe C, et chaque point intermédiaire, une courbe parallèle à C. A raison de cette propriété, fort remarquable, propre à *rectifier* la courbe C′, celle-ci est dite la *développée* de C, et C la *développante* de C′. C'est ainsi que, dans le triangle équilatéral dont a est le côté, le contour ou la ligne brisée $3a$ est la développée de la ligne *discontinue* composée de trois arcs circulaires, de chacun 120°, dont les centres (de courbure) sont les trois sommets du triangle et dont a $2a$ et $3a$ sont les rayons.

On voit qu'une développante ne peut avoir qu'une seule développée (le centre pour la circonférence), mais qu'une développée peut avoir une infinité de développantes. Aussi la développée est-elle à l'égard de la développante, ce que le centre est à l'égard de la circonférence.

16. Développée de l'ellipse. Cherchons la développée de l'ellipse, rapportée à ses axes $2a$ et $2b$. Soient $x=k$ et $y=h$, $x=k+u$ et $y=h+v$, deux points de l'ellipse, *infiniment voisins;* de telle sorte que les longueurs numériques u et v soient infiniment petites. Les normales à ces deux points sont représentées par

$$Y-h=\frac{a^2h}{b^2k}(X-k),$$

$$Y-h-v=\frac{a^2(h+v)}{b^2(k+u)}(X-k-u).$$

Ces équations de deux normales infiniment voisines admettent les mêmes valeurs respectives pour les coordonnées X et Y du centre de courbure, et l'on en tire d'abord

$$a^2(kv-hu)X=c^2kv(k+u).$$

Or, les deux points (k,h) et $(k+u,h+u)$ étant sur l'ellipse, il en résulte

$$v:u=-b^2(2k+u):a^2(2h+v).$$

Substituant ce rapport dans l'équation en X, puis observant que u et v sont nuls à l'égard des nombres finis; on aura

$$a^4X=c^2k^3;\ \text{d'où}\ b^4Y=-c^2h^3;\ \ldots\ (10)$$

Soient A et B les racines cubiques de a^2c^2 et b^2c^2; il est clair qu'on aura

$$c^2k^3=Aa^4\sqrt[3]{X^2}\ \text{et}\ c^2h^3=Bb^2\sqrt[3]{Y^2}.$$

D'ailleurs $a^2h^2+b^2k^2=a^2b^2$; substituant donc, il vient

$$B\sqrt[3]{Y^2}+A\sqrt[3]{X^2}=c^2.\ \ldots\ (11)$$

Dans cette équation, (X,Y) est un centre quelconque de courbure; elle représente donc la *développée* cherchée. Celle-ci a même centre que l'ellipse; elle a ses deux axes de symétrie sur $2a$ et $2b$, dont le plus grand sur $2b$; et enfin ses quatre *sommets* sont quatre *points de rebroussement*, où se terminent ses quatre *branches*, égales entre elles et tangentes aux deux axes.

17. Rayon de courbure. Soit r le rayon de courbure au point (k,h) de l'ellipse : comme (X,Y) est le centre de courbure en ce point, on a

$$r^2=(h-Y)^2+(k-X)^2.$$

Or, par les valeurs ci-dessus de X et de Y, on a

$$a^4(k-X)=a^4k-c^2k^3 \text{ et } b^4(h-Y)=b^4h+c^2h^3.$$

Soit N la longueur de la normale, depuis le point (k,h) jusqu'à l'axe des x rectangulaires : on trouve aisément $a^4N^2=b^2(a^4-c^2k^2)$; d'où

$$b^2(k-X)=N^2k \text{ et } b^4(h-Y)=a^2N^2h.$$

A cause de $ap=b^2$, il vient, pour calculer r,

$$b^8r^2=a^4N^6 \text{ et } p^2r=N^3. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Soit d'ailleurs i l'angle de N avec chacun des rayons vecteurs du point (k,h) ; on sait que $ch \cot i=b^2$; d'où $(b^4+c^2h^2)\cos^2 i=b^4$. Or, $b^4+c^2h^2=a^2N^2$, donne $aN\cos i=b^2$ ou $N\cos i=p$. Éliminant N, il vient

$$p=r\cos^3 i, \text{ ou } r=p \text{ séc } {}^3 i. \quad . \quad . \quad (13)$$

L'équation $p=r\cos^3 i$ servira à calculer le rayon de courbure en chaque point de l'ellipse. On peut aussi construire ce rayon r, pour le point M : on élève trois perpendiculaires successives, l'une sur MF, à la distance p de M ; la seconde sur MC, au point où la première coupe la normale MC en M ; la troisième sur le rayon vecteur FM, au point où il est coupé par la seconde : cette troisième perpendiculaire coupe la normale en M au centre C de courbure.

Soit d'ailleurs α la courbure de l'ellipse au point quelconque M, d'où $r\alpha=1$; on aura donc

$$p\alpha=\cos^3 i.$$

Aux extrémités de $2a$, $\cos i$ est à son maximum 1, aussi bien par suite que la courbure α ; donc au contraire le rayon r de courbure est alors à son minimum p. Aux extrémités de $2b$, l'angle obtus $2i$ est à son maximum, aussi bien que i ; donc $\cos i$ est à son minimum, donné par $a\cos i=b$, et par suite r est à son maximum, donné par $br=a^2$. De même la courbure α est à son minimum, fourni par $a^2\alpha=b$.

Observons que la théorie des courbures, dans les lignes du second ordre, étant très-élémentaire, devrait faire partie de la géométrie

analytique plane, comme conduisant immédiatement aux *lois de la gravitation ;* ainsi que nous l'avons établi, p. 220 de la 2me édition de notre Mécanique élémentaire. (Voyez d'ailleurs le tome I du Journal de Mathématique, publié par M. *Liouville*).

Théorèmes. La méthode précédente ne fournit pas seulement les *développées* de l'hyperbole et de la parabole, mais aussi les expressions (12) et (13) du rayon de courbure dans chacune ; et il en résulte que *dans les lignes du second ordre, le rayon de courbure a pour valeur, soit le cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre, soit le produit du demi-paramètre par le cube de la sécante de l'angle que la normale fait avec un rayon vecteur, mené au point de contact.*

Ces deux théorèmes généraux étaient faciles à prévoir ; car les trois courbes étant représentées par l'équation $y^2=2px+qx^2$, et les relations (12) et (13), pour l'ellipse, étant indépendantes du coefficient q, par lequel chaque genre de courbe est caractérisé ; ces relations doivent s'appliquer aux trois genres, nécessairement. On démontre aussi que, *si deux courbes du second degré sont semblables, il en est de même de leurs développées.*

18. Des aires dans l'ellipse. Les deux axes $2a$ et $2b$, d'une ellipse, étant donnés, on sait que cette courbe est la projection d'une circonférence, et réciproquement ; a étant le rayon de la circonférence, et l'angle v des deux plans étant donné par $b=a\cos v$, dans le premier cas. Or, on sait mesurer l'aire S′ du *secteur* quelconque du cercle ; donc si S désigne le *secteur elliptique*, projection de S′, on aura $S=S'\cos v$ ou $aS=bS'$. Ainsi l'on sait calculer l'aire de tout secteur elliptique ; et la même relation subsiste lorsque S′ et S sont deux *segments*, circulaire et elliptique.

Deux diamètres rectangulaires du cercle ont pour projections respectives deux diamètres conjugués de l'ellipse ; or, les deux premiers divisent le cercle πa^2 en quatre secteurs égaux à $S'=\frac{1}{4}\pi a^2$; donc les deux derniers *divisent l'aire elliptique* E *en quatre secteurs équivalents à* S, d'où $S=\frac{1}{4}E$. La relation $aS=bS'$ devient donc $E=\pi ab$.

Soit d'ailleurs k le rapport rationnel ou non, de l'aire E au rectangle ab ; d'où $E=kab$. Le nombre abstrait k étant indépendant de a et b, ne change point quand on pose $b=a$; mais alors l'aire E devient le cercle πaa ; donc $\pi aa=kaa$. Et puisque k n'a point changé, on avait d'abord $k=\pi$; donc encore $E=\pi ab$. On voit que *l'aire de l'ellipse équivaut au cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les deux demi-axes.*

On peut donc décrire le cercle qui soit dans un rapport connu avec une aire elliptique donnée, ou qui soit équivalent à la somme algébrique de tant d'aires elliptiques données qu'on voudra. Mais ce dernier problème est bien plus simple lorsque toutes les ellipses sont *semblables.*

19. ELLIPSES SEMBLABLES. *Deux ellipses sont semblables dès que les grands axes sont proportionnels aux petits.* Supposons les deux ellipses concentriques et les axes homologues en ligne droite ; de telle sorte que les deux courbes soient rapportées au même système de coordonnées rectangulaires. Soient $2a$ et $2b$ les deux axes de la première, $2a'$ et $2b'$ ceux de la seconde : par hypothèse $2a' : 2a = 2b' : 2b$. Soit r le rapport commun, de *similitude*, d'où $a' = ar$ et $b' = br$: si (x,y) et (x',y') sont deux points homologues, il est facile de voir que les coefficients des termes du second degré en x et y, x' et y', sont respectivement égaux, dans les équations des deux courbes ; donc ces deux ellipses sont *semblables*, de forme et de position (7), et l'une *représente* l'autre.

Soient donc L et L' les *longueurs* des deux ellipses, E et E' leurs *aires ;* il est clair qu'on aura $L' = Lr$ et $E' = Er^2$. La première ellipse servira donc à déterminer aisément la seconde et la représente complètement ; mais la difficulté est de mesurer L, parce que l'expression de cette longueur ne saurait s'obtenir par des procédés élémentaires rigoureux : il faut se résoudre à *tendre*, sur l'ellipse matérielle, un *fil* flexible et à prendre, pour L, la longueur du fil ainsi tendu, ayant ses deux bouts réunis. Sur le papier, on emploie une lame *élastique*, à bords rectilignes ; mais une fois que L est déterminée numériquement, il en résulte la longueur $L' = Lr$. Cela montre l'importance de la similitude, pour le mesurage, comme pour la recherche des propriétés des figures.

COROLLAIRES. Dans deux ellipses semblables, les courbures sont égales pour chaque couple de points homologues. Si deux ellipses sont représentées par des équations complètes, rapportées à un même système quelconque de coordonnées, ces deux ellipses sont semblables dès que les trois termes du second degré en x et y sont respectivement égaux. Enfin, on peut construire l'ellipse semblable à une ellipse donnée, connaissant le rapport, soit des deux longueurs ou des deux aires, soit de deux arcs ou de deux secteurs semblables ; etc.

20. POLYGONES CIRCONSCRITS A L'ELLIPSE. Soit P un polygone quelconque de n sommets, *circonscrit* au cercle ; sa projection P'

est donc un polygone de n sommets *circonscrit* à l'aire elliptique E, projection du cercle, et l'on a $P'=P\cos v$ ou $aP'=bP$.

Comme a et b sont constants, P et P′ variables, il est clair que P et P′ seront à la fois les moindres possibles; or P est un minimum *absolu* dès qu'il est régulier; donc alors P′ est aussi un minimum absolu. D'ailleurs, il y a une infinité de polygones réguliers égaux à P circonscrits au cercle, tous concentriques, les contacts étant les milieux des côtés; donc il y a une infinité de polygones, équivalents au minimum P′, circonscrits à l'ellipse, les contacts étant les milieux des côtés et le centre de la courbe étant chaque fois celui de *gravité* ou de *symétrie* du minimum P′, suivant que le nombre n de ses côtés est *impair* ou *pair*.

1° Si $n=3$, les minimums P′ valent chacun le triangle isocèle dont la base $2b\sqrt{3}$ touche l'ellipse à une extrémité du grand axe $2a$, le sommet étant sur le prolongement du même axe. Et comme le centre de gravité de ce triangle minimum coïncide avec le centre de l'ellipse, la hauteur du triangle est $3a$; donc l'aire minimum a pour mesure $3ab\sqrt{3}$.

Les sommets de tous les triangles minimums circonscrits P′ apppartiennent à une seconde ellipse, semblable à la première, de forme et de position; car cette nouvelle ellipse est la projection de la circonférence, de rayon $2a$, circonscrite au triangle équilatéral minimum, lui-même circonscrit au cercle proposé : donc $4a$ et $4b$ sont les axes de la seconde ellipse, dont par suite l'aire est quadruple de celle de la première. On peut donc ainsi passer par une suite d'ellipses concentriques semblables, dont les aires deviennent de 4 en 4 fois plus grandes.

2° Si $n=4$, tous les quadrilatères minimums P′, circonscrits à l'ellipse, sont des parallélogrammes conjugués, équivalents entre eux et aux rectangles des axes. Les sommets de tous les P′ se trouvent sur une ellipse, semblable, de forme et de position, à la première, et d'une aire d'ouble; car ses axes sont $2a\sqrt{2}$ et $2b\sqrt{2}$

3° En général, si n est pair, tous les polygones minimums P′, circonscrits à l'ellipse, sont symétriques chacun, équivalents entre eux et concentriques à la courbe; ils sont tous inscrits dans une ellipse, concentrique et semblable à la première. Ainsi pour $n=6$, par exemple, les hexagones minimums sont chacun symétrique et tous ont la même mesure $2ab\sqrt{3}$; ils sont inscrits dans une seconde ellipse, semblable à la première et dont l'aire est les quatre tiers de celle de la première.

21. ELLIPSES INSCRITES. On a vu en géométrie que, parmi tous les polygones équivalents, de chacun n côtés et circonscriptibles à différents cercles, celui de plus grand cercle inscrit est régulier. Soient donc P et P′ deux polygones de chacun n côtés, le premier circonscrit au cercle de rayon a variable, et le second P′, projection du premier, circonscrit à l'aire elliptique E, projection de l'aire πa^2 du cercle; et soit v l'angle invariable des deux plans : on aura

$$P' = P\cos v \text{ et } E = \pi a^2 \cos v.$$

L'angle v étant donné constant, aussi bien que l'aire P, il en résulte l'aire P′, aussi constante. Or, le cercle variable πa^2 est le plus grand possible dès que P est un polygone régulier; donc alors l'aire E est aussi la plus grande possible : elle touche chacun des côtés de P′ à son milieu et a pour centre celui de gravité de P′. Ce dernier polygone, qui doit être *symétrique*, si n est pair, étant donc tracé, et connaissant l'angle v, qui rend P un polygone régulier, P sera aussi tracé; d'où l'on aura le rayon a du cercle maximum inscrit, et par suite le grand axe $2a$ de l'aire elliptique E maximum, inscrite dans P′. Quant au second axe $2b$, il sera donné par $b = a\cos v$; on peut donc décrire l'ellipse maximum, inscrite dans P′, ou du moins une ellipse égale; mais la difficulté, même lorsque $\cos v = \frac{1}{2}$, est de tracer, *dans l'intérieur de* P′, *l'ellipse maximum, qui doit avoir pour centre celui de gravité de* P′ *et toucher chacun de ses côtés au milieu.*

1° Supposons que P′ soit un triangle quelconque tracé, pris pour base d'un prisme triangulaire droit : on peut toujours couper ce prisme par un plan, de telle sorte que la section soit un triangle équilatéral P; on peut même calculer l'aire P, aussi bien que $\cos v$, v désignant l'angle des deux plans. Observons que la description de l'ellipse exige cinq conditions distinctes, comme de passer par cinq points donnés; il existe donc une infinité d'ellipses inscrites dans le triangle donné P′. Or, en faisant tourner ce triangle dans son plan, il est la projection d'une suite de triangles P, équivalents entre eux; donc la circonférence inscrite dans chacun de ceux-ci, a pour projection une ellipse inscrite dans P′. Et puisque quand P est équilatéral, le cercle inscrit est le plus grand possible, on voit qu'alors l'aire elliptique E, inscrite dans P′, est la plus grande possible : elle touche chacun des côtés de P′, dans sa nouvelle position, au point milieu de ce côté, et son centre est celui

de gravité de P'. Soit donc $3d$ la droite qui joint un sommet de P' au milieu du côté opposé $2m$; $2b'=2d$ sera un diamètre de l'ellipse maximum inscrite ; tandis que son conjugué $2a'$, pris pour axe des x obliques, est parallèle à la tangente $2m$. D'ailleurs le milieu d'un autre côté, appartenant à l'ellipse maximum, a pour coordonnées $x=m$ et $y=\frac{1}{2}d$; donc l'équation $a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2$ fournit $a'=\frac{2}{3}m\sqrt{3}$. Connaissant donc ainsi les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, de longueur et de position, il en résulte le tracé des deux axes et la description de l'ellipse maximum, inscrite dans le triangle quelconque donné P'.

L'aire de cette ellipse est $E=\frac{1}{9}\pi P'\sqrt{3}$; d'où $E>\frac{1}{2}P'$. Si donc *on veut, dans un morceau triangulaire* P' *d'acajou, couper la plus grande table possible*, il faudra prendre cette table *elliptique* plutôt que *rectangulaire* ($\frac{1}{2}P'$ étant le plus grand rectangle *inscrit* dans P') ; et nous venons de voir comment on peut résoudre le problème.

2° Lorsque P' est un quadrilatère convexe quelconque tracé, il existe encore une infinité d'ellipses inscrites dans ce quadrilatère. Menant par les milieux des côtés de P' des droites respectivement parallèles et par suite égales aux deux droites $2d$ et $2m$ qui joignent ces milieux, on formera le parallélogramme R, équivalent à $P'=P\cos v$. Comme R est la projection du carré équivalent à P ; d'où $P=4a^2$, a désignant le rayon du cercle maximum inscrit dans les quadrilatères équivalents à P ; l'aire elliptique E, projection du cercle maximum, est celle de l'ellipse maximum inscrite dans R, ayant $2d$ et $2m$ pour diamètres conjugués et pour aire maximum $E=\frac{1}{4}\pi P$; elle est donc facile à décrire. Mais elle n'est pas inscrite dans P', bien qu'elle passe par les milieux de ses côtés : la plus grande ellipse, inscrite dans le quadrilatère convexe donné P', ne saurait se trouver par la méthode élémentaire des projections ; car pour cela, P' étant la base d'un prisme quadrangulaire droit, il faudrait qu'il fût possible de couper ce prisme par un plan tel, que la section résultante fût un carré.

22. Polygones inscrits. Considérons les polygones de n côtés, en nombre illimité, inscrits dans une ellipse, donnée par ses axes $2a$ et $2b$; son aire E étant la projection du cercle dont a est le rayon. Procédant comme plus haut, nous verrons qu'il existe une infinité de polygones *maximums* inscrits, tous équivalents à P' et chacun *symétrique*, si n est pair ; tous circonscrits à une même ellipse dont l'aire E' est semblable, de forme et de position, à la proposée E. Ainsi pour $n=3$, le triangle maximum $P'=\frac{3}{4}ab\sqrt{3}$ et

$E'=\frac{1}{4}E$; pour $n=4$, le quadrilatère maximum est un parallélogramme P′, variable de forme et pouvant devenir un losange ou un rectangle, sans qu'il cesse d'être équivalent au demi-rectangle des axes, et l'on a $E'=\frac{1}{2}E$; enfin, pour $n=6$, tous les hexagones symétriques maximums inscrits sont équivalents à $\frac{3}{2}ab\sqrt{3}$, et l'on a $E'=\frac{3}{4}E$.

23. ELLIPSES CIRCONSCRITES. On a vu en géométrie que le plus petit de tous les cercles, circonscrit à des polygones de chacun n côtés et tous équivalents à P, répond au polygone régulier. Soit A le rayon du cercle minimum ; en raisonnant comme plus haut, on verra que parmi toutes les aires des ellipses circonscrites aux polygones équivalents à P′, projections des polygones P, la plus petite de toutes a pour *centre* celui de *gravité* ou de *symétrie* du polygone $P'=P\cos v$, suivant que n est *impair* ou *pair*, et que de plus, 2B désignant le second axe de l'aire elliptique minimum E, d'où $B=A\cos v$, on aura toujours $E'=\pi A^2\cos v=\pi AB$; et si E désigne l'aire elliptique maximum inscrite dans P′, d'où $E=\pi ab$, $b=a\cos v$ et $A:a=B:b$; les deux ellipses maximum E et minimum E′ sont semblables, de forme et de position. Et puisqu'on sait décrire la première, pour le triangle et le quadrilatère P′, il sera facile d'en déduire la description de la seconde, chaque fois. Pour le triangle P′ quelconque, on a $E'=\frac{4}{9}\pi P'\sqrt{3}=4E$, et pour le quadrilatère P′, il vient $E'=\frac{1}{2}\pi P'=2E$.

24. THÉORÈMES. Ce qui précède conduit à démontrer, avec facilité, les théorèmes que voici, sur les quadrilatères maximums et minimums inscrits et circonscrits à l'ellipse, dont $2a$ et $2b$ sont les axes tracés :

I. Le rectangle inscrit, d'aire et de contour maximums, est le carré dont les diagonales sont bisectrices des angles droits des deux axes ; c'est le seul carré inscrit, ayant le côté égal à la hauteur du losange des sommets.

Scholie I. Les maximums ci-dessus sont relatifs aux diamètres égaux ; mais le plus grand de tous les rectangles inscrits est semblable, de forme et de position, au rectangle des axes et en vaut la moitié ; il est donc plus grand que le seul carré inscrit.

Scholie II. Le rectangle inscrit, de contour maximum, égal au contour du losange des sommets, a ses diagonales égales telles, que la direction n de l'une est donnée par $a^2n=b^2$. Le contour maximum de ce rectangle inscrit est plus grand que celui du seul carré inscrit.

II. Parmi tous les losanges inscrits dans l'ellipse, le seul carré est celui dont l'aire, le contour et la somme des diagonales sont les moindres qu'il se puisse.

III. L'ellipse admet une infinité de losanges circonscrits, dont un seul carré, ayant ses contacts aux extrémités de deux diamètres égaux, non rectangulaires, et chaque diagonale double de la corde des sommets. De plus, les sommets de tous ces losanges se trouvent sur les prolongements des deux axes.

IV. De tous les losanges circonscrits, le plus petit équivaut au rectangle des axes et ses côtés sont parallèles aux diagonales de ce rectangle. (Il est moindre que le carré circonscrit, comme cela doit être).

V. Parmi tous les losanges circonscrits, celui de moindre périmètre a son côté égal à la somme des deux demi-axes; les demi-diagonales h et k sur les axes des y et des x étant données par $h^2=b(a+b)$ et $k^2=a(a+b)$. Le côté du losange proposé est moindre que celui du seul carré circonscrit, comme cela doit être.

VI. Entre tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, les plus petits sont les parallélogrammes conjugués, tous équivalents à $4ab$; dont un seul *rectangle*, ayant le plus petit contour $4(a+b)$, et un seul *losange*, ayant le plus grand périmètre $4\sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, parmi les parallélogrammes conjugués. Ce losange conjugué est le minimum de tous les losanges circonscrits à l'ellipse (IV).

VII. Si le produit des directions des deux côtés adjacents est un nombre constant et négatif, les sommets de tous les parallélogrammes circonscrits, en nombre infini, décrivent une ellipse concentrique et semblable, de forme et de position, à la première, si tous les parallélogrammes sont conjugués. Dans ce cas, l'aire de la seconde ellipse est double de celle de la première.

Scholie I. On peut ainsi obtenir une suite d'ellipses semblables, de 2 en deux fois plus grandes; et si R désigne le rayon du cercle équivalent à la somme des m premières, on aura $R^2=ab(2^m-1)$.

Scholie II. La propriété ci-dessus, *descriptive* de la seconde ellipse, est celles des cordes supplémentaires. Mais tous les sommets se trouveraient sur les prolongements des deux diamètres conjugués égaux, si le produit constant était toujours positif.

VIII. Les sommets de tous les rectangles circonscrits à l'ellipse décrivent une circonférence concentrique, de rayon égal à la corde des sommets; et le plus grand de tous ces rectangles circonscrits est le seul carré circonscrit: c'est aussi le rectangle de périmètre maximum.

IX. Deux ellipses concentriques semblables, étant les projections de deux cercles concentriques; non-seulement toute corde de la plus grande ellipse, tangente à la plus petite, est divisée en deux parties égales, par le contact; mais v désignant l'angle des deux plans et C la demi-corde de la plus grande, tangente à la plus petite et parallèle à son grand axe; la *couronne elliptique* a pour mesure $\pi C^2 \cos v = \pi R^2$, en posant $C : R :: R : C \cos v$.

25. THÉORÈMES DESCRIPTIFS. Voici encore plusieurs théorèmes, propres à décrire l'ellipse et d'autres lignes, qui en dépendent, plus ou moins immédiatement.

I. Si l'on cherche le lieu géométrique du contact de toute tangente à l'ellipse et des milieux des cordes parallèles, on trouve, non-seulement un diamètre, mais l'équation de celui-ci et celle de la tangente proposée.

II. Le lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes, partant d'un point P du plan de l'ellipse, dont O est le centre, n'est pas une droite, mais une ellipse semblable, de forme et de position, à la première, son centre étant le milieu de OP.

III. Le rayon du cercle moyen proportionnel entre les aires des deux ellipses précédentes, est lui-même moyen proportionnel entre le demi-grand axe de la première et le demi-petit axe de la seconde. On peut aisément calculer ce rayon, lorsque 160 et 120 étant les axes de la première ellipse, les coordonnées du point P valent 100 chacune.

IV. Le lieu géométrique des points qui divisent en trois parties égales chaque corde parallèle à un axe d'une ellipse tracée, est une seconde ellipse concentrique, d'une aire six fois plus petite.

V. Le lieu géométrique de tous les points où les perpendiculaires, menées du centre sur les tangentes à l'ellipse, coupent les ordonnées des contacts, prolongées, est une seconde ellipse, semblable à la première, mais inversement située, comme ayant son petit axe sur le grand de l'autre.

VI. Si pour une même abscisse, l'ordonnée d'une courbe est moitié de celle de la circonférence, l'aire de cette courbe, à trouver, est moitié de l'aire du cercle.

VII. Si (x',y') étant un point quelconque de la circonférence donnée, (x,y) est un autre point tel, qu'on ait toujours $xy=x'y'$; le lieu géométrique de tous ces autres points est une ellipse *indéterminée*, mais dont l'aire est toujours équivalente à celle du cercle.

VIII. Dans l'ellipse, rapportée à ses axes $2a$ et $2b$, la somme des deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, passant par un foyer, a pour expression $2a \times 2p$, $2p$ désignant le paramètre. (Cette propriété remarquable n'est pas descriptive de l'ellipse).

IX. Pour décrire une ellipse, dont les axes sont donnés, ou pour décrire une ellipse semblable, *d'un mouvement continu*, on a le *triangle*

variable, qui revient au *losange variable*. Voici encore, pour cet effet, un *instrument* très-simple : la pointe fixée en un point quelconque d'une règle mobile, décrit une ellipse, pendant que la règle se meut de telle sorte que ses extrémités glissent sur deux droites perpendiculaires entre elles.

X. La pointe fixée sur le cercle roulant intérieurement sur la circonférence d'un cercle fixe, de rayon double, décrit une ellipse dont les demi-axes a et b sont la plus grande et la plus petite distance de la pointe à la circonférence mobile ; et suivant que la pointe est à la circonférence ou au centre, elle décrit une droite ou un cercle égal au cercle mobile. Voilà donc encore un instrument propre à décrire l'ellipse, d'un mouvement continu.

XI. Peut-on diviser l'aire elliptique donnée en deux portions équivalentes, soit par une circonférence, soit par une ellipse semblable ? décrire ces deux courbes et calculer le rayon du cercle équivalent à la différence de deux aires elliptiques concentriques semblables, connaissant les axes 200 et 120, et 100 et 60 des deux ellipses.

XII. Décrire l'ellipse dont chaque ordonnée, pour une abscisse commune, soit la somme de l'abscisse et de l'ordonnée correspondantes de la circonférence, des rayon 10, rapportée au même système de coordonnées rectangulaires.

XIII. Les deux côtés CA=b et CB=a du triangle tracé T, étant chacun divisé en n parties égales ; si l'on joint, par deux droites, le point A au v ième point de division de a, à partir de C, et le point B au v ième point de division de b, à partir de A ; ces deux droites se coupent sur l'ellipse *maximum*, inscrite dans 4T (triangle obtenu en prolongeant chacun des côtés CA et CB d'une longueur égale à lui-même). L'ellipse maximum devient une circonférence, si $b=a$ et l'angle C=60°.

XIV. Deux ellipses, rapportées au même système de coordonnées rectangulaires, étant tracées ; le lieu géométrique des intersections des cordes de contact de deux couples de tangentes à la plus petite, menée de deux points infiniment voisins de la plus grande, est une troisième ellipse ; et l'aire de la plus petite ellipse proposée est moyenne proportionnelle entre les aires des deux autres.

Réciproquement, les deux tangentes à la plus grande des deux ellipses proposées, menées par les extrémités de chaque corde touchant la plus petite, se coupent sur une troisième ellipse.

XV. Connaissant numériquement les deux côtés a et b de l'angle droit d'un triangle rectangle mobile, dont l'un a s'appuie constamment sur deux axes rectangulaires, calculer l'aire de l'ellipse décrite par le sommet opposé à ce côté. Il existe un problème analogue pour le triangle équilatéral mobile, de côté donné a.

XVI. L'angle des coordonnées étant de 60°, quel est le lieu géomé-

trique de tous les points tels, 1° que la somme des carrés des distances de chacun aux deux axes des coordonnées soit équivalente au carré donné R^2 ? 2° que R^2 soit la somme des carrés des diagonales du parallélogramme P variable, construit sur les coordonnées de chaque point ; ou bien cette somme, plus ou moins l'aire du parallélogramme? (Réponse : chaque fois une ellipse, dont on sait calculer les axes, de longueur et de position, aussi bien que l'aire ; et l'on sait aussi décrire la courbe).

Scholie. Le lieu serait une *hyperbole*, si le carré donné R^2 devait être équivalent, soit au rectangle des distances de chaque point aux deux axes, soit à la différence des carrés de ces distances, soit enfin à 4 fois l'aire du parallélogramme P, moins le carré de la diagonale opposée à l'angle de 60°. Mais le lieu serait une *parabole*, facile à décrire, si la distance de chaque point à l'axe des abscisses devait être moyenne proportionnelle entre 12 et l'x de ce point.

XVII. Soit d la longueur de la perpendiculaire élevée au milieu de la droite donnée $2a$: si le système se meut de telle sorte que les extrémités de $2a$ glissent, l'une sur l'axe des x rectangulaires et l'autre sur l'axe des y; l'extrémité de d décrit une ellipse ou deux droites perpendiculaires entre elles, suivant que d n'est pas ou est égale à la demi-droite a; et si $d=2a$, l'aire elliptique est triple du cercle décrit par le milieu de $2a$.

XVIII. Deux cercles, de rayons a et b, étant tracés sur un plan; le lieu géométrique des centres de tous les cercles tangents aux deux proposés, est une ellipse ou une hyperbole, dont les deux centres donnés sont les foyers, suivant que l'un des deux cercles est *intérieur* ou *extérieur* à l'autre, même quand il le toucherait. Le lieu serait une parabole, si l'un des deux cercles devenait une droite hors de l'autre cercle. (Calculer l'aire elliptique lorsque la distance des centres étant 10, les rayons a et b valent 30 et 20).

XIX. Lorsque la circonférence de rayon a donné, est tracée ; si l'on prolonge chacune de ses ordonnées rectangulaires de la longueur constante b, le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une circonférence égale à la proposée, sans coïncider avec elle. Mais si chaque ordonnée est prolongée d'une longueur égale à cette ordonnée ou égale à l'abscisse correspondante ; le lieu géométrique est chaque fois une ellipse, d'une aire double à celle du cercle, dans le premier cas, et équivalente au cercle proposé, dans le second cas.

Scholie. Ce triple théorème, remarquable en lui-même, l'est aussi parce qu'en réalité chaque ordonnée est prolongée *extérieurement* au cercle; ce qui donne séparément les moitiés respectives de chacune des trois courbes ci-dessus, lorsque la circonférence proposée est rapportée à son diamètre $2a$. Mais si l'origine était au centre et qu'on portât la longueur b sur chaque corde perpendiculaire à l'axe des x rectangulaires, à partir de chacune de ses deux extrémités, on aurait séparément

les quarts de la courbe cherchée. (C'est ainsi que procédait M. Noël, professeur de mathématiques en ville; lequel, de cette manière, m'a conduit au théorème proposé).

XX. Lorsque l'hypoténuse d'un triangle rectangle variable est sur l'axe des x rectangulaires, à partir de l'origine, et que le côté opposé à celle-ci est double du côté adjacent; non-seulement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit est le système de deux droites; mais ces deux droites sont les asymptotes de l'hyperbole $y^2-4x^2=-4$. Et si l'angle à l'origine était double de l'autre, le lieu géométrique serait les asymptôtes de l'hyperbole équilatère $y^2-x^2=-1$.

26. Pôles et Polaires dans l'ellipse. Les propriétés des *pôles* et de leurs *polaires*, dans les trois courbes du second degré, se démontrent, avec facilité, soit d'après l'équation générale et complète, soit plutôt d'après l'équation commune et aux axes conjugués. Mais pour l'ellipse, la théorie des pôles et des polaires est conséquence immédiate de cette théorie, dans la circonférence, à l'aide des projections orthogonales; ainsi qu'on peut le voir dans la 2e édition de notre traité de géométrie. Il en résulte les belles propriétés des *hexagones inscrits* et *circonscrits* à l'ellipse, et ainsi que différents corollaires, faciles à déduire. Nous ne parlons ici des pôles et des polaires, dans l'ellipse, que pour rappeler l'une des belles applications de la méthode des projections orthogonales, dans la recherche des propriétés de cette courbe. Voici encore d'autres applications.

27. Tangentes communes. Deux ellipses E et E', semblables de forme et de position, étant données sur un plan; les circonférences C et C', dont elles sont les projections, se trouvent sur le plan faisant, avec le premier, un angle v dont le cosinus est égal au rapport (de similitude) des deux axes homologues de E et de E'. Or, il y a généralement quatre tangentes communes aux deux circonférences; donc *il y a aussi quatre tangentes communes aux deux ellipses, entièrement l'une hors de l'autre.* Et ces quatre tangentes se réduisent à trois, à deux, à une seule et à aucune, suivant que les deux ellipses E et E' se touchent extérieurement, se coupent (en deux points et jamais plus), se touchent intérieurement ou sont l'une dans l'autre.

De plus, les tangentes communes vont se couper deux à deux aux *pôles de similitude* de deux ellipses et *divisent* (*harmoniquement*) *la distance des centres de ces deux courbes en quatre segments, proportionnels aux axes homologues.* Il est donc facile de construire ces deux pôles, par chacun desquels menant deux tangentes à l'une des ellipses, elles sont aussi tangentes à l'autre.

28. Axe radical. On sait que l'*axe radical* de deux cercles C et C' est la droite qui passe par les milieux des deux tangentes communes extérieures. Cette droite, perpendiculaire à la distance des centres, est telle

que les quatre tangentes ou les deux moindres cordes, menées par l'un quelconque de ses points, sont égales entre elles. Or, on peut toujours prendre les deux plans, comprenant l'angle v, tels que leur intersection soit parallèle à la distance des centres de C et de C′ ; et alors les grands axes des ellipses E et E′ sont en ligne droite. Dans ce cas, l'*axe radical* des deux courbes, étant la droite qui joint les milieux des deux tangentes communes extérieures, est non-seulement perpendiculaire à la distance des centres, mais de plus, les quatre tangentes ou les deux moindres cordes, menées de l'un quelconque de ses points, sont égales entre elles.

Si les deux ellipses se coupent, l'axe radical est sur la corde commune ; et il coïncide avec la tangente commune, si elles se touchent extérieurement ou intérieurement. Or, cela a toujours lieu, pour deux ellipses quelconques, lorsque la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des demi-diamètres sur cette distance.

29. Centre radical. On sait que le *centre radical* de trois cercles quelconques est le point où se coupent les trois axes radicaux de ces trois cercles, pris deux à deux ; donc le *centre radical* de trois ellipses semblables est le point où vont se couper les trois axes radicaux de ces ellipses, prises deux à deux.

30. Cercles tangents I. Les propriétés des *pôles* et *polaires*, des *centres* et *axes radicaux*, des *pôles* et *axes de similitude*, des *points* et *cercles réciproques*, etc., ont été employées, par différents géomètres modernes, pour résoudre les problèmes sur les contacts des droites et des cercles. Mais les solutions, bien que très-simples en théorie, ne nous paraissent point préférables à celles que nous avons indiquées, sous formes de théorèmes, p. 330 de la troisième édition de notre traité de géométrie élémentaire ; parce qu'elles exigent le tracé d'au moins autant de lignes que les nôtres, et que celles-ci ont l'avantage de se baser sur les propriétés les plus élémentaires de la circonférence et de se déduire immédiatement de l'analyse de l'énoncé.

II. Les problèmes sur les cercles tangents sont nombreux et plusieurs passent pour difficiles ; bien que les relations dans le cercle conduisent aisément aux procédés graphiques, propres à résoudre ces problèmes. Mais la difficulté vient principalement de la multitude de lignes dont la solution exige le tracé. Or, quand on doit décrire un grand nombre de lignes, pour avoir la quantité inconnue, il est impossible de l'obtenir d'une manière suffisamment approchée, à cause des erreurs inévitables dans l'emploi des instruments : il est non-seulement plus court alors, mais souvent aussi beaucoup plus exact de résoudre le problème par des *essais* ou des *tâtonnements*, d'autant moins nombreux et moins fautifs, qu'on est plus exercé aux constructions avec le compas et la règle. Il arrive même souvent qu'un ou deux essais suffisent pour obtenir la figure

cherchée, avec toute la précision que peuvent comporter les opérations descriptives. C'est donc ce moyen de solution qu'il faut d'abord employer, soit pour avoir la solution elle-même, soit pour découvrir les procédés géométriques rigoureux, propres à la vérifier.

III. La solution par *tâtonnements* est souvent la seule praticable ; mais elle peut avoir l'inconvénient de faire regarder comme vrai ce qui ne l'est qu'à peu près ou dans des circonstances très-particulières ; tandis que l'analyse de l'énoncé, d'après des principes certains, décomposant la question en plusieurs autres, plus simples et qu'on sait résoudre par des procédés rigoureux, conduit directement au but, montre d'où proviennent les erreurs pratiques et donne le moyen de les corriger, ou du moins d'en affaiblir l'influence sur les résultats. Il est clair que plus on sait traiter de ces problèmes élémentaires, plus il est facile d'en trouver parmi eux qui soient propres à résoudre les nouveaux qu'on pourrait se proposer ; et il y aura chaque fois un choix à faire parmi les *données* et les *inconnues*, qu'il faut toujours réduire au plus petit nombre possible, par une analyse logique rigoureuse, et à l'aide parfois de grandeurs *auxiliaires*, connues ou inconnues, choisies convenablement. Mais on serait souvent arrêté dans la solution, si l'on ne voulait faire usage que des ressources qu'offre la géométrie pure : l'algèbre, lorsqu'elle est applicable, donne les inconnues avec beaucoup plus de précision que les opérations graphiques ; souvent même elle est indispensable pour découvrir les solutions les plus simples, avec la règle et le compas, non-seulement pour les problèmes *déterminés* de géométrie ; mais aussi pour les problèmes *indéterminés*. Que serait, en effet, l'étude des courbes, sans la grande et belle idée de Descartes de *représenter* les *points* et les *lignes* par des *équations* ?

C'est particulièrement dans les problèmes sur les contacts des droites et des circonférences, que la solution par *tâtonnements* doit s'employer, sauf à la vérifier ensuite, par le calcul ; lequel est indispensable, à cause du grand nombre de lignes qu'il faut décrire pour avoir la figure demandée et parce que les dimensions de cette figure dépasseraient souvent l'ouverture du plus grand compas possible et la longueur de la règle.

31. Problème I. *Calculer le rayon* x *et le centre* O *de la circonférence tangente à la droite* D *et aux deux cercles extérieurs, de centres* A *et* B, *situés d'un même côté de la droite.* Ici les données numériques sont les rayons a et b des deux cercles tracés, les distances h et k des centres A et B à la droite D, avec la portion d que h et k interceptent sur D ; tandis que les inconnues sont le rayon x et la distance y du pied de h au contact du cercle cherché avec D. Pour calculer ces deux inconnues, on a les deux équations simultanées :

$$(a+x)^2 = y^2 + (h-x)^2,$$
$$(b+x)^2 = (k-x)^2 + (d-y)^2;$$

Éliminant x, l'équation finale sera du second degré en y ; le problème aura donc généralement quatre solutions, lesquelles peuvent se réduire à trois, à deux, à une ou à aucune, suivant la position relative et les valeurs particulières des données. Les deux cercles A et B peuvent toucher D d'un même côté ; d'où $h=a$ et $k=b$. Le cercle B se réduit à son centre B, si $b=0$; et alors il faut *décrire la circonférence, passant par le point* B *et touchant les deux lignes* D *et* A, *droite et circulaire*. Ce problème admet deux solutions : a et b pourraient être *nuls*.

32. PROBLÈME II. *Trois cercles extérieurs, de centre* A, B, C *et de rayons* a, b, c, *étant tracés sur un plan, calculer le rayon* x *du cercle* O *qui les touche tous les trois*. Les données numériques sont a, b, c, la distance $AB=d$, la distance $CK=h$ du centre C à AB et le segment $AK=k$. Les inconnues sont x, y et z, savoir y distance de O à AB et z distance de A au pied de y. Or, en supposant $a>b>c$, on a les trois équations simultanées, le cercle O étant intérieur :

$$(a+x)^2=y^2+z^2,\ (b+x)^2=y^2+(d-z)^2$$
$$\text{et } (c+x)^2=(h-y)^2+(z-k)^2.$$

L'équation finale en x est du second degré ; il en résulte les rayons et les centres des deux cercles touchant les trois proposés *intérieurement* et *extérieurement*. Changeant c en $-c$, puis b en $-b$ et à la fois b et c en $-b$ et $-c$, on aura les rayons et les centres de six autres cercles tangents aux trois proposés. De sorte que le problème a généralement huit solutions ; lesquelles, à raisons des positions et des valeurs particulières, peuvent se réduire à beaucoup moins et même à aucune.

Si $c=0$, le problème revient à *calculer le rayon et le centre de la circonférence, passant par un point donné* C *et touchant les deux cercles tracés* A *et* B. Mais si $b=0$ et $c=0$, il faudra *calculer le rayon et le centre de la circonférence, tangente au cercle tracé* A *et passant par les deux points* B *et* C, *donnés hors de ce cercle*.

Scholie. Pour tracer les huit circonférences, d'après les procédés purement géométriques, il nous paraît qu'il faudrait employer au moins cent-onze lignes ; ainsi le tracé par tâtonnements et le calcul sont ici les seuls praticables : ils sont à la fois les plus simples et les plus exacts, savoir les tâtonnements sur le papier et le calcul sur le terrain.

33. PROBLÈMES. Calculer le rayon et le centre de la circonférence, 1° tangente à deux droites tracées et à un cercle donné (qui pourrait se réduire à un point donné) ; 2° passant par un point donné, touchant un cercle tracé et ayant son centre sur une droite donnée ; 3° enfin, touchant deux cercles tracés et ayant son centre sur une droite donnée.

34. ELLIPSES TANGENTES. Les problèmes, fort nombreux, sur les contacts des droites et des circonférences, conduisent, à l'aide des projections, à résoudre les mêmes problèmes sur les contacts des droites et des

ellipses *semblables*. C'est ainsi que trois ellipses semblables étant tracées sur un plan, il existe généralement huit ellipses semblables, touchant chacune les trois proposées ; et il est possible de calculer le centre et les axes principaux de chacune, de longueur et de position.

Scholie. On peut aussi résoudre, par une équation du second degré, le problème que voici : *Étant données trois sphères, tangentes à un plan et d'un même côté, trouver le centre et le rayon de la sphère qui touchent les trois premières et le plan.* (Voyez d'ailleurs à la page 389, 2e édition de la géométrie).

35. Quadrature des Coniques. C'est en vertu de l'analogie qui existe entre les trois courbes du second degré, que leur *quadrature* se tire immédiatement de l'expression du *secteur circulaire*, à l'aide de certaines séries. Pour cet effet, M. *Bary* (Tome XIX des Annales de Mathématiques) indique une méthode que nous modifions comme il suit :

I. Soit S l'aire du *secteur elliptique*, dont le sommet est au centre et dont a est un côté ; le point (x,y), donné sur la courbe, étant l'extrémité du second côté. Soit α' l'arc du secteur circulaire concentrique, de rayon a, répondant à la même abscisse x, et dont l'aire, par suite, est $\frac{1}{2}a\alpha'$: on a vu que $a\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\alpha'$. Soit d'ailleurs α l'arc numérique, de rayon 1, qui mesure l'angle du secteur circulaire ; on aura $\alpha'=a\alpha$ et

$$\mathrm{S}=\tfrac{1}{2}ab\alpha.$$

II. Soit (x,y') l'extrémité de l'arc α' : on sait que

$$1:\sin\alpha::a:y'::b:y \text{ ; d'où } b\sin\alpha=y.$$

Substituant donc l'expression connue de l'arc α en fonction de son sinus y sur b, on aura

$$\mathrm{S}=\tfrac{1}{2}ab\left(\frac{y}{b}+\frac{1}{2}\frac{y^3}{3b^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{y^5}{5b^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{y^7}{7b^7}+\text{etc.}\right).$$

Or, $b^2=ap$, p désignant le demi-paramètre ; substituant cette valeur de b^2, réduisant et observant que pour passer à la *parabole* $y^2=2px$, il suffit de poser $a=\infty$; ce qui rend *infiniment petits*, et conséquemment *nuls*, les termes divisés par les puissances de a ; il vient

$$\mathrm{S}=\tfrac{1}{2}a+y\tfrac{1}{6}xy.$$

Ici le centre, sommet du secteur S, est situé à l'infini ; donc ce secteur et le triangle $\frac{1}{2}ay$ sont infiniment grands ; mais leur différence $\frac{1}{6}xy$, *segment* de la parabole, entre la courbe et la corde menée du sommet au point connu (x,y) de celle-ci, est un nombre *fini* et donné. Ajoutant l'aire du triangle rectangle, dont x et y sont les côtés de l'angle droit, savoir $\frac{1}{2}xy$, on aura l'aire de la moitié du *segment* S', limité par la courbe et la double ordonnée y : donc

$$\mathrm{S}'=\tfrac{4}{3}xy.$$

III. Soit tang $\alpha=t$; on a $1:t::x:y$ et $t=y$ sur x. Substituant la valeur de l'arc α en fonction de sa tangente t, savoir $t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+$ etc. ; observant ensuite que, pour passer du secteur elliptique $S=\frac{1}{2}ab\alpha$ au *secteur hyperbolique*, il faut y changer b et y en $b\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$, on aura

$$S=-\tfrac{1}{2}ab(t+\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5+\tfrac{1}{7}t^7+\text{ etc.}).$$

Or, la série entre parenthèses a pour valeur, comme on sait, la différence des logarithmes ordinaires de $1+t$ et de $1-t$, divisée par 2 fois celui du nombre $e=2,7182818$ etc. Donc, comme ce quotient est *négatif*, il vient

$$S=\frac{ab}{4le}\times l\left(\frac{x+y}{x-y}\right).$$

Telle est donc l'expression numérique du secteur hyperbolique, dont le sommet est au centre et dont les extrémités de l'arc sont le sommet de la courbe et le point (x,y), donné sur elle.

Retranchant cette expression hors de l'aire du triangle rectangle, dont x et y sont les côtés de l'angle droit, il reste la moitié de l'aire S' du *segment* compris entre la courbe et la double ordonnée y : donc

$$S'=xy-2S.$$

Enfin, si l'hyperbole est équilatère, d'où $x^2-y^2=a^2$, il est clair que pour la rapporter à ses asymptotes, nouveaux axes des x et des y rectangulaires, le point (x,y) sera désigné par (x',y') et qu'on aura

$$x\sqrt{2}=x'+y' \text{ et } y\sqrt{2}=x'-y' ; \text{ d'où}$$
$$x+y=x'\sqrt{2},\ x-y=y'\sqrt{2} \text{ et } x'y'=\tfrac{1}{2}a^2=h^2.$$

Soit T la tranche comprise entre la courbe, une asymptote, l'ordonnée y' du point donné (x',y') et l'ordonnée h du sommet : il est clair que T vaut le secteur S ; car on a $T=S+\frac{1}{2}x'y'-\frac{1}{2}h^2$. Donc

$$T=\frac{h^2}{2e}\times l\left(\frac{x'}{y'}\right)=\frac{h^2}{le}\times l\left(\frac{x'}{h}\right).$$

Différents lieux géométriques.

Nous terminerons ce Mémoire par différentes propositions, assez remarquables, sur les lieux géométriques plans et des trois dimensions ; c'est-à-dire sur les *courbes planes* et les *surfaces courbes*.

Courbes I. Dans toute circonférence $y^2=2ax-x^2$, le lieu du pied (r,y) de la perpendiculaire à toute corde, partant de l'origine, menée du pied de l'ordonnée de l'extrémité de cette corde, est la courbe du quatrième degré

$$(y^2+x^2)^2=2ar^3.$$

Cette courbe se discutera plus facilement à l'aide de son *équation polaire;* or, le *pôle* étant à l'origine, et ω désignant l'arc de rayon 1, qui mesure l'angle décrit par le *rayon vecteur* r, depuis l'axe des x, d'où $y=r\sin\omega$ et $x=r\cos\omega$, on a

$$r=2a\cos^3\omega.$$

Cette courbe n'a donc que le seul *axe de symétrie* $2a$: elle limite une sorte de *feuille*, fermée à l'origine, dont l'*aire est les* 5 *seizièmes du cercle proposé*. L'expression de l'aire A cherchée est, en effet, $A=4a^2z\int\cos^6nz$; la somme devant être prise, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=nz=180°=\pi$, n étant un nombre entier *infini*.

II. La circonférence $y^2+x^2=a^2$ étant tracée, le lieu du pied (x,y) de la perpendiculaire à chaque rayon, abaissée du pied de l'ordonnée de l'extrémité de ce rayon, est la courbe du 6^{me} degré

$$(y^2+x^2)^3=a^2x^4 \text{ ou } r^2=a^2\cos^4\omega.$$

L'aire limitée est les 3 *quarts du cercle proposé;* et cette courbe est une *lemniscate*. On appelle ainsi toute courbe plane, en forme du chiffre 8, dans différentes positions, ayant un *centre*, deux *axes de symétrie*, dont un seul *réel* ou terminé à la courbe. La lemniscate a toujours un *point double* et une double *inflexion* en ce point, qui est le centre. Les lemniscates sont fort nombreuses, et plusieurs sont fournies par les propriétés du triangle rectangle.

Scholie. L'aire limitée par une *courbe polaire* donnée se calcule aisément lorsque le rayon *vecteur* r est fonction, monome ou binome, soit de l'arc ω, de rayon 1, qui mesure l'angle décrit, soit du sinus ou du cosinus de cet angle, pourvu, dans ces derniers cas, que r^2 soit une fonction rationnelle de chacune de ces lignes trigonométriques. Telles seraient les différentes courbes :

$$r^2=a^2\omega=a^2\omega^2=a^2\sqrt{\omega}-b^2\sqrt[3]{\omega^2}=a^2\sin\omega=a^2\cos^2 2\omega=a^2\sin\tfrac{1}{2}\omega=a^2$$
$$\pm a^2\cos\omega=a^2\pm b^2\cos^2 2\omega=a^2\sin\omega\pm b^2\cos\omega=\sin^2\tfrac{1}{2}\omega+\cos\omega=\text{etc.}$$

III. Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite donnée a, dont les extrémités glissent, l'une sur l'axe des x et l'autre sur l'axe des y rectangulaires, est une *double lemniscate*, dont l'aire est le quart du cercle de rayon a. Ce lieu serait une lemniscate simple, si a variable était l'hypoténuse du triangle rectangle équivalent au carré C donné ; et alors $\frac{1}{2}$C exprime l'aire limitée par la courbe, laquelle par suite est une *courbe carrable*. Enfin, si la somme des côtés de l'angle droit du triangle rectangle, dont a est l'hypoténuse variable, est constante et représentée par m; le lieu du pied est encore une lemniscate, dont l'aire est la moitié du cercle de rayon m.

IV. Le point $(2a,0)$ étant donné sur l'axe des x rectangulaires, on

mène, de ce point une oblique quelconque L à l'axe des y, et de l'origine on mène sur L, la perpendiculaire P, dont le pied (x',y') est sur une circonférence : si l'on prolonge P de $2a$; l'extrémité (x,y) de la longueur $P+2a$ appartient à la courbe

$$(y^2+x^2-2ax)^2=4a^2(y^2+x^2) \text{ ou } r=4a\cos^2\tfrac{1}{2}\omega.$$

L'aire limitée par cette courbe est triple du cercle de rayon a.

Scholie I. On peut calculer l'aire de chacune des deux *lemniscates*, obtenues en prolongeant P, soit de x', soit de y'.

Scholie II. Par le pied (x',y') de P, si l'on mène une parallèle à l'axe des x positifs et si du pied de l'ordonnée y' de l'extrémité de cette parallèle $2a$ ou x' ou y', on mène une perpendiculaire à P; le pied (x,y) de cette perpendiculaire appartient chaque fois à une lemniscate, dont on sait calculer l'aire.

Scholie III. Observons encore que si, par le point donné $(2a,0)$, on mène a l'oblique L, la perpendiculaire égale à y'; l'extrémité (x,y) de celle-ci appartient à la double lemniscate $r^2=a^2\sin^2 2\omega$. (La perpendiculaire pourrait être égale soit à x', soit à $2a$).

V. Si du point $(k,0)$ de l'axe des x rectangulaires d'une ellipse, dont $2a$ et $2b$ sont les axes, on abaisse des perpendiculaires sur ses tangentes : le lieu de tous les pieds (x,y) de ces perpendiculaires est représenté par l'équation

$$(y^2+x^2-kx)^2=b^2y^2+a^2(x-k)^2.$$

C'est donc une courbe algébrique du quatrième degré, que l'on peut discuter et en calculer l'aire A, pour différentes valeurs particulières de k.

1° Si $k=c$; comme $c^2=a^2-b^2$, l'équation devient

$$(y^2+x^2-a^2)[y^2+(x-c)^2]=0;$$

elle représente donc à la fois le foyer positif et la circonférence décrite sur le grand axe, comme diamètre.

2° Si $k=0$, l'équation se simplifie et devient

$$(y^2+x^2)^2=b^2y^2+a^2x^2.$$

Cette courbe, circonscrite à l'ellipse proposée, la touche aux quatre sommets et a plusieurs points d'inflexion. Ce qui est remarquable ici, c'est que l'aire A, limitée par la courbe, s'obtient immédiatement a l'aide de l'*analogie*, comme il suit : si $b=0$, l'aire se réduit aux deux cercles, ayant chacun $\frac{1}{2}a$ pour rayon, et l'on a $A=\frac{1}{2}\pi a^2$. Mais si $b=a$, il vient $A=\pi a^2$. Il faut donc, pour satisfaire à ces deux conditions particulières, qu'on écrive $A=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$. De sorte que la somme et la différence des aires, limitées par la courbe et par l'ellipse, équivalent respectivement aux demi-cercles, de rayons $a+b$ et $a-b$.

3° Si $k=-a$, il est clair, en changeant x en $x+a$, que la courbe devient

$$(y^2+x^2-ax)^2=b^2y^2+a^2x^2.$$

Si $b=0$, l'aire A devient $A=\pi a^2$; si $a=0$, on a $A=\frac{1}{2}\pi b^2$; et si $b=a$, l'équation polaire donne $A=\frac{3}{2}\pi a^2$. Pour que l'aire A cherchée satisfasse à ces trois conditions particulières, il faut donc qu'on ait $A=\pi(a^2+\frac{1}{2}b^2)$. Et si l'on posait $k=-b$, on trouverait de même l'expression de l'aire A.

4° Pour l'hyperbole, b^2 devient $-b^2$; donc si alors $k=0$, il vient

$$(y^2+x^2)^2=a^2x^2-b^2y^2.$$

Dans ce cas, $c^2=a^2+b^2$; et le lieu des pieds est la *lemniscate* représentée par l'équation polaire

$$r^2=a^2-c^2\sin^2\omega.$$

Ici, pour calculer l'aire A, depuis $\omega=0$ jusqu'à $c\sin\omega=\pm a$, la méthode précédente ne pourrait point s'employer : il faut poser $\omega=nz$, n étant un nombre entier *infini*; chercher ensuite l'expression du v ième *secteur* élémentaire, savoir $\frac{1}{2}a^2z-\frac{1}{2}c\,z\sin^2vz$, d'où

$$A=2a^2nz-2a^2zf\sin^2nz\,;$$

et l'on trouvera, d'après l'expression de la somme $f\sin^2nz$, où $nz=\omega$,

$$A=(a^2-b^2)\omega+ab.$$

VI. Soit (x',y') un point quelconque de la circonférence $x^2+y^2=a^2$: si l'on prolonge le rayon en ce point de la longueur x', le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est la courbe composée de quatre branches, égales et opposées deux à deux, chacune en forme de *cœur* et représentée par la quadruple équation polaire $r=\pm a\pm a\cos\omega$. L'aire de chaque branche est les 3 moitiés du cercle proposé.

Scholie I. On aurait la même courbe, si l'on prolongeait le rayon a de l'y' de son extrémité. On pourrait le prolonger d'une longueur égale à la moyenne proportionnelle entre a et x' ou entre a et y'.

Scholie II. Et si le sommet d'un angle droit mobile est au centre de la circonférence proposée, (x',y') étant le point où elle est rencontrée par le premier côté de l'angle ; quelle est l'aire de la courbe décrite par le point (x,y), situé sur le second côté, à la distance $a+y'$ ou $a+x'$ du centre?

Scholie III. Si la circonférence est $y^2+x^2=2ax$ et qu'on prolonge chaque corde, menée de l'origine, d'une longueur égale à l'x' ou à l'y' de son extrémité; le lieu de tous les points ainsi obtenus, est la courbe polaire $r=2a(\cos\omega+\cos^2\omega)$, où ω croît depuis 0 jusqu'à $\pm 90^\circ$. On peut calculer l'aire limitée.

SURFACES DU SECOND ORDRE I. Toutes les *surfaces du second ordre*, ayant

un *centre*, sont représentées par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1, \ldots (1)$$

laquelle est aux *axes principaux* ou aux *axes conjugués*, suivant que le trièdre des coordonnées est droit ou non. On sait que cette équation représente l'*ellipsoïde*, l'*hyperboloïde* à une nappe ou l'*hyperboloïde* à deux nappes, suivant que les trois coefficients donnés A, B, C sont *positifs*, ou que C est seul *négatif*, ou enfin que A est seul *positif*. De plus, si $2a$, $2b$ et $2c$ désignent les trois *axes principaux* ou les trois *diamètres conjugués*, sur les axes des x, des y et des z respectifs, on aura

$$Aa^2=1, \quad Bb^2=1 \text{ et } Cc^2=1.$$

Il importe souvent de calculer les longueurs des trois axes principaux $2a$, $2b$, $2c$; ce à quoi l'on parvient, par les relations précédentes, si le trièdre des coordonnées est *droit*. Mais s'il est *oblique*, soient p, q, r les *cosinus* des angles (xy), (xz) et (yz); soient p', q', r' leurs *sinus*. Si d est un demi-diamètre de l'une quelconque des trois surfaces proposées et qu'on pose $d^2=u$, on trouve, pour calculer les trois demi-axes principaux a, b, c, c'est-à-dire les trois valeurs de $\sqrt{u}$, l'une *maximum*, l'autre *minimum* et la troisième entre ces deux-là, l'équation

$$ABCu^3-(AB+AC+BC)u^2+(Ar'^2+Bq'^2+Cp'^2)u$$
$$-(1-p^2-q^2-r^2+2pqr)=0 \ldots . (2)$$

Cette équation fournit immédiatement les trois relations connues entre les diamètres conjugués et les axes principaux.

II. Pour appliquer cette équation, soient α, β, γ les inclinaisons respectives des trois axes des z, des y et des x sur les plans des xy, des xz et des yz; soient d'ailleurs z', y', x' les distances à ces plans d'un point quelconque de l'espace : on aura $z'=z\sin\alpha$, $y'=y\sin\beta$ et $x'=x\sin\gamma$. Cela posé, si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points (x,y,z) tels, que le carré donné R^2 soit, 1° la somme des carrés des distances de chacun aux trois plans coordonnés, 2° l'excès de la somme des carrés des distances aux plans des yz et des xz, sur le carré de la distance au plan des xy, 3° enfin, l'excès du dernier carré sur la somme des deux autres; il est clair qu'on aura chaque fois, pour représenter le lieu cherché, une équation de la forme (1), dans laquelle les coefficients A, B, C seront les rapports de $\sin^2\gamma$, $\sin^2\beta$ et $\sin^2\alpha$ à R^2.

Si les angles plans (xy), (xz) et (yz) sont égaux à 60°, d'où $p=q=r=\frac{1}{2}$ et $p'=q'=r'=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, on aura $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=\frac{2}{3}$: donc, pour l'ellipsoïde proposé, $a=2R$, $b=c=R$; pour l'hyperboloïde à une nappe, $2a=R\sqrt{(1+\sqrt{17})}$, $2b=2R$ et $2c=R\sqrt{(1-\sqrt{17})}$; enfin pour l'hyperboloïde à deux nappes, on a $2a=R\sqrt{(-1+\sqrt{17})}$, $2b=2R\sqrt{-1}$ et $2c=R\sqrt{(-1-\sqrt{17})}$.

On peut encore calculer les axes principaux des trois surfaces, 1° lors-

que l'angle $(xy)=90°$ et l'angle $(xz)=(yz)=60°$, 2° lorsque $(xy)=60°$ et $(xz)=(yz)=90°$. Dans chacun de ces cas, quel serait le lieu géométrique, si l'on devait avoir $x'y'+x'z'+y'z'=R^2$? ou $R^2=x'y'+x'z'-y'z'$? ou enfin, $R^2=x'y'-x'z'-y'z'$?

III. Pour connaître le genre de la surface représentée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=G\,, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dans laquelle les coordonnées sont rectangulaires; soit d un demi-diamètre quelconque de la surface proposée et soit $d^2v=G$: il faut donc calculer ses axes principaux, en cherchant le *maximum* et le *minimum* de d^2 ; or, en éliminant d'abord G entre (3) et $vx^2+vy^2+vz^2=G$, ce maximum et ce minimum répondent aux valeurs de v dans l'équation

$$\begin{aligned} &v^3-(A+B+C)v^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)v \\ &\quad -(ABC+2DEF-CD^2-BE^2-AF^2)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{aligned}$$

Cette équation symétrique est facile à retenir : pour l'appliquer à la recherche des axes principaux de la surface

$$4x^2-y^2-z^2+4yz-16x+2y-4z=21\,,$$

les coordonnées étant rectangulaires, il faudra d'abord faire disparaître les termes affectées des premières puissances des variables x, y, z. Or, pour cela, il faut, comme on sait, dériver l'équation successivement par rapport à chacune des coordonnées x, y, z, considérée comme seule variable, et égaler chaque dérivée à zéro ; ce qui donne les trois équations simultanées :

$$8x-16=0\,, \quad -2y+4z+2=0 \text{ et } -2z+4y-4=0.$$

Ces équations donnent, pour les coordonnées de la nouvelle origine du système parallèle, $x=2$, $y=1$ et $z=0$: ce sont les coordonnées du *centre* de la surface ; de sorte que ces valeurs réduisent $4x^2-y^2-z^2+4yz-16x+2y-4z-21$ à -36, et que par suite on a, pour l'équation de la surface, *rapportée à son centre*,

$$4x^2-y^2-z^2+4yz=36.$$

L'équation (4) devient par conséquent

$$v^3-2v^2-11v+12=0\,;$$

d'où $v=1$, $v=4$ et $v=-3$, puis $a^2=36$, $b^2=9$ et $c^2=-12$. La surface est donc l'hyperboloïde à une nappe $x^2+4y^2-3z^2=36$. Et l'on peut calculer l'aire de la section faite par le plan $z=x-2$.

Propositions. Voici d'autres applications de l'équation (4) au calcul des axes principaux : Les coordonnées rectangulaires de chaque point d'une surface algébrique sont les trois dimensions d'un parallélipipède rectangle P, nécessairement variable, et l'on a cette suite de propositions :

1° Si le carré numérique donné R^2 équivaut à la surface totale de P, tous les points proposés appartiennent à l'hyperboloïde à deux nappes de révolution ; car $2a=2R$ et $2b=2c=2R\sqrt{-1}$.

2° Si R^2 est l'excès de la surface latérale de P sur la somme de ses deux bases, ou réciproquement, on aura chaque fois un hyperboloïde.

3° Si R^2 équivaut au carré fait sur la diagonale de P, plus ou moins la surface totale, tous les points proposés constituent le système de deux plans ou l'hyperboloïde de révolution.

4° Quelle serait la surface, si R^2 devait valoir le carré de la diagonale de P, plus ou moins la double somme des deux bases ? Ou cette double somme moins le carré ? ou bien le carré fait sur la diagonale de P, plus ou moins la surface latérale, ou réciproquement ? ou bien encore la somme des carrés des quatre diagonales de P, plus ou moins la surface totale ? Quelle serait aussi la surface, lieu de tous les points proposés, si l'on devait avoir $z^2+2xy=36$? ou $z^2-2xy=64$? ou enfin, si P devait toujours être équivalent au cube donné 125 ?

Remarquons d'ailleurs que les coordonnées étant rectangulaires dans les deux surfaces concentriques

$$2xy+4xz-2yz=h^3 \text{ et } 4xy+8xz-4yz=k^3;$$

on peut calculer les trois axes principaux de chacune et prouver ainsi que ce sont deux hyperboloïdes *semblables*, à une nappe. De plus, si on les coupe par le plan $z=x-y$; non-seulement les deux sections sont semblables, mais de plus l'aire de la projection de la première, sur le plan des xy, est équivalente au cercle de rayon h ; d'où résultent ensuite les aires des deux sections.

Remarquons enfin que, *dans les surfaces du second ordre ayant un centre, la somme algébrique des inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires quelconques est une grandeur constante.* On peut même calculer numériquement cette somme dans chacune des surfaces représentées par la double équation

$$x^2+y^2+8z^2-14xy+2x-14y+16z=63=-81.$$

Mais il faudra d'abord écrire les équations aux axes principaux.

IV. Les coordonnées étant rectangulaires, dans les cinq surfaces du second ordre, soit S le *segment* et h sa *hauteur*, à partir de l'origine, la *base* étant parallèle à l'un des plans coordonnés et l'origine étant au *sommet* de la surface. Les plans parallèles à la base de S divisent h en un nombre *infini* n de parties égales à u, d'où $h=nu$, et ils divisent S en n *tranches*, toutes de même épaisseur u infiniment petite ; la v ième de ces tranches, à partir du sommet, n'est donc au fond qu'un *cylindre* droit, dont la mesure est le produit de sa base par u. Cherchant donc la mesure de cette base, d'après l'équation de la surface, on aura l'expression de la v ième tranche T de S ; dans laquelle faisant successivement $v=1, 2,$

3, 4, . . . , n, puis prenant la somme et observant que

$$\int n = \tfrac{1}{2}n^2, \int n^3 = \tfrac{4}{3}n^3, \int n^3 = \tfrac{1}{4}n^4, \text{ etc.},$$

on aura l'expression du volume S, indépendante de n et de u. Appliquons cette méthode aux cinq surfaces, du second ordre, rapportées à leurs axes principaux :

1° Pour l'*ellipsoïde*, où l'on change d'abord x en $x-a$, afin de placer l'origine, qui était au centre, à l'extrémité négative du grand axe $2a$, et où h se mesure sur $2a$, à partir de ce sommet, on trouve

$$a^2\mathrm{T} = \pi bc(au^2v - u^3v^2) \text{ et } a^3\mathrm{S} = \pi bch^2(a - \tfrac{1}{3}h).$$

2° Pour l'*hyperboloïde* à une nappe, où h se trouve sur le demi-axe imaginaire c, à partir de l'ellipse de gorge, il vient

$$c^2\mathrm{T} = \pi ab(c^2u + u^2v^2) \text{ et } c^2\mathrm{S} = \pi abh(c^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

3° Pour l'*hyperboloïde* à deux nappes, h étant le prolongement du demi-axe a réel, on trouve

$$a^2\mathrm{T} = \pi bc(au^2v + u^3v^2) \text{ et } a^2\mathrm{S} = \pi bch^2(a + \tfrac{1}{3}h).$$

4° Pour le *paraboloïde elliptique* $ay^2 + bz^2 = abx$, où $x = h$, on a

$$\mathrm{T} = \pi u^2v\sqrt{(ab)} \text{ et } \mathrm{S} = \tfrac{1}{2}\pi h^2\sqrt{(ab)}.$$

5° Enfin, pour le *paraboloïde hyperbolique* $ay^2 - bz^2 = abx$, où le segment S est limité par la surface, le plan des yz et le plan $x = h$, on trouve

$$3a^2\mathrm{T} = 4u^4v^3\sqrt{(2ab)} \text{ et } 3a^2\mathrm{S} = h^4\sqrt{(2ab)}.$$

Observons que si $h = c$, dans l'hyperboloïde à une nappe, et si $h = a$, dans l'hyperboloïde à deux nappes, il vient chaque fois $\mathrm{S} = \frac{4}{3}\pi abc$, c'est-à-dire *le volume de l'ellipsoïde*, pour lequel $h = 2a$.

6° On voit que, pour calculer le volume du segment S, dans les cinq surfaces du second ordre, ce qui est parfois nécessaire, il faut d'abord calculer les *axes* ou les *paramètres principaux*, comme dans les différentes questions sur les lieux géométriques, que nous allons énoncer. Mais avant, observons que, les coordonnées étant rectangulaires, dans la conique $y^2 = 2px + qx^2$, si S désigne le segment de cette courbe, intercepté par la double ordonnée qui répond à $x = h$, et si d est la distance de l'origine à la droite D, parallèle à l'axe des y et placée hors du segment ; le volume engendré par la révolution de S autour de D, a pour expression

$$\text{vol. S} = \mathrm{S} \cdot 2\pi d \pm \pi h^2(p + \tfrac{1}{3}qh),$$

le signe + ayant lieu lorsque l'arc de S est *concave* et le signe — quand il est *convexe* vers D.

Ce théorème fournit plusieurs conséquences utiles, faciles à prévoir. Il en résulte le moyen de calculer le *minimum* de l'argent fin employé à la confection d'un vase cylindrique droit, dont la paroi doit avoir partout un millimètre d'épaisseur, tant pour la base elliptique (ou circulaire) et

la surface latérale, que pour le couvercle, demi-ellipsoïde allongé, décrit par la demi-base ; le vase devant avoir un litre de capacité intérieure. La base pourrait être un segment de parabole, terminé par la double ordonnée, le couvercle étant le demi-paraboloïde de révolution ; etc.

7° En général, le couvercle est une sorte de *voûte*, dont on sait calculer la capacité, d'après le volume de chacun des *onglets cylindriques* qui la composent. Supposons que la *base* de la voûte soit un rectangle donné $4cd$, la *hauteur* étant désignée par h : la voûte est donc composée de quatre onglets cylindriques, de hauteur h commune et de *bases* équivalentes à cd. Soit O l'un de ces onglets, ayant pour *base directrice* le demi-segment de la conique $y^2=2px+qx^2$, pour lequel $x=h$ et $y=c$: on trouve

$$c\cdot O=dh^2\left(p+\tfrac{1}{3}qh\right).$$

Pour la parabole, où $c^2=2ph$ et $q=0$, le volume de la voûte est $2cdh$ et se réduit à $\frac{1}{4}m^3$, si $c=d=h=\frac{1}{2}m$. Pour l'ellipse, où $ap=b^2$ et $a^2q=-b^2$; si $d=a$, $c=b$ et $h=a$, le volume de la voûte devient $\frac{8}{3}a^2b$ et se réduit à $\frac{1}{3}m^3$, si $c=d=h=\frac{1}{2}m$. On peut encore examiner le cas de l'hyperbole ; et voici maintenant différentes propositions sur les surfaces du second degré.

V. Les coordonnées étant rectangulaires, 1° le plan est le lieu de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun aux deux points $(2,1,1)$ et $(3,-1,-2)$ vaut la somme des carrés des distances de ce point aux deux $(3,2,1)$ et $(1,1,-1)$; 2° si la somme des quatre carrés doit valoir 100 ou être un *minimum*, le lieu cherché est une surface sphérique ou son centre.

VI. Si un plan se meut dans l'espace de telle sorte que deux sphères fixes interceptent constamment sur lui deux cercles égaux, ce plan, dans son mouvement, est toujours tangent au paraboloïde de révolution, décrit par la parabole dont l'axe passe par les centres des deux sphères et dont le foyer est le milieu de la droite qui joint ces deux centres. Cette courbe elle-même touche constamment la droite se mouvant de telle sorte que, rencontrant deux grands cercles fixes, dans le plan des xy, ceux-ci interceptent sur la droite mobile deux cordes égales. Et si l'on cherche à quelle surface sont tangents la suite de plans tels, que la somme algébrique des distances de chacun aux m sommets d'un polyèdre donné soit la longueur constante m fois a, on trouve la surface sphérique, ayant a pour rayon et pour centre celui des moyennes distances des m sommets proposés.

Scholie. Ce dernier théorème et son analogue sur un plan sont conséquences immédiates de la théorie des *centres des moyennes distances*, en géométrie. Mais pour démontrer analytiquement ces quatre théorèmes, il

nous suffira de considérer le dernier, la méthode étant analogue pour les trois autres. Soit (x',y') le contact de la droite $y-y'=n(x-x')$ avec la courbe cherchée ; soient k et h les sommes algébriques des ordonnées et des abscisses rectangulaires des m sommets du polygone donné dans le plan des xy : on aura d'abord $k-my'-n(h-mx')=ma\sqrt{(1+n^2)}$. Comme n est inconnu, on observe que, pour la tangente immédiatement consécutive, n se change en $n+v$, v étant infiniment petit, et que par suite le contact (x',y') ne change point ; d'où résulte la valeur de n, etc. (Voyez le tome XX des Annales de Mathématiques, p. 59 et 307).

VII. Les milieux des cordes, interceptées par une surface du second degré, sur toutes les droites menées d'un point donné, appartiennent à une autre surface du second degré, passant par le point donné. Ainsi ce point étant (2,2,0) et les coordonnées rectangulaires, l'hyperboloïde à une nappe $x^2+y^2+3z^2-4xy=18$, fournit l'hyperboloïde à deux nappes $x^2+y^2+3z^2-4xy+2x+2y=0$; l'ellipsoïde $2x^2+y^2+z^2-2xy=36$, fournit l'ellipsoïde *semblable* $2x^2+y^2+z^2-2xy-10x-8x=0$; le cylindre à base elliptique $x^2+y^2+z^2+2xy=18$, fournit le paraboloïde elliptique $x^2+y^2+z^2+2xy-4x-4y=0$; etc.

VIII. La surface sphérique, de rayon a donné, étant rapportée à ses axes principaux ; si l'on prolonge extérieurement le z de chaque point, de la longueur constante p, ou d'une longueur égale, soit au z soit à l'x ou à l'y du même point ; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une sphère égale à la proposée, dans le premier cas, et un ellipsoïde, dans chacun des trois derniers. Le volume de l'ellipsoïde est les trois demies de celui de la sphère, dans le second cas ; tandis que dans le 3^e^ et le 4^e^ cas, il en est les trois quarts. Et si, à partir de son pied, on prolongeait l'y et le z de chaque point du double de l'x du même point, on aurait encore un ellipsoïde, dont le volume serait les 3 quarts de celui de la sphère. (On pourrait d'abord considérer la surface $x^2+y^2-z^2=a^2$, etc.).

IX. Dans toute surface du second ordre, ayant un centre, le triangle qui joint les extrémités de trois demi-diamètres rectangulaires quelconques, est tangent à la surface sphérique concentrique. Et si $Ax^2+By^2+Cz^2=D$ désigne la surface proposée, rapportée à ses axes principaux ; en passant du système proposé à un autre, aussi rectangulaire, de même origine, le rayon r de la sphère sera donné par $(A+B+C)r^2=D$.

Scholie. Les mêmes calculs prouvent que la somme des carrés inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est une grandeur constante.

X. Le lieu géométrique du sommet d'un trièdre droit mobile, dont les arêtes touchent constamment l'ellipsoïde $16x^2+4y^2+z^2=16$, est un autre ellipsoïde, savoir $20x^2+17y^2+5z^2=84$.

C'est ce qu'on démontre en passant du système proposé à un autre, aussi rectangulaire, d'une autre origine. On peut aisément calculer la différence des deux volumes.

Scholie. On démontre de même que le lieu géométrique du sommet d'un trièdre droit mobile, dont les arêtes s'appuient constamment sur la circonférence $x^2+y^2=36$, est l'ellipsoïde de révolution $x^2+y^2+2z^2=36$; tandis que pour l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, le lieu géométrique est $a^2y^2-b^2x^2+(a^2-b^2)z^2=-a^2b^2$. On peut avoir $a>b$, $a<b$ ou $a=b$. On peut aussi considérer la parabole $y^2=2px$; et alors on aura le paraboloïde de révolution. (Annales de Mathématiques, tome XVIII, p. 230 et suiv.).

XI. Les angles plans du trièdre des coordonnées étant chacun de 60°, peut-on calculer le maximum et le minimum du demi-diamètre d, dans la surface $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=24$? Ou dans celle-ci : $xy+xz+yz=64$?

Scholie. Dans la première, on simplifie les calculs en posant $d^2v=24$ et $2k(v-1)=v+2$; alors on trouve, pour les axes principaux, $2a=2b=2\sqrt{6}$ et $2c=2\sqrt{(-48)}$. On procède de même pour la seconde surface; mais le calcul des axes principaux est généralement fort compliqué, lorsque les coordonnées ne sont pas rectangulaires.

XII. Un point $(2a,0,0)$ étant donné sur l'axe des x rectangulaires; si de ce point on mène l'oblique quelconque L au plan des yz et par le pied (y,z) de cette oblique, la parallèle à l'axe des x, égale, soit à L, soit à $L+y$ ou à $L+y+z$; l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle, appartient chaque fois à l'hyperboloïde à deux nappes, dont on sait calculer les axes principaux et le volume d'un segment S, de hauteur donnée h, sur l'axe des x, contenant l'axe réel. Dans le premier cas, l'hyperboloïde est de révolution et l'on trouve $S=\pi h^2(2a+\frac{1}{3}h)$.

XIII. Par le point $(2a,0,0)$ de l'axe des x rectangulaires, on mène l'oblique quelconque L au plan des yz; puis de l'origine, la perpendiculaire P à L, la rencontrant en un point (x',y',z') d'une surface sphérique; enfin, de ce point, on mène, à l'axe des x, la parallèle R égale, soit à $2a$, soit à x', à y' ou à z' : le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle est la surface sphérique de rayon a, dans le premier cas; l'ellipsoïde de révolution, dont le volume est double de celui de cette sphère, dans le second; etc. Enfin, si du milieu (a,y,z) de L, on mène à l'axe des x la parallèle $\frac{1}{2}L+y$ ou $\frac{1}{2}L+z$ ou simplement $\frac{1}{2}L$; quels seront chaque fois les trois axes principaux de la surface, lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle? (Sa longueur pourrait être $\frac{1}{2}L+y+z$).

XIV. Une perpendiculaire à un plan et un point sur celui-ci étant donnés; quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que les distances de chacun, à la droite et au point donnés, soient égales entre elles? (Ici, pour mieux voir le genre de la surface cherchée et simplifier en même temps, il faut prendre la perpendiculaire pour axe des z, le plan pour celui des xy et diriger l'axe des x rectangulaires sur le point donné, qui sera, je suppose, $(5,0,0)$; et alors on verra que le lieu de-

mandé est la surface latérale du *cylindre droit*, à base *parabolique* $x^2=10x$, et dont le volume, pour $x=10$ et $y=12$, est 1600).

Scholie. Si la somme des carrés des distances devait valoir un carré donné, le lieu géométrique serait un *ellipsoïde de révolution;* tandis que ce serait un *cylindre parabolique*, si 36 était la différence des deux carrés des distances. Mais si l'une de ces deux distances devait être double de l'autre, on aurait un *ellipsoïde* ou un *hyperboloïde de révolution.*

XV. Quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que la distance de chacun à l'axe des x rectangulaires, soit moyenne proportionnelle entre la longueur 10 et l'x de cette distance? Quel est le volume limité par la surface résultante et le plan $x=40$? Enfin, quelle est l'aire de la section faite par le plan $2y+2z-x+4=0$?

XVI. Si chaque point d'une surface est tel, que sa distance à l'axe des x rectangulaires, augmentée de 4, soit double de l'x du pied de cette distance; quel est le volume numérique, limité par la surface, le plan des yz et le plan $x=10$? Calculer aussi l'aire d'un segment de la section faite par le plan $2x-z-3=0$.

XVII. Les coordonnées étant rectangulaires, quel est le genre de surface représentée par $yz=20x$? Peut-on calculer le volume limité par la surface, le plan des yz et le plan $z=10$? Peut-on calculer aussi l'aire de la section faite par le plan des xy, aire comprise entre la courbe résultante et la parallèle $x=12$? Quelle est la surface $x^2=2yz$? ou $x^2=4yz+a^2$?

XVIII. Un plan et un point extérieur étant donnés, quel est le lieu géométrique de tous les points tels, 1° que la distance de chacun au point proposé soit égale à la distance au plan? 2° que la distance au point soit double de la distance au plan? 3° que la distance au plan soit double de la distance au point? 4° que la somme des carrés des deux distances soit équivalente au carré donné 64? 5° Enfin, que la différence des deux carrés, prise des deux manières, soit équivalente au carré donné 36? Peut-on chaque fois calculer l'aire d'un segment de la section faite par le plan $x-y+z=0$?

XIX. Si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points tels, que le z de chacun soit la hauteur menée de l'angle droit du triangle rectangle variable, dont l'hypoténuse, partant de l'origine des coordonnées rectangulaires, se trouve sur le plan des xy, et dont le côté opposé à l'origine est constamment double du côté adjacent; on trouve le cône asymptote de l'hyperboloïde $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=1$. On aurait encore un cône asymptote, si l'angle à l'origine était double de son complément, ou si l'on prolongeait au-delà du sommet de l'angle droit, le côté double d'une longueur égale à la sienne ou égale à sa moitié. Mais si le second segment de l'hypoténuse doit valoir constamment 4, on aura la surface de révolution $z^4=16(x^2+y^2)$, dont le volume, depuis $z=0$ jusqu'à $z=10$, est 125π.

SURFACES ALGÉBRIQUES. Voici plusieurs propositions sur la génération des surfaces Algébriques, de différents ordres :

I. L'oblique quelconque L au plan des yz étant menée par le point $(2a,0,0)$ de l'axe des x rectangulaires; si par ce point, on mène à l'oblique et dans le plan Lx, la perpendiculaire N (parallèle à la perpendiculaire P à L, menée de l'origine, (x',y',z') étant le pied de P); l'extrémité (x,y,z) de N appartient à la surface sphérique, dont $2a$ est le rayon, si $N=2a$; et si $N=x'$, l'extrémité de N appartient, par le changement de $x-2a$ en x, à la surface du 6me degré :

$$(z^2+y^2+x^2)^3=4a^2x^4.$$

C'est une surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la demi-courbe polaire $r^2=4a^2\cos^4\omega$; et c'est aussi le lieu du pied de la perpendiculaire, à chaque rayon $2a$ de la sphère, abaissée du pied du z de l'extrémité de ce rayon. Le volume limité est les 4 cinquièmes de celui de la sphère de rayon a.

Scholie. On peut aussi calculer l'équation de la surface qui répond aux hypothèses de $N=y',z'$ ou L, etc.

II. Si l'on prolonge de $2a$ la perpendiculaire P, menée de l'origine, sur l'oblique quelconque L, au plan des yz, tirée du point donné $(2a,0,0)$, les coordonnées étant rectangulaires; le point (x,y,z), ainsi obtenu, appartient à la surface

$$(z^2+y^2+x^2-2ax)^2=4a^2(z^2+y^2+x^2).$$

C'est une surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la courbe polaire $r=4a\cos^2\frac{1}{2}\omega$, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=180°$.

Scholie. Si P est prolongée de x', l'extrémité (x,y,z) de $P+x'$ appartient à la surface

$$(z^2+y^2+x^2)(z^2+y^2+x^2-2ax)^2=4a^2x^4.$$

C'est encore une surface de révolution, décrite autour de l'axe des x par la demi-courbe polaire $r=2a(\cos\omega+\cos^2\omega)$; et l'on peut calculer l'aire limitée par cette courbe. (On pourrait prolonger P de y', de z', de L, etc.).

III. Observons encore que si du pied du z' de l'extrémité de P, on abaisse une perpendiculaire à P; le pied (x,y,z) de cette perpendiculaire appartient à la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2ax(x^2+y^2).$$

Elle touche à l'origine le plan des yz; elle est coupée, par les plans des xy et des xz, suivant une circonférence et suivant la courbe polaire $r=2a\cos^3\omega$, dont on sait calculer l'aire; etc.

Scholie. Par le pied de l'oblique L et dans le plan Lx, si l'on mène, à cette oblique, la perpendiculaire égale, soit à $2a$, soit à L, à x', à y' ou à z';

on peut chaque fois calculer l'équation du lieu de l'extrémité de cette perpendiculaire.

IV. Si par chaque point (x',y',z') de la surface sphérique, dont a est le rayon, on mène la parallèle b à l'axe des x rectangulaires ; quel sera le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle, quand on supposera b égale à a, à x', à y' ou à z' ? La parallèle étant égale à a ou à x' ; si du pied du z de son extrémité on abaisse, sur le rayon a, aboutissant en (x',y',z'), une perpendiculaire ; le pied (x,y,z) de celle-ci appartient à la surface

$$(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2-ax)^2=a^2(2x^2+y^2)^2,$$
ou bien à $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2(2x^2+y^2)^2$.

V. Calculer le rayon de la surface sphérique, lieu des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées, de l'origine des coordonnées rectangulaires, sur les droites menées par le point $(2,2,4)$. De plus, si par le pied (x',y',z') de chaque rayon, on mène au plan des xy, la parallèle 8, quel sera le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle telle, qu'on ait toujours $x'=y$?

Scholie. Les propriétés des plans tangents aux surfaces du second ordre fournissent plusieurs problèmes remarquables, sur la génération de certaines surfaces algébriques, problèmes que nous avons considérés, p. 356 et suiv. du traité de géométrie analytique.

VI. La sphère étant rapportée à ses axes principaux ; si l'on prolonge chaque rayon a d'une longueur égale à l'x' de son extrémité (x',y',z'), le lieu géométrique de tous les points (x,y,z), ainsi obtenus, est la surface

$$(x^2+y^2+z^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2+z^2).$$

C'est la surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la demi-courbe polaire $r=2a\cos^2\frac{1}{2}\omega$, ayant le seul axe de symétrie $2a$, sur l'axe des x. L'aire A, limitée par cette courbe, peut aisément se calculer ; et l'on peut aussi calculer le volume limité par la surface proposée, laquelle est *semblable* à la surface, déjà considérée plus haut.

Mais observons que la courbe polaire a réellement pour équation $r=\pm a\pm a\cos\omega$; elle est donc composée de quatre branches, égales entre elles et opposées deux à deux ; et elle est inscrite dans le carré construit sur $4a$. (On peut calculer l'aire limitée par les parties extérieures des quatre branches : ce calcul donne $\frac{3}{2}\pi a^2+9a^2$).

Courbes polaires. Voici diverses courbes remarquables, que l'on peut représenter par des *équations polaires*, pour les discuter et pour calculer plus aisément les *aires* limitées par ces courbes.

1. Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y) un point quelconque de la circonférence, dont a est le rayon : si, à partir de l'origine, on porte sur la droite qui la joint au point (X,Y), la longueur X, ou Y, ou X+Y, ou a+X, ou a+Y, ou a—X, ou a | X

$+Y$, ou $a+X-Y$, etc. : quel est chaque fois le lieu géométrique du point (x,y), ainsi obtenu ?

L'une des courbes cherchées a pour équation

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x+y)^2 ;$$

d'où résulte l'équation polaire

$$r^2=a^2(\cos\omega+\sin\omega)^2 .$$

C'est le système de quatre circonférences, ayant chacune $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ pour rayon, et passant toutes par le centre de la proposée. Mais si l'on *ajoute* toujours entre elles les valeurs absolues de $\cos\omega$ et de $\sin\omega$, l'équation polaire représente uniquement la courbe plane extérieure, composée des quatre demi-circonférences égales, s'arrêtant à la circonférence proposée, où elles forment quatre points de *rebroussement*. La longueur de cette courbe est donc $2\pi a\sqrt{2}$; et quant à l'aire limitée, il est facile de voir, soit directement, soit par l'équation polaire, que cette aire a pour mesure πa^2+2a^2.

Pareillement, en ne considérant que les valeurs absolues de $\sin\omega$ et des $\cos\omega$, l'équation polaire

$$r^2=a^2(\cos\omega-\sin\omega)^2 ,$$

représente la courbe intérieure composée des quatre demi-circonférences restantes : c'est une sorte de double lemniscate, dont l'aire a pour mesure πa^2-2a^2.

II. Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y) un point quelconque de la circonférence, dont a est le rayon : si, à partir du centre, on porte sur l'axe des y successivement chacune des longueurs $X, Y, X+Y, X-Y, a+X, a-X, a+X+Y, a+X-Y$, etc. ; quel est chaque fois le lieu géométrique du pied (x,y) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par le point (X,Y) et l'origine ?

L'une des courbes cherchées a pour équation

$$(x^2+y^2)^3=a^2y^2(x+y)^2 ;$$

d'où résulte l'équation polaire

$$r^2=a^2\sin^2\omega(\cos\omega+\sin\omega)^2 .$$

Si donc on a égard seulement aux valeurs absolues de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$, la courbe est composée de deux branches égales, en forme de *cœur*, opposées au centre du cercle et de la courbe, où celle-ci a une double *inflexion*. Mais si l'on a égard aux valeurs négatives de $\cos\omega$, il en résulte la double lemniscate, représentée par l'équation polaire proposée.

Une autre courbe est représentée par l'équation polaire

$$r^3=a^2\sin^2\omega(\sin\omega-\cos\omega)^2 .$$

On sait calculer les aires limitées par ces deux courbes remarquables.

III. Si, à partir du point (X,Y) ci-dessus, on porte sur le prolongement de l'ordonnée Y, dans l'un ou l'autre sens, successivement chacune des longueurs indiquées dans le premier problème précédent; quel est chaque fois le lieu du pied (x,y) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par le point (X,Y) et l'origine?

Scholie. Dans les trois problèmes ci-dessus, l'origine pourrait être l'extrémité d'un diamètre $2a$, suivant lequel l'axe des x rectangulaires serait dirigé.

Surfaces polaires. Voici plusieurs surfaces courbes, bien remarquables, que l'on peut aussi représenter par des équations polaires; et l'on peut aisément calculer les volumes limités par celles de ces surfaces engendrées par les révolutions de courbes planes :

Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y,Z) un point quelconque de la surface sphérique, dont a est le rayon :

1° Si, à partir de l'origine, on porte sur la droite qui la joint au point (X,Y,Z), successivement les longueurs $X,Y,Z,X+Y,X-Y,X+Y+Z,$ $X+Y-Z,a+X,a-Z,a+X+Y,a+X-Y,a+X+Y+Z$, etc.; quel est chaque fois le lieu géométrique de tous les points (x,y,z), ainsi obtenus?

2° Si, à partir de l'origine, on porte sur l'axe des z rectangulaires, successivement chacune des longueurs ci-dessus; quel est chaque fois le lieu géométrique du pied (x,y,z) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par (X,Y,Z) et l'origine?

3° Si, à partir du point (X,Y,Z) on porte sur le prolongement de son Z, dans l'un ou l'autre sens, successivement chacune des longueurs indiquées (1°); quel est chaque fois le lieu du pied (x,y,z) de la perpendiculaire, abaissée du point ainsi obtenu, sur la droite passant par (X,Y,Z) et l'origine?

Scholie. Dans les trois problèmes ci-dessus, l'origine pourrait être à l'extrémité d'un diamètre $2a$, suivant lequel l'axe des x rectangulaires serait dirigé.

La discussion de ces surfaces, bien que facile et analogue à celle des courbes précédentes, demande cependant quelqu'attention pour en découvrir les différentes *nappes* et la *forme* de chacune.

Notes sur les méthodes.

Dans ce mémoire et dans les deux précédents, nous avons tâché de rendre bien sensible, par différentes applications, non-seulement la *méthode analogique*, mais surtout le *principe d'analogie directe*, lesquels dominent la science du calcul, aussi bien que la science de l'étendue.

La *méthode infinitésimale* ne diffère pas de la méthode analogique et

simplifie celle des *limites* : c'est par analogie que l'on est conduit à regarder toute ligne courbe comme une ligne brisée, composée d'une infinité de côtés, infiniment petits. Telle est, par exemple, la circonférence ; car, plus est grand le nombre de sommets du polygone régulier circonscrit au cercle, plus son périmètre a de points communs avec la circonférence ; plus il approche de coïncider avec cette courbe ; et la coïncidence serait complète, évidemment, si le nombre de sommets était le plus grand possible. L'analogie conduit donc à *regarder le cercle comme le polygone régulier du plus grand nombre de sommets, dont le rayon et l'apothème sont égaux et dont les propriétés sont, par suite, absolument les mêmes que celles de tout polygone régulier.* Il en résulte immédiatement que 1° les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres ; et partant le rapport π de la circonférence à son diamètre est un nombre *constant* et *irrationnel* ; 2° tous les cercles sont des figures *semblables* ; l'aire de chacun étant le produit du nombre π par le carré numérique de son rayon.

Ces propositions sont conséquences si immédiates, si claires et si rigoureuses du principe d'analogie directe, qu'il y a lieu de s'étonner de ce que ce moyen de recherche ne soit pas encore généralement adopté dans les traités élémentaires de géométrie, à l'exclusion de tout autre, nécessairement plus compliqué et toujours très-obscur, faute de définitions complètes.

Croit-on, par hasard, que les longues et inutiles *réductions à l'absurde*, employées à démontrer ces propositions, puissent apprendre quelque chose aux élèves, qui n'ont pas clairement la notion des grandeurs *incommensurables* entre elles ? Ne faut-il pas d'abord la définition de ces grandeurs ? Et si l'on possède cette définition, à quoi bon la réduction à l'absurde ?

La véritable définition est : deux grandeurs de même nature sont dites *incommensurables* entre elles, lorsqu'elles n'ont d'autre *commune mesure* qu'une quantité infiniment petite x, d'un ordre quelconque. Cette quantité x, toujours inconnue, n'en existe pas moins certainement, puisque deux grandeurs a et b, de même nature ont toujours un *rapport exprimable* ou *inexprimable* exactement en chiffres ; chose incontestable et admise par tout les géomètres.

Si l'on disait que les grandeurs a et b sont *incommensurables*, parce qu'elles n'ont absolument aucune mesure commune, il s'ensuivrait qu'elles n'ont absolument aussi aucun rapport ; car dès qu'il y a rapport, il y a aussi mesure commune, *assignable*, *inassignable* ou *infiniment petite* ; et l'on conçoit que le rapport $a:b$ n'existant pas, il est inutile de s'en occuper.

On est donc forcé, pour être clair et logique, d'admettre la définition ci-dessus des grandeurs incommensurables ; ce qui ramène inévitablement à

la méthode infinitésimale, et par conséquent à celles des *parties égales*, dans les proportions. Si, en effet, m et n étant deux nombres entiers, *finis* ou *infinis*, on a $A=mx$ et $B=nx$, d'où $A:B=mx:nx=m:n$; et si l'on démontre ensuite que $C=my$ et $D=ny$, d'où $C:D=my:ny=m:n$; on verra que $A:B=C:D$.

Cette méthode des proportions, très-simple et très-claire, est d'ailleurs complètement exacte, bien qu'on y raisonne sur des communes mesures inconnues : elle devrait seule figurer en géométrie, si elle n'était pas suppléée souvent par le principe d'analogie directe, tout aussi clair et aussi rigoureux, mais plus simple, en certains cas. Cependant, plusieurs auteurs de géométrie, rejetant la réduction à l'absurde, comme inutile et parfaitement incompréhensible, lorsqu'il s'agit de passer du *commensurable* à l'*incommensurable*, distinguent encore néanmoins ce dernier cas : ils pensent éviter les *infinis* en prouvant que les deux rapports cherchés sont compris tous les deux entre deux rapports, ne différant que du nombre 1 sur n, moindre que tout nombre assigné, si petit qu'il soit; vu que n est un nombre entier, aussi grand qu'on veut : ils en concluent que ces deux derniers rapports sont égaux rigoureusement, et par suite les deux derniers.

Mais admettre que les deux derniers rapports sont rigoureusement égaux, c'est supposer leur différence 1 sur n *infiniment petite* et conséquemment *nulle*, comme elle l'est, en effet, vis-à-vis des grandeurs finies : c'est supposer une commune mesure ; c'est répéter, en le compliquant, le raisonnement fait pour une mesure commune *assignable*. La distinction des deux cas, commensurable et incommensurable, complique donc, fort inutilement, les éléments de géométrie.

La théorie des parallèles, où l'on veut éviter les *infinis*, est tout aussi incompréhensible que la réduction à l'absurde, dans le passage du *rationnel* à l'*irrationnel*; parce que la définition de l'angle, sur laquelle on se base, ne le fait pas connaître tel qu'il est en effet, une *portion plane infinie*. Aussi cette théorie est-elle fort compliquée et fort obscure, lorsqu'on veut se passer du *postulatum* d'Euclide, comme dans diverses éditions de la géométrie de Legendre et notamment la 12^{me}, où il ne parvient qu'à masquer, par de longs raisonnements, les *grandeurs indéfinitésimales*. Est-il possible, par exemple, que l'élève, même le plus intelligent, qui n'a pas la notion de ces grandeurs, comprenne la démonstration, fort compliquée, du théorème sur les trois angles de tout triangle rectiligne, donnée dans cette dernière édition ? Car cette démonstration, fort ingénieuse sans doute, n'en suppose pas moins implicitement que tout angle *infiniment petit* est comme *nul* vis-à-vis de l'angle droit ; ce qui est vrai : mais elle suppose aussi que les côtés d'un angle infiniment petit coïncident ; ce qui ne saurait être ; et ainsi le théorème n'est réellement pas démontré : il ne peut l'être, clairement et complètement, qu'en se fon-

dant sur la théorie des parallèles ; elle-même devant être basée sur la nature infinie de l'angle, pour être simple, claire et complète.

Considérons l'angle droit D et l'angle aigu A extérieur, situés d'un même côté de la droite fixe MN et ayant deux côtés opposés sur cette droite : si l'on fait glisser l'angle droit D sur MN, de telle sorte que l'un de ses côtés glisse sur un côté de A, il est évident, d'après la notion de la ligne droite, que les second côtés de A et de D se couperont toujours, bien que leur intersection unique s'éloigne de plus en plus du sommet, d'abord commun. On est donc ainsi amené au postulatum d'Euclide, savoir que *toute perpendiculaire à un côté d'un angle aigu finit toujours par rencontrer l'autre côté.*

Ce postulatum, ainsi amené, me paraît d'une évidence assez complète et je n'hésiterais pas à le ranger parmi les axiomes, si la nature infinie de l'angle ne permettait de le démontrer rigoureusement. Cependant des géomètres du premier ordre, et Legendre en particulier, pour réduire le plus possible le nombre des axiomes en géométrie, ont voulu démontrer le postulatum ci-dessus ; mais ils n'y ont pas réussi, parce qu'ils n'ont pas voulu non plus considérer *explicitement* les grandeurs infinitésimales, réellement inévitables dans la science de l'étendue.

Je terminerai par les observations, fort judicieuses, que voici (elles sont consignées, tome XX des annales de Mathématiques, p. 288) : « En examinant avec attention la plupart des Traités de Géométrie élémentaire, il semble souvent que leurs auteurs aient pris à tâche de rendre, à dessein, difficile une étude qu'ils auraient dû s'efforcer, au contraire, de mettre à la portée du plus grand nombre. Indépendamment de ces continuelles réductions à l'absurde, dont on pourrait, tout au plus, donner un ou deux exemples en notes, par forme d'échantillon, et dont le moindre inconvénient est de faire perdre tout-à-fait de vue la marche des inventeurs, dans l'investigation des vérités inconnues ; combien n'est-il pas d'autres parties des éléments qui pourraient être traitées d'une manière beaucoup plus naturelle et en même temps beaucoup plus simple ? On dit, en faveur de la pratique contraire, qu'elle est plus propre à développer et à exercer l'intelligence ; mais c'est-là, ce me semble, une erreur manifeste ; et cette pratique ne me paraît propre qu'à faire briller l'adresse des auteurs qui devraient, au contraire, dans la composition de leurs ouvrages, s'oublier constamment, pour ne songer qu'à ceux qu'ils ont dessein d'instruire. Ce qui peut réellement développer et exercer l'intelligence des élèves (leur faire acquérir la science), ce sont des théorèmes et des problèmes que, par forme d'exercice, on leur donne à démontrer et à résoudre (et ajoutons que c'est le véritable moyen de leur inspirer le goût de l'étude). Leur application à retenir exactement des raisonnements et des procédés qu'ils trouvent dans un livre n'exerce uniquement que leur mémoire. Ne vaudrait-il pas beaucoup

mieux, d'ailleurs, leur présenter simplement ce qui est simple de sa nature, et réserver les forces de leur intelligence pour beaucoup d'importantes recherches qu'on ne fait point d'ordinaire figurer dans les éléments, et qui néanmoins devraient y trouver place, parce qu'elles sont, pour la plupart, fondamentales dans la science. »

Le même auteur, assignant la place que la géométrie doit occuper, dans l'enseignement scientifique moyen, ajoute : « quel peut être d'ailleurs le motif de cette gothique et inconcevable obstination, qui fait précéder, dans les écoles, l'étude de l'algèbre par celle de la géométrie? Outre que l'étude de la géométrie exige la connaissance de l'Arithmétique, que l'on ne possède parfaitement que quand on a appris un peu d'algèbre ; comment ne voit-on pas que l'algèbre n'est qu'une langue, un pur instrument, qu'il est fort inutile d'apprendre à manier, lorsqu'on possède déjà les connaissances dont son emploi aurait pu faciliter l'acquisition ? Qu'on fasse de la géométrie à la manière de Monge et de ses disciples, sans aucune sorte de calcul ; qu'on pousse cette géométrie aussi loin qu'on le pourra, j'y souscris de très-grand cœur ; mais qu'on cesse enfin de nous donner pour *géométrie pure* une géométre tout encombrée de proportions, de *componendo* et de *dividendo*, dans lesquels je ne saurais voir que des équations et des éliminations, sous un déguisement suranné. »

Ces observations et d'autres non moins justes, nous les avions faites nous-mêmes, depuis longtemps : elles résument les vues par lesquelles nous avons été guidés dans la composition de nos traités élémentaires, où, par un choix de méthodes, nous avons voulu faciliter l'étude de la science, la rendre plus complète et épargner aux jeunes élèves, par des applications propres à les intéresser, le découragement qu'ils éprouvent à l'aspect d'une longue suite de théories dont ils n'aperçoivent pas le but et dont souvent ils n'ont que des idées confuses, faute de bonnes définitions.

Les meilleurs ouvrages synthétiques de géométrie ne sont pas et ne sauraient être indépendants des signes et des opérations du calcul ; vu que la géométrie n'est pas seulement *graphique*, mais aussi *numérique*, nécessairement. L'expérience prouve d'ailleurs que l'emploi des premiers principes de l'algèbre, lorsqu'il se présente naturellement en géométrie ; non-seulement facilite l'étude de cette science, mais il complète la conviction des élèves, accélère leurs progrès et les prépare, de la manière la plus efficace, aux études supérieures. Car ils se familiarisent ainsi avec la langue des sciences physiques et mathématiques, dont la géométrie est comme la base. On ne doit donc pas se priver du secours de l'algèbre élémentaire, où souvent elle est nécessaire, dans le développement des théories géométriques.

On dira peut-être qu'en agissant ainsi, on fait de l'algèbre et non de

la géométrie. Mais qu'importe, pourvu que les vérités géométriques soient démontrées clairement et simplement ? Si vous refusez le secours de l'algèbre, dans les questions de géométrie où il faut combiner entre elles les *grandeurs numériques*, vous serez obligé d'employer, au lieu de signes algébriques, ceux beaucoup plus longs et beaucoup plus compliqués du langage ordinaire : et vous ferez, malgré vous, de l'algèbre : seulement ce sera de l'algèbre *parlée*; elle ne différera de la véritable que par plus de longueur, pas moins de clarté et de facilité.

VII. — *Mémoire sur le genre Diplosiphon.*

Par J. DECAISNE,

AIDE DE BOTANIQUE AU MUSÉUM DE PARIS, CORRESPONDANT DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE BRUXELLES, ETC.

Une plante recueillie en abondance dans les rizières du Cachemir par Victor Jacquemont et qui n'a encore été mentionnée ni décrite par les voyageurs anglais qui ont parcouru cette partie de l'Inde, m'a paru devoir constituer un genre nouveau dont j'expose ici les caractères. Elle appartient à la famille des Hydrocharydées et doit, malgré ses fleurs hermaphrodites, prendre place à côté du *Valisneria*. Le nom générique est tiré des deux enveloppes tubuleuses du périgone.

Diplosiphon. Gen. nov.

Flores hermaphroditi, pedicellati. *Spatha* tubulosa, herbacea, tenuis, ore bidentato. *Perigonium* tubo filiformi, spatham duplò superans, tenue, cum ovario basi connatum ; limbo sexpartito, laciniis oblongis erectis, infernè plus minusve inter se adnatis, exterioribus herbaceis, interioribus petaloideis albis linearibus erectis longioribus. *Stamina* 3, perigonii laciniis exterioribus opposita, loculis contiguis longitrorsum dehiscentibus. *Stylus* filiformis elongatus, cum perigonii tubo connatus. *Stigmata* 3, staminibus alterna, linearia, marginibus præsertim papilloso-hirta. *Ovarium* inferum lineari-oblongum membranaceum, 1-loculare, placentis parietalibus tribus, multiovulatis. *Ovula* anatropa. *Fructus* membranaceus, polyspermus. *Semina* ovata, testâ crustaceâ rugosâ. *Embryo* exalbuminosus, ellipticus, inversus, radiculâ superâ, cotyledone crassâ juxta radiculam biauriculatâ, ibidem fissus plumulamque adpressam exserens. — Herba annua in oryzetis crescens, radiculis fibrosis ; folia rosulata, infernè membranacea, parenchymate transversè et verticaliter celluloso-clathrata, nervo in acumen evanescente percursa ; flores e foliorum congerie orti, axillares, parvi, albidi.

Diplosiphon oryzetarum. D. floribus foliis tenuissime denticulata æquantibus.

Descript. *Herba* submersa, acaulis, annua, radiculas filiformes, simplices, albidas emittens. *Folia* radicalia, rosulata, lineari-lanceolata, sessilia, imâ basi membranaceo-marginata, sensim longè attenuata, acutissima, margine tenuissimè denticulata, siccata exilia, parenchymate tenui cellulis parvis subquadratis composito, medio venulis septisve verticalibus transversisque secto, subclathratho, nervo crassiori longitudinali. *Flores* axillares, pedunculati, e foliorum congerie orti; pedunculi teretes, post anthesin accrescentes. *Spatha* herbacea, e foliis binis inter se coalitis composita, apice bifida, nervisque percursa. *Perigonii* tubus filiformis, spatham duplò superans, cum ovario connatus, limbus sexpartitus, laciniis exterioribus oblongis, obtusis, concaviusculis, apice incrassatis, herbaceis; interioribus petaloideis, linearibus, obtusis, erectis, longioribus, tenuioribus, albis. *Stamina* foliolis perianthii exterioribus opposita; filamenta teretia v. supernè subattenuata, glaberrima; antheræ adnatæ, basi et apice obtusæ, lineares, biloculares, loculis rimâ longitudinali dehiscentibus; pollen globosum, tenuissimè echinulatum, flavidum. *Stylus* filiformis elongatus, stamina vix superans, cum perigonii tubo infernè connatus, in stigmata tria apice divisus, stigmatibus semiteretibus ad margines præsertim papillis stigmatosis onustis, perigonii lacinias interiores æquantibus. *Ovarium* lineari-oblongum, tenue, 1-loculare, loculis multiovulatis; placentis parietalibus tribus, filiformibus, fructu maturo evanescentibus v. vix conspicuis, e vasis spiralibus unis v. trinis compositis. *Ovula* seriatim verticaliter alterna, anatropa, ovoidea, funiculo brevissimo pendula. *Semina* ovoidea, testâ crustaceâ, rugoso-tuberculosa, hinc ad raphem subcristata; membrana interna tenuissima, venulis vix conspicuis percursa, pallida. *Embryo* inversus, ellipticus, exalbuminosus, carnosus; radicula obtusa supera; cotyledon lineis tenuissimis impressa, crassa, juxta radiculam biauriculata, auriculis imbricatis, tenuibus, iisdem ablatis plumulam adpressam dentiformem exerens.

La plante que je viens de décrire est fort commune dans les vallées qui, des montagnes, descendent dans le bassin de Cachemir. C'est au milieu des rizières, formées en partie par les eaux de l'Archepotte qui s'écoule du Pergunnah de Koulthehâr ainsi que dans les vastes plaines inondées qui, au-delà de Véchâo, s'étendent à Islamabad que Jacquemont l'a recueillie en abondance, en préférant, nous dit-il, marcher jusqu'au genou de son cheval dans l'eau et la boue que de suivre le sommet des petites berges gazonnées et glissantes élevées dans chaque champ pour retenir les eaux d'irrigation. C'est à cette circonstance que nous devons la plante

qui nous occupe, car les voyageurs loin de s'aventurer ainsi au milieu des cultures et des rizières, les évitent au contraire avec soin.

Jacquemont ne donne point la hauteur absolue de cette vallée On pourrait la supposer assez chaude d'après les variétés de Riz à balles et barbes noires qu'il y a récoltées et dont la culture est générale à Madagascar et dans toutes les plaines basses de l'Archipel indien. Cependant le col du Banchal, où se cultivent également ces différentes races, est élevé de 2960 m. La végétation indique une région tempérée. Des épines-vinettes, des Roses, des Coudriers, le Jasmin officinal, des Ronces, des Viormes auxquels se joint un Prunier à fruits jaunes, acerbes, qui, suivant Jacquemont, paraît être la souche de notre prunier de Mirabelle, couvrent la pente des coteaux brisés et s'associent dans les vergers du Castaba ou chef-lieu de Kournarvao aux pommiers et aux noyers. (1)

Cependant la culture du Riz s'avance au-delà de cette zone tempérée ; dans certains points elle dépasse même celle de la vigne et se trouve mêlée au Maïs à l'extrémité de la vallée de Goudjours qui s'unit à la grande chaîne du Pirpenjàl dont les sommets ont environ 5,000 mètres de hauteur absolue.

---

(1) L'aubergine, les concombres, les pastèques, le pourpier, l'ail, une espèce de chou-rave forment le fond des potagers du Cachemir ainsi que dans le midi de la France et le nord de l'Italie. Le poireau, le chou pommé sont inconnus au Cachemir ; l'oseille inusitée quoique fort commune dans la région élevée des montagnes. La coriandre constitue le principal condiment.

VIII. — *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante,*

Par E. LAMARLE,

INGÉNIEUR DES PONTS-ET-CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

Constater, s'il en est besoin, l'insuffisance des méthodes généralement adoptées pour les développements de l'analyse transcendante; présenter ensuite une conception abstraite, exempte des inconvénients signalés dans l'emploi des méthodes ordinaires et réunissant néanmoins leurs principaux avantages, tel est le but que nous nous proposons en publiant cet essai.

Parmi les conceptions sur lesquelles se fonde en général l'analyse transcendante, il en est trois que nous devons distinguer. C'est à Leibnitz, Newton et Lagrange que la science en est plus particulièrement redevable. D'autres conceptions se sont produites à diverses époques, mais, comparées à celles que nous avons en vue, elles n'en sont que des modifications secondaires et elles n'exigent point de notre part un examen spécial (1).

Conception de Leibnitz. La conception de Leibnitz, *lorsqu'on lui donne toute l'extension qu'elle comporte*, consiste essentiellement dans la considération simultanée de divers ordres de grandeurs numériques, les quantités d'un même ordre quelconque restant toujours comparables entr'elles, mais étant *infiniment petites* ou *infiniment grandes* par rapport à toute quantité d'un ordre différent. A ce point de vue l'*accroissement* d'une grandeur continuement variable ne commence pas par être une quantité finie de l'ordre de celles que l'on considère en géométrie et en algèbre : il est d'abord infiniment petit et, dans cet état, il prend le nom de différentielle. Si la grandeur est exprimée par $y=f(x)$, à chaque accroissement fini Δx répond un accroissement également fini y_Δ. Il en est de même des accroissements infiniment petits et à la diffé-

(1) Pour plus de détails consulter l'ouvrage de Carnot sur la métaphysique du calcul infinitésimal, le cours de philosophie positive de M. Auguste Comte, tome I, page 225 et suivantes, le Cartésianisme par M. Bordas-Dumoulin.

rentielle dx répond la différentielle dy. Infiniment petite par rapport à Δx, la différentielle dx est infiniment grande par rapport à dx^2. Delà les infiniment petits du second ordre, puis ceux du troisième représentés par dx^3 et ainsi de suite à l'infini. Quant à la différenciation, elle ne s'applique pas seulement aux quantités finies : elle s'étend aux infiniment petits eux-mêmes, et la différentielle $d.d....dy = d^n y$ est du même ordre que dx^n.

Le principe fondamental de la méthode des infiniment petits est le suivant :

Deux quantités d'un ordre quelconque sont rigoureusement égales, lorsque leur différence est infiniment petite d'un ordre supérieur.

Il suit de là que les infiniment petits d'un même ordre satisfont à trois conditions : 1° Ils sont comparables entr'eux à la manière des quantités finies ; 2° ils s'évanouissent devant toute quantité d'un ordre inférieur ; 3° ils annulent devant eux toute quantité d'un ordre supérieur. Néanmoins si les infiniment petits de l'ordre n sont pris en nombre infiniment grand, leur somme est de l'ordre $n—1$. La grandeur exprimée par cette somme est, ainsi qu'on le voit, décomposable en infiniment petits de l'ordre n. Delà le nom d'*éléments* que prennent aussi les différentielles.

Ce simple aperçu suffit pour mettre en évidence le vice radical que présente, au point de vue logique, la conception des infiniment petits. Comment concevoir en effet que la différence Δx, supposée continuement décroissante puisse, *avant d'être nulle*, cesser d'être finie ?

L'illusion, dans laquelle sont tombés les partisans des infiniment petits, serait difficilement explicable, si l'on ne tenait compte du prestige que peut exercer sur les esprits une méthode éminemment simple et féconde. Aujourd'hui la plupart des géomètres rejètent ce qu'il y a de contradictoire dans la conception des quantités infinitésimales. Ils s'efforcent cependant de conserver en partie les avantages que présente la méthode fondée sur cette conception.

Carnot appelle quantité infiniment petite, *toute quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite que l'on veut, sans qu'on soit obligé pour cela de faire varier celles dont on cherche la relation* (1).

(1) Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, page 19.

Suivant MM. Poinsot et Cauchy, *un infiniment petit n'est qu'une quantité variable, qui a zéro pour limite, qui peut décroître indéfiniment sans s'arrêter à une valeur appréciable, une quantité qui, prise isolément, peut être conçue plus petite que toute quantité donnée.* (1)

En admettant ces définitions l'on reconnaît immédiatement qu'elles s'appliquent aux différences finies tout aussi bien qu'aux différentielles proprement dites. On objectera peut-être que les différences ne prennent le nom de différentielles qu'en parvenant à un certain degré de petitesse, à partir duquel elles ne font d'ailleurs que décroître encore. Mais comment serait-il possible d'établir ainsi une ligne de démarcation entre les différences ordinaires et les différentielles? les unes et les autres peuvent être prises aussi petites que l'on veut, mais elles n'en demeurent pas moins ce qu'elles sont respectivement, des différences ou des différentielles.

Quel que soit au reste le mérite de ces définitions l'on retrouve dans le système qu'elles servent à fonder les infiniment petits de tous les ordres et l'on démontre aisément que, si des infiniment petits d'ordres différents figurent ensemble dans une même équation, chaque groupe comprenant les infiniment petits d'un même ordre est nul séparément. Delà résulte le théorème que nous avons rappelé ci-dessus comme constituant le principe fondamental de la méthode des infiniment petits. Considérons en elles mêmes quelques règles particulières dérivant de ce principe. En voici d'abord une :

Deux quantités finies qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite sont rigoureusement égales.

Convient-il, dans une science éminemment positive et d'une exactitude absolue, de poser une règle dont les termes impliquent contradiction?

En voici une seconde.

Lorsque l'accroissement de la variable est infiniment petit la différence de la fonction est égale à la différentielle.

Cette règle donne lieu à la même observation que la précédente. On sait en effet que la différence et la différentielle sont toujours égales, ou généralement inégales, indépendamment de toute valeur particulière, grande ou petite.

---

(1) Leçons du calcul différentiel, par M. l'abbé Moigno. Introduction page 25.

Qu'on ne se méprenne point sur la portée de nos objections, nous ne contestons point l'exactitude définitive des résultats auxquels on peut être conduit par l'application des règles précédentes. Ce sont ces règles que nous attaquons, parce que leur énoncé manque de rigueur et qu'il se prête à de fausses interprétations. Veut-on traduire ces énoncés et leur rendre leur signification réelle? tout devient rigoureux, mais on rentre dans les méthodes purement algébriques et l'on perd les avantages que l'on a particulièrement en vue dans l'emploi des infiniment petits.

Nous avons supposé tout à l'heure une équation dans laquelle figuraient ensemble plusieurs groupes d'infiniment petits appartenant à des ordres différents. La présence simultanée de plusieurs de ces groupes dans une même équation, accuse l'imperfection des moyens employés pour la traduction du problème à résoudre. On ne peut contester que chaque groupe distinct soit nul séparément, mais cette propriété subsiste indépendamment du moyen indirect à l'aide duquel on la constate. S'il faut une démonstration pour l'établir, c'est qu'il y a insuffisance dans les notions qu'on possède et dont on fait usage.

Prétendre que les infiniment petits constituent des ordres particuliers de grandeurs, c'est, selon nous, les réduire à des êtres purement chimériques. Envisage-t-on différemment les quantités infinitésimales? elles ne sont plus en réalité que des grandeurs algébriques ordinaires. Pourquoi rompre alors l'unité des sciences mathématiques et laisser subsister ensemble des règles contradictoires? Nous admettons qu'il en résulte certaines facilités de calcul. Nous admettons en outre que l'exactitude des résultats définitifs n'en est point altérée. Néanmoins la rigueur du langage disparaît et c'est là plus qu'un inconvénient, c'est un danger réel. Ne faut-il pas en effet que la forme elle-même puisse être mise à l'abri de toute objection sérieuse, et, s'il n'en est pas ainsi, comment affirmer que le fonds demeure inattaquable?

Quoiqu'il en soit, il ne s'agit pas ici d'une question nouvelle et, si nous prenons pour point de départ les opinions généralement établies, nous pouvons nous borner à les résumer de la manière suivante :

L'existence réelle des infiniment petits est inadmissible.

L'emploi des quantités dites infiniment petites, peut être utile comme moyen d'investigation, mais il ne constitue point une méthode vraiment algébrique, et il n'est susceptible de devenir

rigoureux qu'en perdant l'avantage qu'il offre d'être commode et expéditif.

Conception de Newton. L'analyse transcendante, telle que Newton l'a conçue, peut être présentée sous plusieurs formes différentes. Nous distinguerons en particulier *la méthode des premières et dernières raisons* ou en d'autres termes, *la méthode des limites.*

Lorsque l'on considère le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, et qu'on fait converger vers zéro les deux termes de ce rapport, on remarque que le rapport converge en même temps vers une valeur déterminée. C'est cette valeur qui prend le nom de première et dernière raison ou celui de limite. En général elle est exprimée par une fonction particulière de la variable. On prouve d'ailleurs que cette fonction dérive de la fonction donnée, toutes deux s'impliquant l'une l'autre.

Cela posé, l'on conçoit qu'au lieu d'opérer directement sur certaines quantités variables, l'on puisse employer comme auxiliaires les limites de leurs accroissements. D'un autre côté une même détermination est susceptible de s'appliquer, comme limite, aux accroissements de grandeurs essentiellement différentes. On peut donc aussi choisir parmi ces grandeurs celles qui offrent le plus de facilité pour le but qu'on se propose, et la substitution des unes aux autres devient une des ressources les plus précieuses du calcul des limites. Tel est au point de vue qui nous occupe, l'esprit général de l'analyse transcendante.

L'idée de limites, bien que remarquable par sa netteté et sa justesse, est peut être une idée étrangère, dont les théories analytiques devraient rester indépendantes. Telle était la pensée de Lagrange. Néanmoins la méthode fondée sur cette conception nous paraît purement algébrique, et si nous la disons insuffisante, c'est à raison des difficultés qu'elle entraine dans la plupart des applications. Ces difficultés sont assez connues pour que nous n'ayons pas à insister sur ce point. Disons toutefois qu'on s'est efforcé de les atténuer en renonçant à la notation que la méthode des limites comporte essentiellement et en suppléant cette notation par les caractéristiques de la méthode infinitésimale.

Au premier abord il ne paraît pas facile d'exprimer nettement ce que sont les différentielles dans la méthode des limites. Cependant si l'on observe que l'accroissement de la fonction se compose en général de deux termes, l'un égal au produit de l'accroissement de la variable par la fonction dérivée, l'autre, formé moins simple-

ment, mais possédant la propriété de décroître indéfiniment par rapport au premier, à mesure que les accroissements sont supposés de plus en plus petits, rien n'empêche de considérer isolément la première partie de la différence et de lui donner le nom de différentielle. Dès lors la notation de Leibnitz se trouve introduite dans la méthode des limites, et néanmoins cette méthode demeure rigoureusement exacte.

Les différentielles étant définies, comme nous venons de le faire, il reste à examiner si cette définition porte en elle quelque germe susceptible de développements ultérieurs. Elle est algébrique, elle satisfait l'esprit et le repose; mais réduite à la simple traduction d'un fait qu'elle n'explique point et dont le sens échappe, elle se trouve à l'avance frappée de stérilité. Cependant, telle est la puissance du symbole, qu'il ne peut être adopté sans qu'il n'en résulte certaines simplifications de calcul. Sous ce rapport il y a avantage à transporter la caractéristique différentielle dans la méthode des limites, mais ce n'est là qu'une amélioration restreinte, et la difficulté des applications n'est pas sensiblement diminuée.

L'adoption d'un même symbole établit entre la méthode des limites et la méthode infinitésimale une certaine confusion. Loin de l'éviter l'on cherche en général à la mettre à profit, le but qu'on se propose étant de combiner les avantages spéciaux que présente chacune des deux méthodes. Il est visible qu'une combinaison de ce genre peut offrir quelques facilités, mais elle paraît peu rationnelle et mieux vaudrait, semble-t-il, s'en tenir à une méthode unique au lieu d'en réunir plusieurs dans un système bâtard et vicieux.

Indépendamment de la méthode des limites, il est une autre forme distincte sous laquelle la conception de Newton peut être développée. Cette forme particulière constitue le calcul des fluxions : elle dérive de la notion générale des vitesses, les fluxions étant les vitesses relatives de plusieurs accroissements simultanés, pris à leur origine. Dans ce calcul les fluxions jouent le rôle des différentielles : elles ont en réalité la même signification et le même symbole leur est applicable.

Ici les différentielles sont nettement définies, mais c'est au moyen d'une idée étrangère, l'idée de la vitesse. Cette idée est simple sans doute, mais elle est dépourvue de la généralité abstraite que les diverses applications réclament. En certains cas elle peut être employée directement; en d'autres elle exige qu'on procède par voie d'analogie; le plus souvent elle n'est point une aide et elle devient un véritable obstacle.

En résumé le calcul des fluxions n'est pas supérieur à la méthode des limites. L'avantage qu'il offre de se prêter immédiatement à la notation de Leibnitz est racheté par les difficultés qui naissent du sens restrictif attribué au symbole différentiel. A cet égard l'absence de toute signification précise peut être préférable à une détermination trop particulière. Dans un cas comme dans l'autre les inconvénients sont nombreux. Nous avons signalé ceux que présente la méthode des limites et nous avons dit qu'ils la rendaient insuffisante. La même observation subsiste pour le calcul des fluxions.

Conception de Lagrange. La conception de Lagrange est purement algébrique. Elle repose sur la considération de la formule fondamentale,

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{i^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x)+\text{ etc.}$$

Dans cette formule les dérivées successives sont impliquées l'une par l'autre et toutes ensemble par la fonction primitive $f(x)$. Il suit de là que les dérivées peuvent être employées comme auxiliaires, et la dérivation comme un artifice de calcul, analogue aux développements en série, mais plus général et par conséquent plus fécond.

Cette conception est grande et simple. Toutefois elle a son côté faible et malgré les brillants travaux de Lagrange, elle reste impuissante à fonder une méthode propre aux applications. Cette impuissance subsiste, alors même qu'on introduit le symbole différentiel dans le calcul des fonctions dérivées. Pour s'en rendre compte, on observera qu'il ne suffit point d'établir le fait d'une dépendance mutuelle et réciproque entre la fonction et sa dérivée. Ce qui importe pour la facilité des applications, c'est de saisir le sens de ce fait, et de puiser les ressources dont on a besoin dans l'interprétation dont il est susceptible.

On sait comment les dérivées de Lagrange coïncident avec les limites de Newton et comment elles se lient aux différentielles de Leibnitz. Les points de vue diffèrent pour chacune de ces trois conceptions. Quant aux quantités auxiliaires introduites dans le calcul, elles sont toujours les mêmes et l'on a généralement

$$f^n(x)=Lim.\frac{f^{n-1}(x+\Delta x)-f^{n-1}(x)}{\Delta x}=\frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Il n'est pas besoin, pensons nous, d'insister davantage sur les considérations qui précèdent. Depuis longtemps déjà, l'opinion s'est

formée sur les avantages et les inconvénients respectifs que présente chacune des trois méthodes généralement adoptées pour les développements de l'analyse transcendante. L'une, la plus simple de toutes, repose sur une conception inadmissible. Les autres ne présentent pas ce vice radical, mais elles sont moins propres aux applications et tant de difficultés surgissent dans leur emploi qu'on renonce presque toujours à s'en servir exclusivement. La question se trouvant réduite à ces termes, nous croyons être en droit de conclure que les méthodes dont il s'agit ne réalisent point suffisamment toutes les conditions désirables.

Exposé général d'un point de vue nouveau. Considérons d'abord une courbe plane, supposée continue. Soit

$$y=f(x)$$

l'équation de cette courbe et m l'un de ses points. Si l'on recherche comment, à partir de ce point, la continuité s'établit sur la courbe, l'on voit que c'est *nécessairement* (1) suivant une direction déterminée. Cette direction prend par rapport à la courbe le nom de *direction tangentielle*. En général elle varie continuement d'un point à un autre, et, si rapprochées que soient les deux extrémités d'un arc curviligne, elle ne peut être constamment la même pour tous les points intermédiaires.

Imaginons que, cessant de varier à partir du point m, la direction tangentielle devienne permanente. Dans cette hypothèse la continuité *s'établit et persiste* suivant une seule et même direction. C'est donc une droite qui se substitue à la courbe. Cette droite est nommée tangente.

Soit x,y, les coordonnées du point m, et $x+\Delta x$ l'abcisse d'un autre point choisi comme on voudra. A l'intervalle Δx répondent en général deux accroissements de l'ordonnée y. L'un est relatif à la tangente, l'autre à la courbe. Pour les distinguer nous désignerons le premier par dy, le second par Δy.

---

(1) Il est une condition générale qui régit tout déplacement d'un point dans l'espace. Elle consiste en ce que nul déplacement ne peut se produire, sans qu'il n'y ait en même temps détermination complète de la direction suivant laquelle *il commence*. Que cette direction soit constante ou bien qu'elle varie continuement, elle n'en fixe pas moins le mode d'après lequel la continuité s'établit à l'origine de la ligne décrite.

S'agit-il de la tangente, on a

$$\frac{dy}{\Delta x}=\psi(x).$$

Cette relation demeure invariable indépendamment de toute valeur particulière attribuée à l'intervalle Δx. La propriété qu'elle exprime subsiste à l'*origine même* de l'accroissement dy.

S'agit-il de la courbe, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

et, si petit que soit l'intervalle Δx, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne cesse pas de varier continuement.

On conçoit à priori que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ doit converger vers la limite exprimée par $\psi(x)$, à mesure que Δx converge vers zéro. Néanmoins il y a lieu d'observer que si la suite des valeurs dont il est susceptible se rattache par voie de continuité à la limite $\psi(x)$, cette limite elle même reste en dehors de la suite.

Transportons-nous par la pensée à l'origine des accroissements Δy, Δx. Une loi déterminée régit la génération de ces accroissements, *alors que partant de zéro, ils prennent tous deux naissance.* Cela résulte de ce que l'extrémité de l'ordonnée est assujettie à rester sur la courbe. On voit d'ailleurs que cette loi dépend essentiellement de la direction suivant laquelle la continuité s'établit à partir du point que l'on considère. *Or ce n'est point altérer la loi dont il s'agit que de la supposer permanente :* elle a donc pour expression

$$\frac{dy}{\Delta x}=\psi(x).$$

L'accroissement dy n'est, relativement à la tangente, qu'une différence ordinaire. Par rapport à la courbe il est dit *accroissement différentiel* et il se substitue à l'*accroissement effectif* Δy, lorsque, soustraite à tout changement, la direction tangentielle est supposée constante à partir du point m. Mais se placer dans cette hypothèse, *c'est admettre que la loi de génération des grandeurs* Δy, Δx *persiste dans la détermination particulière qu'elle affecte à leur origine : c'est dégager cette loi des modifications qu'elle subit dans l'intervalle* Δx *et l'assujettir à se développer en demeurant permanente.* Telle est donc aussi la signification générale qu'acquiert en réalité la substitution du symbole différentiel à la caractéristique Δ.

En regardant la fonction comme l'ordonnée d'une courbe dont l'abcisse serait exprimée par la variable indépendante, nous avons eu pour objet de rendre plus facile à saisir notre conception fondamentale. Ce mode particulier de représentation offre à cet égard certains avantages, et il n'ote rien à la généralité des résultats, puisqu'il est susceptible de s'appliquer sans aucune exception, à toute fonction supposée continue. Quoi qu'il en soit, les notions qui précèdent ne sont point suffisamment abstraites. En s'y arrêtant, on s'exposerait à entraver les applications par l'interposition constante d'une idée étrangère. Laissons donc l'image de la courbe et procédons plus directement.

Etant donné la fonction continue $y=f(x)$, l'on en déduit

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Et l'on reconnaît aisément que, pour toute valeur particulière affectée par la variable, Δy est fonction continue de Δx.

La dépendance mutuelle, existant entre les accroissements $\Delta y, \Delta x$, subsiste, sans être interrompue, jusqu'à l'origine même de ces accroissements. C'est donc, l'un par l'autre, qu'ils s'engendrent tous deux à partir de zéro. Considérons cette génération simultanée, *alors qu'elle commence* et observons qu'elle est nécessairement régie par une loi déterminée. La loi dont il s'agit est dite *loi de génération*. En général elle n'est pas constante quel que soit x, et son expression numérique dépend de la valeur que la variable affecte à l'origine des accroissements.

Soit une valeur quelconque attribuée à la variable : *la loi de génération* prend une détermination particulière et l'on peut d'ailleurs concevoir qu'elle persiste dans cette détermination. En ce cas certains accroissements résultent du développement continu de la loi, *supposée permanente*, et pour un même intervalle Δx, ils diffèrent en général des accroissements effectifs exprimés par Δy. De là *la différentielle et la différence*. Toutes deux sont relatives à la fonction :

La différentielle est l'accroissement pris dans l'hypothèse où la loi de génération serait permanente à partir de la valeur attribuée à la variable.

La différence est l'accroissement effectif. Elle ne dépend pas seulement de l'expression particulière que la loi de génération affecte à l'origine des accroissements : elle dépend en outre des modifications continues que cette loi subit dans l'intervalle que l'on considère.

La définition de la différentielle donne immédiatement

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Elle s'étend d'ailleurs à tous les ordres, la différentielle de l'ordre n étant ce que devient la différence du même ordre, lorsqu'on suppose permanente la loi qui en régit la génération initiale.

Tel est le sens de l'équation

$$d^n y=f^n(x)\Delta x^n.$$

Ce sont donc toujours les mêmes quantités auxiliaires qui se trouvent introduites dans le calcul. Quant à la méthode, nous verrons tout à l'heure qu'elle se prête aux applications avec une grande facilité.

Les différentielles ne sont, comme on vient de l'établir, que des différences ordinaires prises dans une certaine hypothèse. L'équation différentielle exprime la génération qui répond à cette hypothèse pour chaque valeur attribuée à la variable. De là résulte tout une série d'applications.

Le système des axes coordonnées étant rectangulaire ou oblique soit d'abord une courbe plane

$$y=f(x).$$

L'équation différentielle

$$dy=f'(x_0)dx$$

est en *différences ordinaires* l'équation d'une ligne qui touche la courbe $y=f(x)$ au point (x_0, y_0). Cela résulte de ce qu'en supposant permanente la loi de génération des grandeurs Δy, Δx, l'on ne peut altérer la direction suivant laquelle la continuité s'établit à l'origine de ces accroissements.

Considérant cette ligne et substituant aux différentielles les différences qu'elles expriment, il vient

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

c'est-à-dire l'équation d'une droite. La ligne dont il s'agit est donc la tangente elle-même.

Soit ensuite une courbe quelconque dans l'espace

$$x=\varphi(z)$$
$$y=\psi(z)$$

les mêmes considérations donnent pour les équations de la tangente

au point (x_0, y_0, z_0)

$$dx = \Phi'(z_0)dz$$
$$dy = \psi'(z_0)dz$$

c'est-à-dire

$$x - x_0 = \Phi'(z_0)\cdot(z - z_0)$$
$$y - y_0 = \psi'(z_0)\cdot(z - z_0)$$

Tout accroissement effectif pris par rapport à la tangente, est accroissement différentiel par rapport à la courbe. Si donc on désigne par s la longueur d'un arc mesuré sur la courbe et par α, β, γ les angles que la tangente fait avec les axes coordonnés *supposés rectangulaires* il vient en vertu des propriétés de la droite.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$
$$\cos\beta = \frac{dy}{ds}$$
$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

Ainsi définie, la tangente fixe relativement à la courbe et pour le point que l'on considère la direction suivant laquelle la continuité s'établit. S'il y a déplacement d'un point sur la courbe, c'est en suivant cette direction que le point arrive à la position qu'il occupe : c'est aussi suivant cette même direction qu'il en sort.

Dans la méthode des limites on définit la tangente la limite des sécantes. Dans la méthode des fonctions dérivées la tangente est une droite, telle qu'entr'elle et la courbe on n'en peut mener aucune autre. Ces définitions ne montrent pas pourquoi c'est suivant la tangente à la courbe qu'il décrit que s'échappe un point matériel, lorsqu'on le soustrait tout à coup aux actions qui le sollicitent. Il n'en est pas de même de notre définition ; elle pénètre plus avant dans l'essence de la courbe et elle ne pêche pas par défaut de rigueur comme celle qui se fonde sur la considération des infiniment petits.

Soit encore une surface

$$u = F(x,y,z) = 0$$

et sur cette surface un point quelconque (x_0, y_0, z_0). Il est un lieu géométrique déterminé par l'ensemble infini des directions suivant lesquelles à partir de ce point il y a continuité par la surface. Quel-

que soit ce lieu, il reste le même, lorsque, supposant permanente la loi de génération des grandeurs $\Delta x, \Delta y\ \Delta z$, l'on substitue à la surface donnée, celle qui a pour équation aux différences ordinaires.

$$\frac{du_0}{\Delta x_0}dx+\frac{du_0}{\Delta y_0}dy+\frac{du_0}{\Delta z_0}dz=0$$

c'est-à-dire

$$(x-x_0)\frac{du_0}{\Delta x_0}+(y-y_0)\frac{du_0}{\Delta y_0}+(z-z_0)\frac{du_0}{\Delta z_0}=0.$$

Or cette équation appartient à un plan. Elle exprime donc le lieu géométrique lui-même. On le nomme plan tangent.

Considérons tant de courbes qu'on voudra tracées sur la surface et passant par le point de contact du plan tangent. A partir de ce point la continuité s'établit sur chaque courbe suivant la direction fournie par la tangente. Lieu géométrique de ces directions, le plan tangent contient toutes les tangentes.

Soit, pour dernier exemple, la détermination du rayon de courbure dans les courbes planes.

Lorsque la continuité s'établit sur une courbe, c'est d'abord suivant une direction déterminée. Si cette direction persistait, la ligne engendrée serait droite. En général la direction ne persiste pas et elle varie avec continuité. De là nait la courbure : elle résulte des modifications continues subies par la direction tangentielle.

Soit ω l'angle qu'une tangente quelconque à la courbe $y=f(x)$ fait avec l'une des abscisses. On a généralement

$$\omega=\text{arc. tang.}\, f'(x).$$

Quant à l'équation différentielle

$$d\omega=\frac{f''(x_0)}{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}ds$$

elle s'applique à la génération simultanée des accroissements angulaire et arcuel. Prise à son origine, la génération de ces accroissements est régie par une loi déterminée. L'équation différentielle répond au développement de cette loi, *supposée permanente*, et elle exprime, *en différences ordinaires*, l'équation de la ligne qui résulte de ce développement.

Considérant cette ligne et substituant les différences aux diffé-

rentielles, il vient

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta s}=\frac{f''(x_0)}{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\text{Cons}^{\text{te}}.$$

En ce cas deux arcs quelconques, égaux en longueur, sont toujours superposables. La courbure est donc uniforme et la ligne engendrée une circonférence de cercle ayant pour rayon

$$\rho=\frac{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}.$$

Le cercle ainsi déterminé a en tous ses points même courbure que la courbe donnée au point que l'on considère. On le nomme *cercle osculateur* et son rayon *rayon de courbure*. En général la courbure de la courbe varie d'un point à un autre. Dans tous les cas elle est mesurée par le rapport $\frac{1}{\rho}$ et le changement de direction, pris à son origine, s'effectue sur la courbe de la même manière qu'en un point quelconque du cercle osculateur. Ajoutons, comme corollaire :

Lorsque plusieurs courbes ont en un point commun même tangente et qu'en outre les dérivées du second ordre affectent même valeur particulière, ces courbes ont en ce point même courbure.

Cette conséquence peut s'établir directement. En effet pour une même valeur quelconque de la dérivée $f'(x_0)$ la courbure est complètement déterminée par la loi de génération

$$df'(x)=f''(x_0)\cdot dx.$$

S'il s'agissait d'une courbe à doube courbure : on observerait, 1° que la 2$^{\text{me}}$ courbure nait des modifications continues que subit incessamment le plan de 1$^{\text{re}}$ courbure ; 2° que, supposer permanentes à partir d'un point quelconque les lois qui déterminent en ce point les deux courbures, c'est substituer une hélice à la courbe que l'on considère. Cette hélice est dite hélice osculatrice : elle est pour les courbes à double courbure, ce que le cercle osculateur est pour les courbes planes.

On voit, d'après ces exemples, quels avantages particuliers résultent du sens nouveau attribué au symbole différentiel. Que l'on compare les solutions précédentes à celles que fournissent en général les méthodes ordinaires, et l'on devra convenir que, sans avoir rien perdu sous le double rapport de la facilité des déductions et de la rigueur algébrique, nous sommes parvenus à acquérir des notions plus précises et plus approfondies. Toutefois nous avons à peine

indiqué l'extension que comporte notre conception fondamentale. Un principe en dérive sur lequel l'application de l'analyse transcendante aux questions de géométrie et de mécanique se fonde généralement. Cherchons à mettre ce principe en évidence.

En posant l'équation

$$dy = f'(x)dx.$$

l'on exprime ce que devient, à partir d'un état quelconque de la variable, l'accroissement de la fonction, lorsque la grandeur, représentée en nombre par $f'(x)$, se trouve soustraite aux changements qu'elle subit dans l'intervalle dx et assujettie à conserver dans cet intervalle la valeur numérique qu'elle affecte à l'origine. De là résulte le principe suivant :

Étant donné une génération quelconque, à laquelle concourt une grandeur représentée numériquement par c, *si, pour chaque valeur* constante *affectée par cette grandeur*, l'on a

$$\Delta y = c\Delta x. \qquad (1)$$

l'on peut en conclure immédiatement, *pour toute génération qui ne diffère de la précédente qu'en ce que la grandeur* c devient continuement variable

$$dy = cdx. \qquad (2)$$

En effet l'équation (2), où l'on a par hypothèse $c = \phi(x)$, s'applique *avec le sens de l'équation* (1) à la suite continue des valeurs exprimées par $\phi(x)$. Elle n'est donc, par rapport à cette suite, que *la traduction littérale et l'expression complète*, de la propriété qui subsiste en vertu de l'équation (1) où c est constant, mais supposé quelconque.

En d'autres termes, il est manifeste, au point de vue algébrique, que les équations (1) et (2) sont impliquées l'une par l'autre, l'équation (2) n'étant autre chose que *l'énoncé direct et explicite* de la condition relative aux diverses valeurs que peut prendre la constante c, condition implicitement renfermée dans l'équation (1).

Le principe que nous venons d'établir est une conséquence immédiate de nos premières définitions, conséquence aussi simple qu'elle est rigoureuse. Il nous paraît d'ailleurs que ce principe a une grande portée et une haute importance.

Concevons que l'on se propose d'exprimer une loi par la traduction algébrique des effets qui répondent à son développement continu.

En général, certaines grandeurs, connues à priori, concourent à la génération des effets qu'il s'agit de calculer, et c'est parce que ces grandeurs varient, c'est parce que leurs expressions numériques changent incessamment, que le problème à résoudre est rendu difficile. Ce point admis, la question se trouverait singulièrement simplifiée s'il suffisait de la traiter directement pour le cas où (le mode de génération restant le même) les grandeurs dont il s'agit cesseraient de varier numériquement et conserveraient une valeur *quelconque* toujours constante. Le problème est-il convenablement résolu dans cette hypothèse, et veut-on restituer aux quantités, supposées quelconques mais constantes, leur caractère de variabilité continue, il suffit de substituer aux différences ordinaires les différentielles qui leur correspondent. Cela fait, et *par cela seul*, l'on obtient la solution cherchée pour le cas général. On voit ainsi d'où vient la puissance de l'analyse différentielle. Elle résulte essentiellement de ce que, dans certaine classe de problèmes, les équations aux différences ordinaires établies pour les cas les plus simples, ne sont pas plus tôt transformées en équations différentielles, qu'elles deviennent immédiatement applicables aux cas plus compliqués que l'on a principalement en vue et que l'on ne saurait aborder directement par tout autre méthode. Cette extension si remarquable des moyens bornés dont dispose l'analyse ordinaire, se distingue peut être moins encore par sa puissance, que par sa simplicité. Quelques exemples permettront d'apprécier l'une et l'autre. (1)

Soit une courbe engendrée par un point qui se meut dans l'espace. Une grandeur variable concourt à cette génération, et, pour chaque position du point générateur, elle dépend de la direction suivant laquelle s'effectue le déplacement initial. Supposons d'abord cette direction quelconque, mais constante; la ligne engendrée sera droite et si l'on désigne par α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes coordonnés, il viendra quels que soient ces angles

$$\Delta x = \cos\alpha . \Delta s.$$
$$\Delta y = \cos\beta . \Delta s.$$
$$\Delta z = \cos\gamma . \Delta s.$$

(1) Nous pourrions reproduire ici chacun des exemples traités dans la 1re série d'applications. Les déductions et les calculs seraient tout aussi simples. La marche seule paraîtrait peut être un peu moins naturelle.

Suppose-t-on maintenant les angles continuement variables d'une position à une autre, il suffit de changer la caractéristique : il vient donc en ce cas

$$dx = \cos\alpha . ds$$
$$dy = \cos\beta . ds$$
$$dz = \cos\gamma . ds.$$

La courbe se trouve déterminée par les équations différentielles

$$dx = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} dz$$
$$dy = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} dz$$

on a d'ailleurs

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Soit un volume V engendré par le mouvement d'une aire plane qui se transporte parallèlement à elle-même, en changeant de grandeur. Imaginons qne l'aire ω soit constante et prenons l'axe des z normal à son plan. Nous aurons donc cette hypothèse

$$\Delta V = \omega \Delta z.$$

De là résulte pour le cas où l'aire ω varie continuement

$$dV = \omega dz.$$

Soit encore un mobile animé d'une vitesse u continuement variable avec le temps t. Supposons d'abord cette vitesse quelconque, mais constante. Si nous désignons par e l'espace parcouru, nous aurons en ce cas

$$\Delta e = u \Delta t.$$

Or cette équation subsiste quelle que soit la vitesse pourvu qu'elle demeure constante. La vitesse ne peut donc être continuement variable sans qu'il n'en résulte immédiatement

$$de = u dt.$$

On trouverait de même

$$m du = \mathrm{F} dt.$$

m étant la masse du mobile et F l'action tangentielle sollicitante.

Soit enfin P le poids d'un corps de densité variable : m étant un point choisi comme on voudra dans l'intérieur du corps et $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

les côtés d'un parallélépipède rectangle aboutissant à ce point, nous désignerons en général par $\Delta\omega$ le poids de chacun des solides que nous aurons à considérer successivement.

Si nous supposons d'abord que la valeur, affectée au point m par la densité ρ, demeure invariable à partir de ce point, nous aurons pour le parallélépipède

$$\Delta\omega = \rho \Delta x \, \Delta y \, \Delta z.$$

De là résulte pour le cas où la densité supposée constante dans chaque section parallèle au plan des xy est néanmoins continuement variable le long de l'ordonnée quelconque z.

$$d\omega = \rho \Delta x \, \Delta y \, dz.$$

et par conséquent

$$\Delta\omega = \Delta x \, \Delta y \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz.$$

Suppose-t-on maintenant que l'intégrale $\int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz$ varie avec y dans l'intervalle Δy, l'on a immédiatement

$$d\omega = \Delta x \, dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz.$$

En ce cas $\Delta\omega$ devient le poids d'un cylindre ayant pour hauteur Δx, pour base la section faite par le point m perpendiculairement à l'axe des x, pour densité celle qui répond à chaque point du corps dans la section dont il s'agit, cette densité étant d'ailleurs supposée constante dans le sens des x et constamment variable dans celui des z et des y. On a ainsi

$$\Delta\omega = \Delta x \int_{\Phi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz.$$

La double intégrale est elle à son tour supposée continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, il vient

$$d\omega = dx \int_{\Phi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz \; ;$$

et l'on trouve pour le poids cherché

$$P=\int_a^A dx\int_{\Phi(x)}^{\psi(x)} dy\int_{f(x,y)}^{F(x,y} dz.$$

S'il s'agissait du moment de ce poids par rapport au plan des xy, il suffirait de remplacer ρ par ρz dans l'expression précédente.

Nous ne multiplierons pas d'avantage les applications. Celles qui précèdent suffisent et la lumière qui jaillit de ce simple aperçu nous paraît devoir frapper tout esprit attentif.

En résumé, lorsqu'on veut dans les méthodes ordinaires, exprimer une génération quelconque à l'aide de l'équation différentielle

$$dy=\omega dx \qquad (1)$$

l'on part de la propriété qui subsiste en vertu de l'équation fondamentale

$$\Delta y=\omega\Delta x \qquad (2)$$

dans laquelle ω est par hypothèse une quantité constante. Puis supposant cette grandeur variable, on a recours à des moyens plus ou moins simples, plus ou moins rigoureux, pour démontrer l'existence de l'équation différentielle. A notre point de vue toute démonstration particulière est surabondante. Il n'y a point d'intermédiaire entre l'équation aux différences (2) et l'équation différentielle (1) qui la généralise. Toutes deux subsistent nécessairement ensemble, et passer de l'une à l'autre, c'est changer la forme de l'expression, mais non pas le sens exprimé. Ce parallèle établit en faveur de notre méthode un avantage marqué. Il ne paraît pas d'ailleurs qu'on puisse arriver au but par une voie plus facile et plus directe. En effet *tout se réduit à saisir dans l'équation différentielle sa véritable signification.*

Dans la méthode des limites, les deux termes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'annulant, ce sont les accroissements eux-mêmes qui s'anéantissent et non pas seulement un facteur compris dans leur expression analytique. Il semble donc que le symbole de l'indétermination ne doit pas disparaître. Cependant, parmi les valeurs en nombre infini que comporte en général toute grandeur indéterminée, il en est une ici qui se distingue et s'isole, parce qu'elle exprime la limite vers laquelle le rapport converge, alors que ses deux termes tendent à la fois vers zéro. C'est cette valeur que l'on considère. Elle n'appar-

tient pas à la suite des valeurs que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut prendre *effectivement*, mais elle s'y rattache par voie de continuité, et cela suffit pour fonder la méthode. Partant, si l'on veut, de la même donnée, nous ajoutons :

Pris à leur origine, les accroissements Δy, Δx s'engendrent l'un par l'autre suivant une loi déterminée. Cette loi peut être constante ou bien continuement variable. Est-elle constante, il en est de même du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Varie-t-elle au contraire, le rapport se complique des effets produits par cette variation continue.

En général, si l'on resserre indéfiniment l'intervalle Δx et que l'on considère les termes du rapport qui proviennent des modifications que la loi de génération subit dans cet intervalle, il est clair que leur expression numérique doit diminuer de plus en plus et tendre vers zéro. Quant au rapport lui-même, il converge vers une certaine limite. Cette limite exprime la valeur que le rapport tend à prendre à l'origine des accroissements, c'est-à-dire la valeur qu'il prendrait effectivement, et qu'il conserverait pour un intervalle quelconque, si la loi de génération se trouvait soustraite à tout changement et qu'elle se développat en restant permanente.

L'on voit ainsi pourquoi subsiste le fait fondamental de la méthode des limites, quelle est sa signification, et comment les limites elles-mêmes déterminent pour chaque valeur particulière affectée par la variable le rapport constant des accroissements différentiels.

Dans la méthode des infiniment petits, l'on pose

$$dy = f'(x).dx.$$

et l'on regarde les différentielles comme n'étant autre chose que les différences effectives parvenues à un certain degré de ténuité. Mais tant qu'il s'agit de ces différences, on a exactement

$$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x = [f'(x)+f'(x+\theta\Delta x)-f'(x)]\Delta x = [f'(x)+\Delta_1 f'(x)]\Delta x.$$

Ce n'est donc qu'en faisant abstraction du terme $\Delta_1 f'(x)$ que l'on passe en réalité des différences aux différentielles.

En vain supposera-t-on l'intervalle Δx aussi petit qu'on voudra, la différence $\Delta_1 f'(x)$ ne peut être constamment nulle dans cet intervalle à moins qu'elle ne le soit en même temps pour un intervalle

quelconque. *C'est donc indépendamment de la considération des infiniment petits que la suppression dont il s'agit s'effectue.* Elle a lieu, parce que cessant d'envisager les accroissements effectifs, et prenant à leur place les accroissements différentiels, ce qu'on voit dans la dérivée $f'(x)$, ce n'est plus une fonction de x, mais une quantité *constante*, déterminée par la valeur particulière attribuée à la variable. Dès lors, la différence $\Delta_1 f'(x)$ s'annule rigoureusement, quelque soit l'intervalle Δx, et la différentielle dy répond au développement de la loi de génération supposée permanente.

Lorsqu'on supprime $\Delta_1 f'(x)$ dans le binome $f'(x)+\Delta_1 f'(x)$, l'on retranche de l'accroissement effectif Δy tout ce qui provient des changements subis par la dérivée $f'(x)$. Opérer ainsi, c'est évidemment dégager l'accroissement différentiel dy. Mais comment reconnaître avec certitude dans le développement de l'accroissement Δy la différence $\Delta_1 f'(x)$ qui doit en être soustraite ? Telle est, en cas de doute, la question à résoudre, et c'est alors qu'intervient, comme auxiliaire, la considération des quantités prétendues infiniment petites. Si l'on compare entr'eux les termes du développement, l'on remarque qu'ils se partagent en deux groupes essentiellement distincts. Les uns répondent à la dérivée $f'(x)$, les autres à la différence $\Delta_1 f'(x)$, et ceux-ci sont tels qu'ils décroissent indéfiniment *par rapport* aux premiers à mesure que Δx converge vers zéro. La propriété que nous venons de signaler est tout-à-fait caractéristique. Elle offre un moyen sûr de distinguer chaque groupe, et par conséquent de dégager l'accroissement différentiel *par la suppression* des termes reconnus parties constitutives de la différence $\Delta_1 f'(x)$. Il est permis sans doute de recourir à un artifice de calcul pour saisir dans l'équation aux différences ordinaires, l'expression de la loi de génération. Toutefois, il faut se garder d'attribuer un sens inexact aux opérations que l'on exécute, et de confondre, comme on le fait dans la méthode des infiniment petits, le moyen qu'on employe avec le résultat qu'on cherche à obtenir.

D'après cette explication générale, l'on voit que les procédés suivis dans la méthode des limites et dans celle des infiniment petits ont pour objet réel et définitif la détermination de la loi qui régit les accroissements différentiels, ces accroissements et cette loi acquerrant le sens que leur donne notre définition. Nous pourrions donc laisser à chacun le soin de choisir entre ces procédés et d'ajouter aux ressources qu'ils offrent, celles que notre point de vue présente, soit pour la facilité des calculs, soit pour la rigueur

des déductions. Mais toute idée nouvelle, introduite dans un système déjà connu, exige une certaine élaboration, et ce n'est pas sans effort que l'esprit parvient à s'en emparer de manière à la rendre aisément applicable. Cette considération ne nous a point échappé. Elle appelait de notre part une intervention plus directe. Puissions nous réaliser l'œuvre que nous avons entreprise et reconstruire avec l'élément que nous apportons, la base des mathématiques transcendantes.

ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

RÉSUMÉS AU POINT DE VUE DE LA LOI DE GÉNÉRATION.

Exposé synthétique des principes fondamentaux.

1) Étant donné la fonction *continue* $y=f(x)$, l'on en déduit

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

et l'on reconnaît aisément que, pour toute valeur particulière attribuée à x, Δy est fonction continue de Δx.

La dépendance mutuelle existant entre les accroissements $\Delta y, \Delta x$ subsiste, sans être interrompue, jusqu'à l'origine même de ces accroissements. C'est donc, *l'un par l'autre*, qu'ils s'engendrent *à partir de zéro*. Considérons cette génération simultanée, *alors qu'elle commence* et observons qu'elle est nécessairement régie par une loi déterminée.

La loi, *dont il s'agit*, est dite *loi de génération*. En général elle n'est pas constante, quel que soit x, et son expression numérique varie continuement (1). L'accroissement Δy peut donc être regardé comme dépendant à la fois,

1° *De la loi de génération* supposée permanente *à partir de la valeur particulière attribuée à la variable.*

2° *Des modifications continues* que cette loi subit dans l'intervalle Δx.

Concevons que la loi de génération se développe, en conservant la détermination qu'elle affecte à l'origine des accroissements que l'on considère. Pris dans cette hypothèse, l'accroissement de la grandeur y ne dépend plus des modifications que la loi de génération subit en réalité et, pour un même intervalle quelconque Δx, il diffère en général de l'accroissement effectif, exprimé par Δy. L'on nomme *différentielles* les accroissements qui répondent au développement continu de la loi de génération, *supposée perma-*

(1) Pour plus de développements voir l'exposé général page 228 et suivantes.

nente à partir de la valeur particulière attribuée à la variable, et pour les distinguer des *différences ordinaires* on leur applique une notation spéciale consistant dans la substitution de la caractéristique d à la caractéristique Δ.

2) Ces conventions admises, cherchons quelle est généralement la forme de la loi de génération.

Cette loi est constante, ou bien elle est continuement variable. Supposons d'abord qu'elle soit constante, indépendamment de toute valeur attribuée à x. En ce cas l'on a évidemment comme conséquence des premières définitions

$$\Delta y = dy$$

et puisque, par hypothèse, dy est indépendant de x, il en est de même de Δy.

La différence Δy ne dépendant que de Δx, considérons une suite quelconque d'intervalles respectivement égaux à Δx. A chacun de ces intervalles répond une même différence Δy. Si donc les intervalles sont au nombre de n, et tels que l'on ait toujours $n\Delta x = a$, la différence totale $f(x+a) - f(x) = b$, a pour expression $n\Delta y$, et il vient, quel que soit n, c'est-à-dire quel que soit Δx

$$\frac{n\Delta y}{n\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{a} = \text{Cons}^{te} = c$$

Il suit de là que *la loi de génération ne peut être constante dans la fonction* y, *sans que l'on ait en même temps*,

$$dy = \Delta y = c\Delta x.$$

Or $\Delta y = y - y'$, $\Delta x = x - x'$ il vient donc en substituant

$$y - y' = c(x - x')$$

ou désignant par c' la constante $y' - cx'$

$$y = cx + c'$$

Réciproquement si la fonction est linéaire, c'est-à-dire de la forme $y = cx + c'$, la loi de génération est constante et a pour expression

$$dy = \Delta y = c\Delta x$$

Il est clair en effet que la relation $\Delta y = c\Delta x$ subsiste à l'origine même de tout accroissement.

3) Supposons maintenant la loi de génération continuement variable et observons que, pour chaque valeur attribuée à x, elle prend

une détermination particulière. Soit $x=x'$: la loi de génération, supposée permanente à partir de $x=x'$, a pour expression

$$dy=\phi(x',\Delta x)$$

Considérée en elle même, la différentielle dy n'est qu'une différence ordinaire, prise dans l'hypothèse d'une loi de génération constante. Le résultat obtenu tout à l'heure s'applique à cette différence. On a donc

$$dy=\phi(x',\Delta x)=c\Delta x.$$

Remarquons ici que c ne peut être une constante absolue, puisque par hypothèse la loi de génération varie dans la fonction y. Toutefois il reste démontré que la quantité c est indépendante de Δx. Sa valeur dépend donc essentiellement de la valeur x' attribuée à la variable, et comme ces deux valeurs sont nécessairement déterminées ensemble, il en résulte que c est une fonction de x. Cette fonction prend par rapport à la fonction primitive le nom de fonction dérivée. En la désignant ainsi et en la représentant par le signe de la fonction affecté d'un indice, on la distingue et en même temps l'on rappelle son origine.

Comme conséquence de ces déductions, il vient

$$c=f'(x)$$

et il est établi que la loi de génération se présente en général sous la forme

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

4) Pour compléter ces notions fondamentales il nous reste à montrer comment la fonction dérivée peut être déduite de la fonction primitive. Soit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Si l'on remplace Δx par $\Delta x+i$, et que l'on retranche la première valeur de la seconde, on a pour différence

$$\frac{f(x+\Delta x+i)-f(x)}{\Delta x+i}-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x+i)-f(x+\Delta x)}{\Delta x+i}$$
$$-\frac{i}{\Delta x+i}\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Or, quel que soit Δx, l'on peut toujours prendre la quantité i assez petite pour que cette différence soit moindre que toute gran-

deur donnée ; la continuité du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ subsiste donc jusqu'à l'origine même des accroissements.

De là et de ce qui précède dérivent les principes suivants :

1°. Lorsque la loi de génération se développe en demeurant constante, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est constant, indépendamment de toute valeur attribuée à Δx. Varie-t-elle au contraire, le rapport devient continuement variable.

2°. Si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ varie dans l'intervalle Δx, c'est par suite des modifications que la loi de génération subit dans cet intervalle. Il y a continuité dans les changements successifs qui résultent de ces modifications.

3°. S'agit-il d'abord de la loi de génération, considérée indépendamment des variations qu'elle éprouve et supposée permanente à partir de l'origine des accroissements; la partie du rapport qui répond à cette hypothèse demeure invariable, quel que soit Δx. S'agit-il ensuite des modifications que cette loi subit dans l'intervalle Δx, la partie du rapport qui dépend de ces modifications varie continuement avec Δx, et elle peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, en prenant Δx suffisamment petit.

Cela posé, concevons que Δx converge vers zéro. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge en même temps vers une certaine valeur déterminée, et il en approche indéfiniment, sans toutefois pouvoir jamais l'atteindre. Cette valeur est celle que le rapport prendrait *effectivement* et qui subsisterait *constante* pour un intervalle quelconque, si la loi de génération se trouvait soustraite aux modifications qu'elle subit, et qu'elle se développât en restant permanente à partir de l'origine des accroissements. Mais, *dans cette hypothèse*, la différentielle se substitue à la différence et la valeur dont il s'agit a pour expression

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x).$$

On voit donc que, sauf le cas des fonctions linéaires, l'on a toujours et nécessairement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \eta$$

η dépendant de Δx et décroissant indéfiniment à mesure que Δx converge vers zéro.

En résumé la fonction y, *supposée continue*, est ou non linéaire.

Dans le premier cas, il vient

$$\eta=0. \qquad f'(x)=\text{Cons}^{te}=c. \qquad dy=\Delta y=c\Delta x.$$

Dans le second, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se compose essentiellement de deux parties distinctes, l'une indépendante de Δx et c'est la dérivée $f'(x)$, l'autre dépendante de cet accroissement et celle-ci converge vers zéro en même temps que Δx. La décomposition du rapport en ces deux parties étant supposée faite, l'on en déduit immédiatement l'expression générale de la loi de génération,

$$dy=f'(x)\Delta x$$

Le procédé de décomposition analytique que nous venons d'indiquer n'est pas le seul auquel on puisse recourir pour la recherche de la fonction dérivée. Quelquefois la loi de génération peut être immédiatement saisie, et alors il suffit de la considérer dans son développement continu, pour obtenir, directement et sans calcul intermédiaire, l'équation différentielle qui lui sert d'expression.

5) On démontre aisément que la fonction dérivée $f'(x)$ détermine implicitement l'accroissement effectif Δy. On peut d'ailleurs le reconnaître à priori. En effet, de quoi dépend la différence Δy, sinon de l'expression particulière que la loi de génération prend à l'origine des accroissements que l'on considère et en outre des modifications successives qu'elle subit dans l'intervalle Δx. Or c'est précisément l'équation différentielle qui fixe chacune des déterminations que la loi de génération affecte successivement dans un intervalle quelconque. On voit donc que les deux relations $dy=f'(x)\Delta x$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, peuvent et doivent se suppléer mutuellement.

Règles générales de la différenciation.

6) Soit en premier lieu

$$y=f(x)$$

et en même temps

$$x=\text{F}(v)$$

Les lois qui régissent la génération de Δy par Δx et de Δx par Δv

sont respectivement

$$dy = f'(x)\Delta x$$
$$dx = \mathrm{F}'(v)\Delta v.$$

S'agit-il maintenant de la loi à laquelle obéissent les grandeurs Δy et Δv lorsqu'elles s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro, l'on a

$$\Delta y = (f'(x) + \eta)\Delta x$$
$$\Delta x = (\mathrm{F}'(v) + \eta')\Delta v$$

et par suite

$$\Delta y = [f'(x) + \eta][\mathrm{F}'(v) + \eta']\Delta v$$

Or les quantités η et η' sont toutes deux indéfiniment décroissantes à mesure que Δx converge vers zéro, il vient donc

$$dy = f'(x) \cdot \mathrm{F}'(v) \cdot \Delta v = f'(x) \cdot dx.$$

Dans cet exemple y est en même temps fonction de x et fonction de fonction de v. A la différence Δy répondent deux lois de génération. L'une de ces lois est relative à l'accroissement Δx, l'autre à l'accroissement Δv. Pour passer de la première à la seconde il suffit, comme on vient de le voir, de remplacer Δx par dx. Delà résulte une règle générale qu'il convenait d'éclaircir mais qu'il était d'ailleurs facile d'établir à priori. En effet, lorsque l'on considère isolément chacune des équations différentielles

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (1)$$
$$dx = \mathrm{F}'(v)\Delta v \qquad (2)$$

l'on voit que Δx et dx sont tout-à-fait arbitraires, on peut donc adopter pour Δx dans la première de ces équations la valeur que dx prend dans la seconde, et écrire en conséquence

$$dy = f'(x)dx. \qquad (3)$$

Sous cette forme l'équation (3) conserve le sens de l'équation (1) et en outre elle est susceptible de se combiner directement avec l'équation (2), de manière à acquérir un sens nouveau.

On aurait de même en supposant v fonction d'une quatrième variable

$$dx = \mathrm{F}'(v)dv \qquad (4)$$

et ainsi de suite les équations (3), (4), etc. subsistant toutes ensemble.

7) Lorsqu'il existe entre n variables $(n-1)$ relations, chaque

variable peut être considérée comme fonction de l'une quelconque des autres. Dans chacun des couples qu'on peut ainsi former, la variable, prise pour fonction, a une différentielle particulière. Si ces différentielles sont toutes prises par rapport à une seule et même variable, celle-ci est dite variable indépendante et chaque différentielle se trouve déterminée.

Le choix de la variable indépendante est tout-à-fait arbitraire. Néanmoins et pour plus de généralité, il convient habituellement d'introduire, par la pensée, une variable que l'on n'exprime point et de la prendre pour variable indépendante, en la supposant liée, par telle relation qu'on voudra, à l'une quelconque des variables sur lesquelles on opère explicitement. Dans ce système, les calculs offrent plus de symétrie, et ils se prêtent en outre à toute détermination ultérieure de la variable indépendante. Veut-on, par exemple, que v, l'une des variables considérées comme fonctions de la variable u non exprimée devienne variable indépendante. Pouvant disposer de la fonction arbitraire $v=\phi(u)$, on imaginera qu'elle est de la forme

$$v=u$$

ou plus généralement

$$v=cu+c'$$

et comme il en résulte

$$\Delta v=dv$$

il suffira de substituer à la différentielle dv, la différence Δv qui lui est égale.

Dorénavant nous supposerons toujours que la variable indépendante reste inexprimée et nous écrirons en conséquence,

$$dy=f'(x)dx.$$

Quant aux fonctions dérivées nous les représenterons indifféremment, soit par le signe de la fonction primitive affecté d'indices convenables, soit par le *symbole* d'une expression fractionnaire ayant pour numérateur la différentielle de la fraction et pour dénominateur la différence de la variable que l'on a en vue dans la détermination de la dérivée.

8) Soit en second lieu

$$y=\mathrm{F}(v,u)$$

v et u étant par hypothèse deux fonctions de x, il en résulte

implicitement

$$y=f(x)$$

et ce que nous nous proposons de déterminer c'est la dérivée $f'(x)=\frac{dy}{\Delta x}$.

On a d'abord

$$\Delta y=F(v+\Delta v,u+\Delta u)-F(v+\Delta v,u)+F(v+\Delta v,u)-F(v,u).$$

c'est-à-dire

$$\Delta y=\Delta u[F'_u(v+\Delta v,u)+\eta]+\Delta v[F'_v(v,u)+\eta']$$

d'un autre côté

$$F'_u(v+\Delta v,u)=F'_u(v,u)+k.\Delta v$$

donc déjà

$$\Delta y=\Big[\frac{\Delta y}{\Delta u}+\eta+k\Delta v\Big]\Delta u+\Big[\frac{dy}{\Delta v}+\eta'\Big]\Delta v$$

mais d'autre part

$$\Delta u=\Big(\frac{du}{\Delta x}+\eta''\Big)\Delta x$$

$$\Delta v=\Big(\frac{dv}{\Delta x}+\eta'''\Big)\Delta x$$

il vient donc en substituant

$$\Delta y=\Delta x\Big[\frac{dy}{\Delta u}\cdot\frac{du}{\Delta x}+\frac{dy}{\Delta v}\cdot\frac{dv}{\Delta x}+\xi\Big]$$

ξ représentant un ensemble de termes qui dépendent de Δx et convergent vers zéro en même temps que cet accroissement. Delà résulte

$$dy=\frac{dy}{\Delta u}\cdot\frac{du}{\Delta x}\cdot\Delta x+\frac{dy}{\Delta v}\cdot\frac{dv}{\Delta x}\cdot\Delta x$$

ou enfin et plus simplement

$$dy=\frac{dy}{\Delta u}\cdot du+\frac{dy}{\Delta v}\cdot dv.$$

La différentielle dy prend ici le nom de *différentielle totale*. On donne d'ailleurs celui de *différentielle partielle* à chacune des expressions $\frac{dy}{\Delta u}\,du$, $\frac{dy}{\Delta v}\cdot dv$. Si l'on différencie la fonction $F(v,u)$,

en supposant v constant l'on a pour résultat,

$$\frac{dy}{\Delta u}\cdot du$$

si c'est au contraire u qui cesse d'être regardé comme variable, il vient

$$\frac{dy}{\Delta v}dv.$$

La différentielle totale *s'obtient donc en faisant la somme* des différentielles partielles *correspondantes à chacune de ces deux hypothèses.*

Si l'on avait

$$y=\Phi(t,u,v)$$

on trouverait de même

$$dy=\frac{dy}{\Delta t}dt+\frac{dy}{\Delta u}du+\frac{dy}{\Delta v}dv.$$

et ainsi de suite, quel que soit le nombre des variables.

9) La règle générale que nous venons d'établir conduit pour les cas les plus simples à des règles particulières dont nous nous bornerons à présenter le résultat. Ainsi désignant par a (1) une constante et par y, v, u des variables

$y=a\pm v$	donne	$dy=\pm dv$
$y=av$	—	$dy=adv$
$y=u\pm v$	—	$dy=du\pm dv$
$y=uv$	—	$dy=udv+vdu.$

Différenciation des fonctions élémentaires et des fonctions composées.

10) La différenciation des fonctions composées, quelles qu'elles soient, peut toujours se ramener à la différenciation des fonctions élémentaires. Il convient donc de s'occuper d'abord de celles-ci.

Les fonctions élémentaires sont les suivantes :

1° La fonction algébrique x^m, m étant une constante quelconque.

2° La fonction Log x et l'exponentielle a^x qui lui correspond,

(1) Pour $y=a$, $\Delta y=\text{Const}^{te}=0$, donc $dy=\Delta y=0$.

a étant un nombre quelconque positif et représentant la base du système que l'on considère.

3° Les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$.

11) Soit la fonction algébrique

$$y=x^m$$

il vient

$$y=(x+\Delta x)^m-x^m=x^m\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m-1\right]$$

Or Δy est nécessairement de la forme $\Delta x[f'(x)+\eta]$. Telle est donc aussi la forme du facteur $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m-1$; mais, dans ce facteur, Δx est *inséparable* du dénominateur x et *réciproquement*. On a donc

$$\left[1+\frac{\Delta x}{x}\right]^m-1=\frac{\Delta x}{x}\,(M+\eta).$$

M étant une constante particulière, fonction de m, et η une quantité indéfiniment décroissante avec Δx.

Substituant l'on trouve

$$\Delta y=[M+\eta]x^{m-1}\Delta x=(\phi(m)+\eta)x^{m-1}\Delta x.$$

et l'on en déduit

$$dy=\phi(m).x^{m-1}dx \qquad (1)$$

La forme de la fonction ϕ restant à déterminer nous poserons

$$a+b=m \qquad (2)$$

puis, appliquant la formule (1) et le procédé du N° 9 à la différenciation du produit $x^a\cdot x^b=x^m$,

$$dy=[\phi(a)+\phi(b)]x^{m-1}dx \qquad (3)$$

Les différentielles (1) et (3) sont nécessairement identiques. Il vient donc

$$\phi(a)+\phi(b)=\phi(m) \qquad (4)$$

et cette équation de condition subsiste quels que soient a et b.

Considérons m comme constant, et différencions les équations (2) et (4), nous aurons

$$da+db=0$$
$$\phi'(a)da+\phi'(b)db=0$$

et par suite

$$\varphi'(a)=\varphi'(b)$$

ou posant $b=0$

$$\varphi'(m)=\varphi'(0)=\text{cons}^{\text{te}}.$$

Delà résulte, conformément au principe établi N° (2)

$$\varphi(m)=cm+c'$$

Or si l'on pose $m=1$ dans l'équation différentielle (1), et $b=0$ dans l'équation de condition (4), l'on en déduit immédiatement

$$\varphi(1)=1$$
$$\varphi(0)=0.$$

On a donc $c=1$, $c'=0$ et il vient simplement

$$\varphi(m)=m.$$

En résumé, m étant quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel, l'on a constamment

$$dx^m=mx^{m-1}.dx.$$

12) Soit la fonction $y=\text{Log.}\,x$ et la fonction $y=a^x$, a étant la base du système dans lequel Log. x est écrit.

Considérant d'abord la première de ces fonctions, l'on a

$$\Delta y=\text{Log.}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

et l'on en conclut comme au numéro précédent

$$\Delta y=\frac{\Delta x}{x}(c+\varepsilon)$$

c étant une fonction de a. Delà résulte,

$$dy=c.\frac{dx}{x}.$$

La constante c dépendant de la base du système dans lequel on suppose écrit Log. x, imaginons cette base choisie de manière à ce que l'on ait $c=1$. En ce cas la base est représentée par le nombre e, et les logarithmes sont dits logarithmes Népériens. Adoptant pour ces logarithmes la caractéristique log. il vient

$$dy=d.\log.x=\frac{dx}{x}$$

et comme on a généralement

$$\text{Log.}\, x = \frac{\log. x}{\log. a} = \log. x . \text{Log.}\, e$$

l'on en déduit

$$d\,\text{Log.}\, x = \frac{dx}{x} \cdot \text{Log.}\, e.$$

Soit maintenant la fonction

$$y = a^x$$

il vient

$$x = \text{Log.}\, y$$

et d'après ce qui précède

$$dx = \frac{dy}{y} \text{Log.}\, e$$

d'où remplaçant y par a^x et Log.e par $\frac{1}{\log. a}$,

$$da^x = a^x . \log. a . dx.$$

Nous verrons plus loin comment on détermine la valeur de la quantité e, base du système des logarithmes Népériens.

13) Soit en dernier lieu les fonctions circulaires $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Soit AB un arc quelconque représenté par x et BC son sinus; (fig. (1)). Prise à son origine, la génération simultanée des différences Δx, $\Delta \sin x$, $\Delta \cos x$. dépend de la loi qui régit le déplacement initial du point B sur la circonférence. Supposer cette loi permanente, c'est évidemment substituer à l'arc BM la tangente BE, et aux accroissements effectifs Δx, $\Delta \sin x$, $\Delta \cos x$, les accroissements différentiels, dx, $d \sin x$, $d \cos x$. Or, si d'un point quelconque E pris sur la tangente, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon OA, et que par le point B l'on mène BF parallèle à ce rayon, l'on a dans le triangle rectangle BEF

$$\text{EF} = \text{BE} \cos x.$$

Mais $\text{BE} = dx$, $\text{EF} = d \sin x$, il vient donc en substituant,

$$d \sin x = \cos x . dx.$$

On trouverait de même

$$\text{BF} = \text{BE} . \sin x$$

et à raison de $BF=-d\cos x$.

$$d\cos x=-\sin x\cdot dx.$$

S'agit-il de la fonction circulaire *inverse*

$$y=\text{arc sin } x$$

De là résulte

$$x=\sin y$$

et par conséquent

$$dx=\cos y\cdot dy$$

il vient donc en substituant

$$dy=d\,\text{arc sin } x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

on a de même

$$d\,\text{arc cos } x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

on remarquera que pour $x=0$

$$d\sin x=dx$$
$$d\cos x=0$$
$$d\,\text{arc sin } x=dx$$
$$d\,\text{arc cos } x=-dx.$$

14) Si nous passons maintenant des fonctions élémentaires aux fonctions composées, il nous sera facile de différencier celles-ci à l'aide des résultats précédents, combinés avec les règles que nous avons établies aux n^{os} 6 et 8.

Quelques exemples suffiront pour indiquer la marche à suivre en général.

Soit d'abord

$$y=(\text{log. sin } x^m)^\rho$$

l'on a

$$dy=\rho(\text{log. sin } x^m)^{\rho-1}d.\text{log. sin } x^m=\rho(\text{log. sin } x^m)^{\rho-1}\frac{d.\sin x^m}{\sin x^m}$$
$$=\rho(\text{log. sin } x^m)^{\rho-1}\frac{\cos x^m}{\sin x^m}dx^m.=m\rho(\text{log. sin } x^m)^{\rho-1}\cot. x^m.x^{m-1}.dx.$$

Soit encore

$$y=x^z\text{log. sin } x$$

z étant une fonction de x. Il vient

$$dy = \log.\sin x[zx^{z-1}dx + x^z \log.\, x.dz] + x^z \cot.\, x.dx.$$

Différentielles des ordres supérieurs.

15) Reprenons l'équation différentielle

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

Dans laquelle x est par hypothèse variable indépendante. Rappelons nous d'ailleurs que l'accroissement Δx est entièrement arbitraire et susceptible d'une détermination quelconque, positive ou négative.

Lorsque dans l'équation (1) l'on attribue à x une valeur particulière, cette équation fournit l'expression correspondante de la loi de génération, et c'est ainsi que l'on peut obtenir successivement toutes les déterminations que cette loi comporte. Dans chacune de ces déterminations, les accroissements dy, Δx restent toujours variables, tandis que la dérivée $f'(x)$ n'y figure jamais que comme quantité constante.

Admeton au contraire que la variable engagée sous le signe de la fonction reste indéterminée, il est visible qu'une pareille hypothèse ne peut avoir pour objet que la comparaison des expressions diverses, successivement affectées par la loi de génération. En ce cas l'on est naturellement conduit à prendre, pour terme commun de comparaison, l'effet qui résulte du développement continu de cette loi, lorsqu'on la suppose permanente dans un certain intervalle. Or, cet effet, exprimé par dy, dépend à la fois de $f'(x)$ et de Δx. On voit donc que, pour donner à la comparaison dont il s'agit un sens précis et une signification réelle, il faut nécessairement attribuer à l'intervalle Δx une valeur quelconque, toujours constante.

Cela posé, Δx étant quelconque mais constant, l'accroissement dy ne dépend plus que de x, et il constitue une nouvelle fonction qui peut être différenciée, comme l'a été la première. On a alors en désignant par $\Delta_1 x$ la valeur attribuée à Δx

$$dy = f'(x)\Delta_1 x$$

et l'on en déduit par la différenciation

$$d.dy = f''(x)\Delta_1 x.\Delta x.$$

Observons que la loi ainsi exprimée est celle qui régit la génération de la différence $\Delta.dy$. Elle est susceptible, comme on le voit, d'autant de déterminations particulières que la dérivée seconde $f''(x)$ comporte de valeurs distinctes. On peut donc appliquer à cette génération les considérations développées ci-dessus, et si l'on se propose d'étudier la loi nouvelle dans ses diverses expressions, il faudra, comme tout-à-l'heure, attribuer à la différence Δx une seule et même valeur quelconque, toujours constante. Dès lors on est conduit à différencier de nouveau et l'on trouve

$$d.d.dy=f'''(x)\Delta_1 x.\Delta_2 x.\Delta x.$$

Les mêmes raisonnements, toujours répétés, permettraient de poursuivre indéfiniment ces différenciations successives.

Les accroissements $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, $\Delta_3 x$, etc., restant arbitraires, bien qu'ils soient supposés constants, il nous est permis pour plus de simplicité de les prendre tous égaux à Δx. En ce cas, si nous rappelons par un indice le nombre de différenciations effectuées, nous aurons en général pour expression de la loi qui régit la génération de la différence $\Delta.d^{n-1}y$

$$d.d^{n-1}y=d^n y=f^n(x)\Delta x^n$$

ou ce qui revient au même

$$df^{n-1}(x)=d.\frac{d^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}}=f^n(x)\Delta x.$$

16) Les notions qui précèdent peuvent suffire en ce qui concerne la définition des différentielles des ordres supérieurs. Cependant elles ne donnent point une idée précise de ce que sont ces différentielles par rapport aux différences du même ordre qui leur correspondent, et, ne fut-ce que par ce motif, il ne sera pas sans utilité d'établir directement, pour une différentielle d'un ordre quelconque, l'interprétation dont elle est immédiatement susceptible.

A cet effet nous remarquerons d'abord que si l'on désigne par α une fonction particulière de x et Δx, supposée telle que, quelque soit x, cette fonction décroisse indéfiniment, à mesure que Δx converge vers zéro, il en résulte nécessairement

$$\Delta\alpha=\Delta x.\left[\frac{d\alpha}{\Delta x}+\eta\right]$$

le binome $\frac{d\alpha}{\Delta x}+\eta$ constituant en général une fonction de même

nature que la fonction α, c'est-à-dire, indéfiniment décroissante à mesure que Δx converge vers zéro.

Pour démontrer cette proposition, considérons Δx comme constant et remplaçons x par $x+\Delta_1 x$; α deviendra α_1 et nous aurons

$$\alpha_1-\alpha=\Delta_1 x\left[\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}+\eta\right]$$

$\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}$ étant indépendant de $\Delta_1 x$, et η indéfiniment décroissant à mesure que $\Delta_1 x$ est supposé de plus en plus petit. Or, quelque soit x, α décroit indéfiniment avec Δx. Donc quelque soit $\Delta_1 x$, le binome $\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}+\eta$ est indéfiniment décroissant avec Δx. Mais $\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}$ ne dépend pas de $\Delta_1 x$, tandis que η, s'il n'est pas toujours nul, en dépend nécessairement. Le binome ne peut donc être indéfiniment décroissant avec Δx, qu'autant que chacun de ses deux termes jouit respectivement de cette propriété.

Cela posé, si l'on observe que η décroit sans cesse avec $\Delta_1 x$, tandis que $\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}$ en est indépendant, il est manifeste que l'hypothèse $\Delta_1 x=\Delta x$ n'altère en rien la propriété que possèdent η et $\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}$ de décroître indéfiniment à mesure que Δx converge vers zéro. De là résulte

$$\Delta\alpha=\Delta x\left[\frac{d\alpha}{\Delta x}+\eta\right]$$

le binome $\frac{d\alpha}{\Delta x}+\eta$ étant en général une fonction de même nature que la fonction α.

Soit maintenant

$$\Delta y=\Delta x[f'(x)+\alpha_1]$$

L'accroissement Δx étant quelconque, mais constant, l'on aura pour la différence du second ordre

$$\Delta^2 y=\Delta x^2\left[f''(x)+\xi+\frac{d\alpha_1}{\Delta x}+\eta_1\right]$$

ou plus simplement

$$\Delta^2 y=\Delta x^2[f''(x)+\alpha_2]$$

α_2 étant une fonction du genre de celles que nous avons désignées par α, α.

On trouverait de même pour la différence du 3me ordre

$$\Delta^3 y = \Delta x^3 [f'''(x) + \alpha_3]$$

et en général pour une différence quelconque de l'ordre n

$$\Delta^n y = \Delta x^n [f^n(x) + \alpha_n].$$

Le rapport $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ étant pris à son origine, on voit qu'il est indépendant de Δx, et qu'en général il varie continuement avec x. C'est donc, *l'un par l'autre et suivant une loi déterminée*, que les grandeurs $\Delta^n y$ et Δx^n s'engendrent à partir de zéro. La loi, dont il s'agit, est nommée *loi de génération de l'ordre* n. Lorsqu'on la suppose permanente, à partir de la valeur attribuée à la variable, certains accroissements répondent à son développement et en général, *pour une même valeur quelconque de l'intervalle* Δx, ils diffèrent des accroissements effectifs exprimés par $\Delta^n y$. L'on conserve le nom de différentielles aux accroissements pris dans cette hypothèse, et pour les distinguer des différences du même ordre, qui leur correspondent, on substitue la caractéristique d à la caractéristique Δ. L'on a ainsi

$$d^n y = f^n(x) \Delta x^n$$

Cette loi ne peut d'ailleurs être permanente dans la fonction donnée sans que l'on ait en même temps.

$$d^n y = \Delta^n y, \qquad f^n(x) = \text{Cons}^{te}., \qquad \alpha_n = 0.$$

17) Les différentielles d'un ordre quelconque étant ainsi définies, l'on remarque que si l'on attribue à Δx une valeur quelconque, toujours constante, il vient immédiatement

$$d \cdot dy = f''(x) \Delta x^2$$
$$d \cdot d \cdot dy = f'''(x) \Delta x^3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

on a donc

$$d^2 y = d \cdot dy$$
$$d^3 y = d \cdot d \cdot dy$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et ainsi de suite à l'infini, le symbole $d^n y$ acquerrant une nouvelle signification et exprimant, si l'on veut, le résultat de n différenciations successives.

18) Les considérations qui nous ont guidé dans la détermination du sens à attacher au symbole $d^n y$ montrent suffisamment que les différentielles des ordres supérieurs ne peuvent correspondre en général qu'à l'accroissement, supposé constant, de la variable indépendante. Lorsqu'on opère en même temps sur plusieurs fonctions d'une même variable, il est permis de prendre pour accroissement de cette variable une valeur quelconque, toujours constante; mais dès lors, à moins que les fonctions dont il s'agit ne soient linéaires, leurs accroissements différentiels dépendent à la fois de la variable et de son accroissement. Si donc cet accroissement est supposé constant, chaque différentielle devient fonction de la variable indépendante, et nulle ne peut être considérée comme constante, lorsque les autres varient continuement. Il suit de là que les différentielles des ordres supérieurs se rapportent nécessairement à la variable indépendante. Toutefois, s'il s'agissait d'une fonction qui fût liée à cette variable par une équation linéaire, la différentielle de cette fonction devenant constante en même temps que l'accroissement de la variable, il est clair qu'on pourrait substituer l'une à l'autre dans les différenciations successives.

Pour éclaircir ce point et fixer les idées, prenons l'équation différentielle

$$dy = f'(x)dx$$

et supposons d'abord que la variable indépendante ne soit pas exprimée. Si l'accroissement attribué à la variable indépendante est constant, quelqu'il soit d'ailleurs, les différentielles deviennent des fonctions de cette variable. On a donc en différenciant une seconde fois et opérant sur $f'(x).dx$ comme sur le produit de deux facteurs

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

on aurait de même (dy, d^2y, dx, d^2x, étant toujours fonction de la variable indépendante).

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx.d^2x. + f'(x)d^3x.$$

et ainsi de suite. Il est d'ailleurs évident que si l'on représente par

$$y = \mathrm{F}(z)$$
$$x = \Phi(z)$$

les relations qui font dépendre x et y de la variable indépendante

z, non exprimée jusqu'ici, l'on a conformément à ce qui précède

$$\begin{array}{ll} dy=\mathrm{F}'(z)\Delta z & dx=\Phi'(z)\Delta z \\ d^2y=\mathrm{F}''(z)\Delta z^2 & d^2x=\Phi''(z)\Delta z^2 \\ d^3y=\mathrm{F}'''(z)\Delta z^3 & d^3x=\Phi'''(z)\Delta z^3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Suppose-t-on maintenant que l'équation $x=\Phi(z)$ soit linéaire, c'est-à-dire de la forme

$$x=cz+c'$$

il vient

$$dx=c\Delta z=\Delta x$$

et généralement, pour tous les ordres supérieurs au premier

$$d^nx=0.$$

En ce cas, à la différence constante $c\Delta z$ correspond la différentielle également constante $dx=\Delta x=c\Delta z=$. Il est donc indifférent de substituer l'une à l'autre et suivant que l'on considère la génération de la différence $\Delta^n y$ comme s'effectuant, à partir de zéro, soit par Δz^n, soit par Δx^n, l'on peut poser

$$d^ny=\mathrm{F}^n(z)\Delta z^n=c^nf^n(x)\Delta z^n$$

ou

$$d^ny=f^n(x)\Delta x^n=\mathrm{F}^n(z)\frac{\Delta x^n}{c^n}.$$

19) x étant variable indépendante et y fonction de x ($y=f(x)$) l'on a généralement

$$d^ny=f^n(x)\Delta x^n$$

et l'on en déduit

$$f^n(x)=\frac{d^ny}{\Delta x^n}.$$

la dérivée ayant pour valeur le rapport de la différentielle d^ny à la différence Δx^n. Il n'en serait pas de même si la variable x était dépendante. Néanmoins l'on peut encore conserver le symbole $\frac{d^ny}{\Delta x^n}$ pour expression de la dérivée $f^n(x)$. Seulement, il faut observer alors que, malgré son apparence fractionnaire, ce symbole cons-

titue un tout indivisible, le numérateur indiquant la fonction et l'ordre de la dérivée que l'on considère, le dénominateur la variable par rapport à laquelle la dérivation s'effectue.

La convention que nous venons d'établir est généralement adoptée, mais avec une modification consistant en ce que l'on substitue le signe d au signe Δ, et que l'on écrit en conséquence

$$f^n(x)=\frac{d^n y}{dx^n}$$

Pour nous ; les expressions de la forme $\frac{d^n y}{\Delta x^n}$ formeront toujours un tout indivisible. Quant à celles de la forme $\frac{d^n y}{dx^n}$, pour éviter la confusion qui résulte de leur emploi, nous n'y verrons jamais qu'un quotient et c'est ainsi que nous poserons

$$f'(x)=\frac{dy}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

$\frac{dy}{\Delta x}$ étant un symbole et $\frac{dy}{dx}$ le rapport de deux différentielles.

Lorsque x est variable indépendante, l'on a $dx=\Delta x$ et il vient conformément à ce qui précède

$$f^n(x)=\frac{d^n y}{dx^n} \qquad (1)$$

La variable x est elle au contraire dépendante, l'équation (1) ne subsiste en général que pour le cas particulier où l'on pose $n=1$. Veut-on alors effectuer ce qu'on appelle le changement de la variable indépendante, c'est-à-dire déterminer quelles substitutions doivent être faites dans des formules où figurent les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, etc., on remarquera que l'on a toujours x étant ou non variable dépendante

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

or, de là résulte

$$f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}=\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}.$$

on trouverait de même

$$f'''(x)=\frac{d.f''(x)}{dx}$$

et ainsi de suite.

Extension des règles précédentes aux fonctions implicites et aux fonctions de plusieurs variables indépendantes.

20) Soit z une fonction quelconque de deux variables x et y. L'on a pour expressions symboliques des dérivées successives,

1° Dans l'hypothèse de y constant $\quad \frac{dz}{\Delta x}, \frac{d^2z}{\Delta x^2}$, etc.

2° Dans l'hypothèse de Δ constant $\quad \frac{dz}{\Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta y^2}$, etc.

Opère-t-on maintenant sur chacune de ces dérivées comme sur la fonction primitive, on est naturellement conduit à adopter pour expressions symboliques des opérations effectuées $\frac{d^2z}{\Delta x \Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta y \Delta x}$, etc. le nombre des dérivations étant toujours marqués par l'indice supérieur et leur ordre successif, ainsi que les variables auxquelles elles se rapportent, par les signes inférieurs.

Ces conventions admises, il convient d'abord de rechercher si, toutes choses égales d'ailleurs, l'ordre, dans lequel les dérivations se font successivement, influe ou non sur le résultat définitif.

Posons à cet effet

$$z=\mathrm{F}(x,y)$$

et traitant y comme une constante, prenons la différence par rapport à x; nous aurons en ce cas

$$\mathrm{F}(x+\Delta x,y)-\mathrm{F}(x,y)=\Delta x\left[\frac{dz}{\Delta x}.+\alpha\right]$$

α étant en général ou nul, ou indéfiniment décroissant avec Δx, quels que soient d'ailleurs x et y.

Remplaçons, dans α, y par $y+\Delta y$, il viendra

$$\Delta\alpha=\Delta y\left[\frac{d\alpha}{\Delta y}+\eta\right]$$

Or quelque soit Δy, $\Delta\alpha$ est, par hypothèse, indéfiniment décrois-

sant avec Δx, il en est donc de même du binome $\frac{d\alpha}{\Delta y} + \gamma$. Il suit de là que si l'on prend la différence de la fonction $[F(x+\Delta x,y) - F(x,y)]$, par rapport à y et en considérant x comme constant, il vient

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y) - F(x,y+\Delta y) - F(x+\Delta x,y) + F(x,y) = \Delta y.\Delta x.\frac{d^2z}{\Delta x \Delta y}$$

$$+\varepsilon + \frac{d\alpha}{\Delta y} + \gamma \Big] = \Delta y.\Delta x\Big[\frac{d^2z}{\Delta x \Delta y} + \theta\Big]$$

l'ensemble des termes représentés par θ, étant ou nul ou indéfiniment décroissant à mesure que les accroissements Δx, Δy, convergent *tous deux* vers zéro.

Observons ici que le premier membre de la dernière équation resterait évidemment le même, si, intervertissant l'ordre des opérations, l'on supposait la première différence prise par rapport à y, et la deuxième par rapport à x. Mais en ce cas, le second membre deviendrait

$$\Delta y.\Delta x\Big[\frac{d^2z}{\Delta y.\Delta x} + \theta'\Big]$$

le terme θ' étant, comme le terme θ, ou nul, ou indéfiniment décroissant lorsque Δx et Δy sont supposés de plus en plus petits. L'on a donc

$$\frac{d^2z}{\Delta y \Delta x} - \frac{d^2z}{\Delta x \Delta y} = \theta - \theta'$$

et puisque les dérivées $\frac{d^2z}{\Delta y \Delta x}$, $\frac{d^2z}{\Delta x \Delta y}$ sont indépendantes des accroissements $\Delta y \Delta x$, tandis que la différence $\theta - \theta'$ est ou nulle, ou susceptible de décroitre indéfiniment à mesure que ces accroissements convergent vers zéro, il en résulte nécessairement $\theta = \theta'$ et

$$\frac{d^2z}{\Delta y \Delta x} = \frac{d^2z}{\Delta x \Delta y}$$

La condition exprimée par cette équation s'étend d'elle-même à des cas de plus en plus compliqués. En effet l'on a d'abord

$$\frac{d^3z}{\Delta x^2 \Delta y} = \frac{d^3z}{\Delta r \Delta y \Delta x} = \frac{d^3z}{\Delta y \Delta x^2}$$

on aurait de même pour le cas de trois variables

$$\frac{d^3z}{\Delta x.\Delta y.\Delta u}=\frac{d^3z}{\Delta x\Delta u\Delta y}=\frac{d^3z}{\Delta u\Delta x\Delta y}=\frac{d^3z}{\Delta u\Delta y\Delta x}=\frac{d^3z}{\Delta y\Delta u\Delta x}=\frac{d^3z}{\Delta y\Delta x\Delta u}$$

et ainsi de suite de proche en proche.

Donc, en principe général : *Quelque soit l'ordre dans lequel on effectue plusieurs dérivations successives*, si l'ordre seul change et que toutes choses soient égales d'ailleurs, *le résultat définitif reste toujours le même.*

21) Etant donné l'équation

$$z=f(x,y,v,u, \text{ etc.})$$

dans laquelle les variables sont en nombre quelconque, il pourra se présenter deux cas, suivant que cette équation subsistera seule ou avec un certain nombre d'autres. Dans tous les cas, lors même qu'il y aurait autant d'équations que de variables moins une, nous introduirons par la pensée une nouvelle variable, *qui sera pour nous la variable indépendante*, et afin que toutes les autres en deviennent fonction, nous concevrons au besoin une ou plusieurs relations arbitraires que nous n'exprimerons pas, aussi longtemps que nous le jugerons convenable, et dont pourtant il nous sera toujours permis de disposer. Ce simple artifice nous sera d'un grand secours.

Soit d'abord

$$z=\mathrm{F}(x,y)$$

Si nous différencions une première fois (y et x étant supposés fonctions de la variable indépendante non exprimée), nous aurons

$$dz=\frac{dz}{\Delta x}.dx+\frac{dz}{\Delta y}.dy$$

puis, différenciant de nouveau et observant que les dérivées partielles $\frac{dz}{\Delta x}, \frac{dz}{\Delta y}$ dépendent en général des fonctions x, et y, tandis que les différentielles dx, dy sont simplement fonction de la variable indépendante

$$d^2z=\frac{d^2z}{\Delta x^2}dx^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}dx.dy.+\frac{d^2z}{\Delta y^2}dy^2+\frac{dz}{\Delta x}d^2x+\frac{dz}{\Delta y}d^2y.$$

En continuant de la même manière, on obtiendrait successivement les différentielles de tous les ordres. Il nous suffira d'avoir

indiqué la marche des opérations, les calculs à faire n'offrant aucune difficulté. (1)

22) Suppposons maintenant qu'il s'agisse d'une fonction implicite

$$F(x,y)=0$$

ou si l'on veut

$$F(x,y)=\text{Cons}^{te}.$$

Pour passer du cas général, traité ci-dessus, au cas particulier dont il s'agit, nous poserons

$$z=\text{Cons}^{te}.$$

De la résulte $d^n z=0$ et les équations du n° 21 deviennent respectivement,

$$\frac{dz}{\Delta x}dx+\frac{dy}{\Delta y}dy=0 \qquad (1)$$

$$\frac{dz}{\Delta x}d^2x+\frac{dz}{\Delta y}d^2y+\frac{d^2z}{\Delta x^2}dx^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}dxdy+\frac{d^2z}{\Delta y^2}dy^2=0 \qquad (2)$$

Quant à la variable indépendante, elle reste sous-entendue et liée par telle relation qu'on voudra à l'une ou l'autre des variables x et y. Cette circonstance permet d'appliquer les résultats obtenus à tous les cas possibles. Veut-on, par exemple, considérer en particulier la génération de Δy par Δx, de $\Delta^2 y$ par Δx^2, etc., il suffit de prendre x pour variable indépendante, ou plus généralement de concevoir entre x et la variable indépendante non exprimée une relation quelconque, représentée par une équation linéaire. Dès lors on a $dx=\text{cons}^{te}.$, $d^2x=0$ et les équations (1) et (2) donnent successivement, la première le rapport $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{\Delta x}$, la deuxième le rapport $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{\Delta x^2}$. On trouverait de même en poursuivant les calculs du N°. 21 le rapport $\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n y}{\Delta x^n}$.

---

(1) Il est à observer que, dans toute équation différentielle, les dérivées peuvent être considérées comme constantes, tandis que les différentielles, dont elles sont les coefficients, restent continuement variables et convergent toutes ensemble soit vers zéro, *soit vers l'infini*. D'un autre côté, toute différentielle de l'ordre n est proportionnelle à la puissance n de l'accroissement arbitraire attribué à la variable indépendante. Si donc les différentielles sont prises pour variables (leurs coefficients devenant des nombres) il est visible que les équations, qui les contiennent, ont nécessairement homogènes.

La marche que nous venons de suivre est tout à fait générale. Elle s'applique de la même manière à un nombre quelconque d'équations simultanées. On voit d'ailleurs que, si l'on a choisi d'avance une des variables pour variable indépendante (ce qu'on exprime en considérant toutes les autres comme fonctions de celle-ci, et annulant en ce qui la concerne toutes les différentielles des ordres supérieurs), il est plus simple de faire les calculs en se plaçant immédiatement dans cette hypothèse.

23) Soit enfin une fonction de plusieurs variables indépendantes,

$$z=f(x,y).$$

Les équations du N° 21 sont immédiatement applicables, x et y étant deux fonctions arbitraires de la variable indépendante non exprimée.

En général on dispose jusqu'à un certain point de ces fonctions arbitraires, et l'on admet qu'elles se réduisent chacune à une équation linéaire. En ce cas l'on a pour le premier ordre $dx=\text{cons}^{te}$, $dy=\text{cons}^{te}$, et pour tous les autres ordres indistinctement $d^n x=0$, $d^n y=0$. Il vient donc conformément aux résultats précédemment obtenus

$$dz=\frac{dz}{\Delta x}dx+\frac{dz}{\Delta y}dy \qquad (1)$$

$$d^2z=\frac{d^2z}{\Delta x^2}dx^2+2\,\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}\,dx.dy+\frac{d^2z}{\Delta y_2}dy^2 \qquad (2)$$

on trouverait en poursuivant les calculs

$$d^3z=\frac{d^3z}{\Delta x^3}dx^3+3\frac{d^3z}{\Delta x^2\Delta y}dx^2dy+3\frac{d^3z}{\Delta x\Delta y^2}dxdy^2+\frac{d^3z}{\Delta y^3}dy^3 \quad (3)$$

et ainsi de suite, l'équation (1) étant la seule qui reste toujours la même, quelle que soit la nature des fonctions arbitraires x et y.

On observera que l'hypothèse, dans laquelle nous venons de nous placer est *restrictive*. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait d'une surface ayant pour équation

$$z=\mathrm{F}(x,y)$$

par cela seul qu'on suppose x et y fonctions linéaires de la variable indépendante non exprimée, y *devient fonction linéaire de* x. Alors donc les équations (2) et (3) ne peuvent subsister que pour des sections planes, normales au plan des xy.

Les mêmes considérations s'appliquent à un système quelconque

d'équations comprenant autant de variables indépendantes qu'on voudra.

Nota. Il importe de ne pas perdre de vue l'observation précédente. On remarquera d'ailleurs, qu'introduire par la pensée une variable que l'on n'exprime point et dont on fait dépendre toutes les autres, au moyen de certaines relations arbitraires, ce n'est point en général un simple artifice auquel on soit ou non libre de recourir. Ce procédé est impérieusement prescrit, toutes les fois que le nombre des variables l'emporte de plus d'une unité sur celui des équations. Il est le seul qui puisse, en ce cas, donner un sens précis aux différenciations successives.

En résumé, quelque soit le nombre des variables sur lesquelles on opère explicitement, tout se réduit à considérer chacune d'elles comme fonction de la variable indépendante non exprimée. Dès lors, il n'est pas besoin d'autres règles que celles qui sont établies pour les cas les plus simples. Ces règles s'étendent d'elles-mêmes aux cas les plus compliqués et nulle difficulté sérieuse ne peut surgir dans leur application. Quant aux fonctions arbitraires que l'on introduit auxiliairement et qui restent sous-entendues, l'on en dispose au besoin, et s'il y a d'abord indétermination, cette indétermination même offre plus tard de précieuses ressources.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

Théorèmes fondamentaux concernant la fonction, son accroissement et ses dérivées successives.

24) Lemme. *La fonction est croissante ou décroissante*, (1) *suivant que la dérivée est positive ou négative.*

Lorsque nous avons établi la relation générale

$$\Delta y=(f'(x)+\eta)\Delta x$$

nous avons vu que, pour toute valeur finie de la dérivée $f'(x)$, la quantité η est indéfiniment décroissante à mesure que Δx converge vers zéro. Il suit de là qu'il suffit de diminuer convenablement l'intervalle Δx pour qu'en général $f'(x)$ devienne supérieur à η et donne son signe à la différence Δy. Or, si la fonction est croissante à partir de la valeur y, il existe nécessairement un certain intervalle, (si petit d'ailleurs qu'on voudra), dans l'étendue duquel la différence Δy est toujours positive. Il faut donc aussi que dans cet intervalle l'on ait constamment $f'(x)>0$. On démontrerait de même que la fonction ne peut être décroissante sans que l'on ait en même temps $f'(x)<0$, et cela pour toute l'étendue de l'intervalle où il y a décroissance.

Concluons que *le signe de la dérivée indique en général la marche de la fonction, la fonction étant croissante lorsque la dérivée reste positive, et décroissante lorsque la dérivée devient négative.*

25) Corollaire. Tant que l'on a $f'(x)>$ ou <0, la marche de la fonction est uniforme, c'est-à-dire qu'arrivée en croissant ou en décroissant à l'état dans lequel on la considère, la fonction sort de cet état en continuant de croître ou de décroître. Lorsque $f'(x)=0$, il y a doute et la fonction tend à rester stationnaire. Cette tendance est acusée par l'expression particulière qu'affecte la loi de génération $dy=f'(x)dx=0$, mais elle ne peut persister, la loi dont il s'agit n'étant pas permanente. On sait d'ailleurs que la fonction reste

(1) La fonction est dite croissante, lorsqu'elle croît et décroît avec la variable. Elle est dite décroissante dans le cas contraire.

variable avec x : elle croit donc ou décroît constamment dans un certain intervalle, mesuré à partir de $\Delta x=0$, et suivant qu'elle est croissante ou décroissante dans cet intervalle, sa dérivée, nulle à l'origine, commence par être positive ou négative.

Partant de zéro, par hypothèse, la dérivée ne peut commencer par être positive ou négative, qu'autant qu'elle est croissante ou décroissante. D'un autre côté elle est croissante ou décroissante suivant le signe affecté par la dérivée seconde $f''(x)$. C'est donc à celle-ci qu'il faut recourir pour reconnaître la marche de la fonction.

Soit $f''(x)>0$. En ce cas la dérivée $f'(x)$ a une marche uniforme, et parvenue à zéro en croissant avec x, c'est en continuant de croître qu'elle s'en écarte. Elle est donc négative, puis nulle, puis positive en même temps que Δx. Il suit de là que la différence Δy commence par être positive *en deçà* comme *au-delà* de $\Delta x=0$. Ce n'est donc qu'en croissant que la valeur actuelle y peut d'abord changer. *Par ce motif on la nomme valeur minima.*

On verrait de même que pour $f''(x)<0$, la dérivée $f'(x)$ étant de signe contraire à Δx, la différence Δy commence par être négative *en deçà* comme *au-delà* de $\Delta x=0$. Ce n'est donc qu'en décroissant que la valeur y peut d'abord changer. *Par suite on la nomme valeur maxima.*

Soit enfin $f''(x)=0$. En ce cas raisonnons sur $f'(x)$ comme nous l'avons fait sur y et appliquons les résultats précédents.

A-t-on $f'''(x)>0$, $f'(x)=0$ est une valeur minima. Δy change de signe avec Δx et la fonction est croissante.

A-t-on $f'''(x)<0$, $f'(x)=0$ est une valeur maxima et la fonction est décroissante.

Soit en dernier lieu $f'''(x)=0$. Ce que nous venons d'établir pour $f(x)$, subsiste maintenant pour $f'(x)$ et cette dérivée est croissante ou décroissante suivant que $f^{IV}(x)$ est plus grand ou plus petit que zéro. Nous voici dès lors ramené à considérer le signe de $f'(x)$ comme dépendant de $f^{IV}(x)$, de la même manière qu'il dépendait primitivement de $f''(x)$. Les mêmes circonstances se reproduisent donc périodiquement, et il est visible que la marche de la fonction est toujonrs indiquée par le signe et le rang de la première des dérivées successives qui ne s'évanouit point.

Cette dérivée est-elle de rang impair, suivant qu'elle est positive ou négative, la fonction est croissante ou décroissante.

Est-elle de rang pair, la valeur actuelle y *est une valeur minima ou une valeur maxima suivant que la dérivée dont il s'agit est positive ou négative.*

Nous montrerons plus loin comment le calcul conduit avec une grande facilité aux conséquences que nous venons d'établir. En attendant il nous a paru bon de procéder directement et par simples déductions logiques. La voie du raisonnement, lorsqu'elle n'est point entravée d'obstacles difficiles à surmonter, offre à l'esprit un champ plus étendu. En la suivant, l'on voit mieux et l'on approfondit davantage.

26) Théorème. *L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée.*

Reprenons l'équation générale

$$\Delta y=(f'(x)+\ )\Delta x$$

et concevons l'intervalle Δx dérivée en m parties égales. A chacune des divisions ainsi obtenues correspond un accroissement de la fonction, et cet accroissement est déterminé par les valeurs particulières que les quantités $f'(x)$ et η affectent respectivement. L'on a ainsi

$$\Delta y_1=[f'(x)+\eta_1]\frac{\Delta x}{m}$$

$$\Delta y_2=\left[f'\left(x+\frac{\Delta x}{m}\right)+\eta_2\right]\frac{\Delta x}{m}$$

$$\Delta y_3=\left[f'\left(x+\frac{2\Delta x}{m}\right)+\eta_3\right]\frac{\Delta x}{m}$$

. . . . . .

$$\Delta y_m=\left[f'\left(x+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)+\eta_m\right]\frac{\Delta x}{m}$$

Or la somme des différences successives Δy_1, Δy_2 etc. Δy_m est nécessairement égale à la différence totale Δy. Il vient donc,

$$\Delta y=\Delta x\left[\frac{f'(x)+f'\left(x+\frac{\Delta x}{m}\right)+\text{etc.}+f'\left(x+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)}{m}\right.$$

$$\left.+\frac{\eta_1+\eta_2+\text{etc.}+\eta_m}{m}\right]$$

Cela posé, et les valeurs que $f'(x)$ peut prendre dans l'intervalle Δx étant, par hypothèse, toutes finies, imaginons d'abord que dans cet intervalle la fonction y soit toujours croissante ou toujours dé-

croissante. En ce cas les diverses valeurs, qu'affecte $f'(x)$, sont toutes de même signe. Imaginons ensuite que la fonction soit alternativement croissante et décroissante. En ce cas $f'(x)$ ne peut changer de signe qu'en passant par zéro. Donc, *dans tous les cas*, (la continuité subsistant) la moyenne représentée par le terme

$$\frac{f'(x)+f'\left(x+\frac{\Delta x}{m}\right)+\text{etc.}+f'\left(x+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)}{m}$$

est une quantité intermédiaire entre les valeurs extrêmes que prend $f'(x)$ et par conséquent elle se réduit à une expression de la forme $f'(x+\theta\Delta x)$, θ dépendant de m, mais étant toujours plus petit que l'unité.

D'un autre côté m est arbitraire et l'on en peut disposer de manière à rendre aussi petite que l'on veut l'une quelconque des valeurs affectées par γ dans l'intervalle Δx. Delà résulte

$$\Delta y=[f'(x+\theta\Delta x)+\gamma.]\Delta x$$

γ étant une quantité qui se rapproche indéfiniment de zéro à mesure que m est supposé de plus en plus grand.

Soit maintenant $f'(x+\theta_1\Delta x)$ la moyenne rigoureuse de la suite infinie des valeurs que $f'(x)$ prend dans l'intervalle Δx, l'on a évidemment

$$f'(x+\theta_1\Delta x)-f'(x+\theta\Delta x)=\gamma_1$$

γ_1 convergeant vers zéro en même temps que γ. Substituant l'on trouve,

$$\Delta y-f'(x+\theta_1\Delta x)\Delta x=\Delta x[\gamma-\gamma_1]$$

Or le premier membre de cette équation est indépendant de m, tandis que le second, s'il n'était pas nul, pourrait être rendu aussi petit que l'on veut en attribuant à m des valeurs de plus en plus grandes. Chacun de ces deux membres est donc nul de lui-même, et l'on a généralement

$$\Delta y=f'(x+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x$$

θ_1 ne dépendant pas de m, mais restant toujours compris entre 0 et 1.

Le théorème que nous venons de démontrer peut s'énoncer de la manière suivante :

L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la dérivée.

27) Il semble au premier abord que la valeur moyenne de la dérivée ne soit susceptible d'expression numérique que dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, c'est-à-dire lorsque la dérivée ne fait que croître ou décroître entre des limites déterminées. Il n'en est point ainsi, et cette moyenne est toujours numériquement assignable, lorsque la fonction reste finie dans l'intervalle Δx.

Pour démontrer ce corollaire, supposons d'abord une suite d'intervalles pour lesquels on ait respectivement,

$$\Delta y_1 = c_1 \Delta x_1, \qquad \Delta y_2 = c_2 \Delta x_2, \qquad \Delta y_3 = c_3 \Delta x_3, \text{ etc.}$$

Considérons en particulier l'une quelconque des moyennes exprimées par c_1, c_2, etc. Les valeurs, en nombre infini, qui concourent à la formation de cette moyenne sont généralement inégales. Néanmoins l'on peut leur substituer d'autres valeurs toutes égales entr'elles et à la moyenne dont il s'agit. Veut-on en outre rapporter les moyennes c_1, c_2, etc., à un même intervalle $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 +$ etc., elles deviennent respectivement $c_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta x}, c_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta x}$, etc. et fournissent une moyenne générale exprimée par la somme

$$c_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta x} + c_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta x} + \text{etc.} = \mathrm{M}.$$

On a donc

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 + \text{etc.} = \Delta y = \mathrm{M} \Delta x.$$

M restant compris entre la plus petite et la plus grande valeur des moyennes partielles c_1, c_2, etc.

Supposons maintenant que dans l'intervalle Δx, la dérivée se présente, tant de fois qu'on voudra, sous la forme symbolique $\frac{1}{0}$, laquelle ne peut qu'être accidentelle et non permanente. Soit d'ailleurs, x_1, x_2, x_3, etc. les valeurs particulières de x qui rendent la dérivée $f'(x)$ infinie, et $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, etc. une suite de très petits intervalles, comptés, moitié en deçà, moitié au-delà, des valeurs x_1, x_2, x_3 qui leur correspondent respectivement. L'on aura d'après ce qui précède

$$\Delta y = \mathrm{M}[\Delta x - \Delta x_1 - \Delta x_2 - \Delta x_3 - \text{etc}] + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \text{etc.}$$

Or à mesure que chacun des intervalles $\Delta x_1, \Delta x_2$, etc. est pris de plus en plus petit, chacune des différences $\Delta y_1, \Delta y_2$, etc. dé-

croît indéfiniment et converge vers zéro. Donc la moyenne M converge vers une limite déterminée et l'on a toujours

$$\text{Lim. M} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lorsque les valeurs de la dérivée sont toutes de même signe, la quantité représentée par Lim. M est une expression de la forme $f'(x+\theta_1\Delta x)$. Dans le cas contraire la même condition peut encore être remplie, mais elle ne subsiste pas nécessairement.

28) *Corollaire I. Lorsque pour une valeur particulière attribuée à la variable, la fonction*, jusques là continue, *se présente sous la forme symbolique* $\frac{1}{0}$, *il en est de même de la dérivée.*

Nommons x_3 la valeur particulière dont il s'agit, et x_4 une autre valeur aussi rapprochée qu'on voudra de x_3, mais telle que de x_4 à x_3 la fonction soit toujours croissante en grandeur absolue. Soit en outre x_2 une valeur intermédiaire. En admettant que pour $x=x_2$ la dérivée $f'(x)$ prit accidentellement la forme $\frac{1}{0}$, il est visible que cette forme ne pourrait persister. Il est donc permis de poser immédiatement $f'(x_2)=\text{B}$, la valeur B étant numériquement assignable. Or, si grand que soit B, je dis que $f'(x)$ doit augmenter encore de x_2 à x_3. Pour le démontrer, prenons à partir de x_2 l'intervalle Δx_2 plus petit que x_3-x_2. Nous aurons pour accroissement correspondant de la fonction

$$\Delta y_2 = f'(x_2+\theta_1\Delta x_2)\Delta x_2$$

Suppose-t-on maintenant que $f'(x)$ n'augmente pas de x_2 à x_3, la valeur moyenne $f'(x_2+\theta\Delta x_2)$ est inférieure à B et il vient,

$$\Delta y_2 < \text{B}\Delta x_2$$

d'où à fortiori

$$\Delta y_2 < \text{B}(x_3-x_2)$$

Mais quelque soit B, si grand qu'on le suppose, cette dernière inégalité est toujours impossible, puisque par hypothèse Δy_2 croît indéfiniment à mesure que Δx_2 converge vers la limite x_3-x_2. On ne peut donc admettre que la dérivée $f'(x)$, lors même qu'elle décroîtrait à partir de x_2, ne prenne pas ensuite de x_2 à x_3 des valeurs toujours de plus en plus grandes et cela, sans limite assi-

gnable. Il faut donc nécessairement que $f'(x_2)$ affecte la forme symbolique $\frac{1}{0}$.

Il suit de là que, si pour une valeur particulière, attribuée à la variable, la fonction, jusque là continue se présente sous la forme $\frac{1}{0}$, *il en est de même de toutes ses dérivées successives.*

Réciproquement toute valeur de la variable qui ne rend pas infinie la dérivée de l'ordre n *ne rend infinie, ni la fonction, ni aucune des dérivées précédentes.*

On ne perdra pas de vue qu'une expression de la forme $\frac{1}{0}$ ne peut jamais constituer ce que nous appelons une valeur particulière.

29) *Corollaire* 2. La fonction étant continue dans l'intervalle Δx, l'on a

$$\Delta y = f'(x+\theta_1\Delta x).\Delta x \qquad (1)$$

et la dérivée $f^n(x)$ ne se présente pas en général sous la forme $\frac{1}{0}$.

Cela posé, quelles que soient les valeurs particulières affectées par les n premières dérivées, l'on peut toujours concevoir l'intervalle Δx assez petit, pour que dans cet intervalle, les dérivées dont il s'agit restent continues. Or en ce cas l'équation (1) est applicable à ces dérivées, et il vient

$$f'(x+\theta_1\Delta x)=f'(x)+f''(x+\theta_1\theta_2\Delta x).\theta_1\Delta x$$
$$f''(x+\theta_1\theta_2\Delta x)=f''(x)+f'''(x+\theta_1\theta_2\theta_3\Delta x).\theta_1\theta_2\Delta x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{n-1}(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-1}\Delta x)=f^{n-1}(x)+f^n(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\Delta x).\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-1}\Delta x.$$

On a donc en substituant

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\theta_1\Delta x^2 f''(x)+\theta_1^2\theta_2\Delta x^3 f'''(x)+\text{etc.}+$$
$$\theta_1^{n-2}\theta_2^{n-3}\ldots\theta_{n-2}\Delta x^{n-1}f^{n-1}(x)+\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\ldots\theta_{n-1}\Delta x^n f^n(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\Delta x).$$

et si l'on suppose que, pour la valeur particulière attribuée à la variable, les $n-1$ premières dérivées s'annulent toutes à la fois

$$\Delta y=\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\ldots\theta_{n-1}\Delta x^n f^n(x+\theta_1\theta_2\theta_3\ldots\theta_n\Delta x). \qquad (2)$$

Les quantités θ_1, θ_2, etc. θ_n, dépendent en général de x et de

Δx : (1) néanmoins chacune d'elle reste toujours positive et moindre que l'unité. Quant à l'intervalle Δx, il est aussi petit que l'on veut et dès lors on peut admettre que dans cet intervalle $f^n(x)$ et $f^n(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\Delta x)$ sont constamment de même signe. Il suit de là que les premiers changements subis par la fonction et exprimés par la différence Δy sont des accroissements ou des décroissements suivant le rang ou le signe de la première des dérivées successives qui ne s'évanouit point. Delà résultent immédiatement les conséquences établies ci-dessus N° 25 :

---

(1) Lorsque la dérivée de l'ordre n est constante l'on peut poser $\theta_n=0$. Sauf ce cas exceptionnel, les quantités θ_1, θ_2, etc. sont toutes essentiellement variables et leur expression dépend de la nature de la fonction sur laquelle on opère. Toutefois il est à observer que ces quantités convergent vers certaines limites à mesure que Δx converge vers zéro. Proposons-nous de déterminer quelles sont ces limites.

Soit $f(a+\theta\Delta x)$ la moyenne des valeurs affectées par $f(x)$ dans l'intervalle Δx, divisé par hypothèse en m parties égales. Les valeurs, en nombre limité qui concourent à la formation de cette moyenne sont respectivement $f(a)$, $f\left(a+\frac{\Delta x}{m}\right)$ $f\left(a+\frac{2\Delta x}{m}\right)$ etc. $f\left(a+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)$. Nous supposerons, pour plus de généralité, que la valeur $x=a$ annule les $(n-1)$ premières dérivées et nous aurons suivant la formule du N° 29

$$f(a+\Delta x)-f(a)=\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\ldots\theta_{n-2}\theta_{n-1}\Delta x^n f^n(a+\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\Delta x)$$

ou plus simplement

$$f(a+\Delta x)-f(a)=\Delta x^n.\alpha f^n(a+\varepsilon\Delta x),$$

α et ε restant compris entre 0 et 1 et ne dépendant plus que de Δx. De là résulte,

$$f(a)-f(a)=0.$$

$$f\left(a+\frac{\Delta x}{m}\right)-f(a)=\left(\frac{\Delta x}{m}\right)^n \alpha_1 f^n\left(a+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{m}\right)$$

$$f\left(a+\frac{2\Delta x}{m}\right)-f(a)=2^n\left(\frac{\Delta x}{m}\right)^n \alpha_2 f^n\left(a+\varepsilon_2\frac{2\Delta x}{m}\right)$$

. . . . . .

$$f\left(a+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)-f(a)=(m-1)^n\left(\frac{\Delta x}{m}\right)^n \alpha_{m-1} f^n\left(a+\varepsilon_{m-1}\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right).$$

d'où, ajoutant membre à membre et divisant par m.

$$\frac{1}{m}\left[f(a)+f\left(a+\frac{\Delta x}{m}\right)+\text{etc.}+f\left(a+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)\right]-f(a)=$$

$$\frac{\Delta x^n}{m^{n+1}}\left[\alpha_1 f^n\left(a+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{m}\right)+2^n\alpha_2 f^n\left(a+\varepsilon_2\frac{2\Delta x}{m}\right)+\text{etc.}\right]$$

1°. *La marche de la fonction est toujours indiquée par le signe et le rang de la première des dérivées qui ne s'évanouit point.*

2°. *Cette dérivée est-elle de rang impair, suivant qu'elle est positive ou négative, la fonction est croissante ou décroissante.*

Mais, d'un autre côté, l'on a directement

$$f(a+\theta\Delta x)-f(a)=\Delta x^n.\theta^n.\alpha_\rho.f^n(a+\varepsilon_\rho.\theta.\Delta x).$$

Il vient donc en égalant les seconds membres de ces deux équations et supprimant le facteur commun Δx^n.

$$\theta^n=\frac{1}{m^{n+1}}\left[\frac{\alpha_1 f^n\left(a+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+\varepsilon_\rho.\theta.\Delta x)}+2^n\frac{\alpha_2 f^n\left(a+\varepsilon_2\frac{2\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+\varepsilon_\rho\theta.\Delta x)}+\text{etc.}\right.$$

$$\left.+(m-1)^n\frac{\alpha_{m-1} f^n\left(a+\varepsilon_{m-1}\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+\varepsilon_\rho.\theta.\Delta x)}\right]$$

Or à mesure que Δx converge vers zéro chacun des rapports

$$\frac{\alpha_r f^n\left(a+\varepsilon_r.\frac{r\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+\varepsilon_\rho\theta\Delta x)}$$

converge vers l'unité. En ce cas donc c'est vers une limite, généralement variable avec m et n, *mais toujours indépendante de la nature de la fonction* que θ^n converge. On voit d'ailleurs que cette limite a pour expression $\frac{1+2^n+3^n+\text{etc.}+(m-1)^n}{m^{n+1}}$

Cela posé, considérons en particulier la fonction $(x-a)^n$ dont les $(n-1)$ premières dérivées s'annulent pour $x=a$, et observons que cette fonction est elle même la dérivée première de la fonction $y=F(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$. Si l'on applique ici l'équation du N°. 26.

$$\Delta y=[F'(x+\theta\Delta x)+\gamma]\Delta x$$

on a $x=a$, $\Delta x=x-a$, $\Delta y=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, $F'(x+\theta\Delta x)=\theta^n(x-a)^n$, il vient donc,

$$\theta^n=\frac{1}{n+1}-\frac{\gamma}{\Delta x^n}.$$

γ convergeant vers zéro lorsque m est supposé de plus en plus grand, c'est-à-dire lorsque la moyenne que l'on considère se rapproche indéfiniment de la moyenne rigoureuse qui répond à la suite infinie des valeurs comprises dans l'intervalle $x-a$.

Soit θ_0 la valeur que prend θ pour cette moyenne rigoureuse, on trouve immédiatement

$$\theta_0^n=\frac{1}{n+1}$$

3° *Est-elle au contraire de rang pair, la valeur de la fonction est minima ou maxima, suivant que la dérivée dont il s'agit est positive ou négative.*

En résumé s'il s'agit des moyennes rigoureuses repondant à l'intervalle $x-a$ et exprimées par $f(a+\theta_0\Delta x)$ [les dérivées successives $f'(a)\,f''(a)$, etc. étant supposées nulles jusqu'à celle de l'ordre n exclusivement] l'on a pour le cas particulier ou $f(x)=(x-a)^n$

$$\theta_0^n=\frac{1}{n+1}$$

et en général

$$\text{Lim } \theta_\omega^n=\frac{1}{n+1}$$

Comme conséquence du principe que nous venons d'établir, nous remarquerions relativement a la fonction $f'(x)$ que ses $(n-2)$ premières dérivées s'annulent dans l'hypothèse $x=a$. il vient donc

$$\text{Lim. } \theta_1^{n-1}=\frac{1}{n}$$

On trouverait de même relativement aux fonctions $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. $f^{n-4}(x)$

$$\text{Lim. } \theta_2^{n-2}=\frac{1}{n-1}$$

$$\text{Lim. } \theta_3^{n-3}=\frac{1}{n-1}$$

. . . . . .

$$\text{Lim. } \theta_{n-1}=\frac{1}{2}.$$

et par suite

$$\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\ldots\theta_{n-1}=\frac{1}{1.2.\ldots n}.+\omega$$

ω convergeant vers zéro en même temps que Δx.

On observera que lorsque la dérivée du second ordre ne s'évanouit pas, *si petite que soit d'ailleurs la valeur qu'elle affecte*, θ_1 a pour limite constante la fraction $\frac{1}{2}$. Soit au contraire $f''(a)=0$. En ce cas la limite de θ_1 devient $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ ou plus généralement $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, n étant l'ordre de la première des dérivées successives qui ne s'évanouit point. Cette permanence et ce changement *brusque* des diverses limites assignées à θ_1, suivant le nombre des dérivées successives qui s'annulent pour une même valeur attribuée à la variable, présentent un résultat dont il est facile de se rendre compte, mais qui n'en est pas moins extrêmement curieux.

Nous verrons plus loin comment la simple considération de la loi de génération conduit directement aux mêmes conséquences.

30) Nous avons supposé jusqu'ici que les dérivées successives restaient en général fonction de la variable. Il importe d'examiner en particulier le cas où la dérivée de l'ordre n est constante, indépendamment de toute valeur attribuée à x.

Soit par exemple

$$f^n(x)=\text{cons}^t. \qquad (1)$$

Les dérivées des ordres supérieurs à n sont toutes nulles. Quant à celles des ordres inférieurs, quelle que soit la valeur particulière attribuée à la variable, elles ne peuvent jamais se présenter sous la forme $\frac{1}{0}$ (voir N° 28). Cela posé, si l'on remarque que, pour $x=a$, les dérivées de la fonction $(x-a)^r$ sont toutes nulles à l'exception de celle de l'ordre r qui se réduit à $1.2.3...r.$, il est évident qu'il suffit d'écrire

$$\Phi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\ \ 2}f''(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^n}{12\cdots n}f^n(a).$$

pour que l'on ait en général $\Phi^r(a)=f^r(a)$ et que par conséquent les dérivées successivées de la fonction $y=f(x)-\Phi(x)$ s'annulent *toutes sans exception*, dans l'hypothèse $x=a$. Mais alors l'équation générale du N° 29

$$\Delta y=F'(x)\Delta x+\theta_1 F''(x)\Delta x^2+\text{etc.}$$

se réduit à $\Delta y=0$, il vient donc en faisant $x=a$, $F(x)=f(x)-\Phi(x)$, et remplaçant Δx par $(x-a)$.

$$\Delta y=f(x)-f(a)-\Phi(x)=0.$$

d'où substituant

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}+\text{etc.}+f^n(a)\frac{(x-a)^n}{12\cdot n}. \qquad (2).$$

Il suit de là que les relations (1) et (2) s'impliquent mutuellement, les fonctions algébriques, rationnelles et entières, étant les seules qui puissent se réduire à des constantes par une suite de dérivations.

31) En général il est impossible que toutes les dérivées d'une fonction s'annulent à la fois pour une *même valeur particulière* attribuée à la variable. Cela résulte de la démonstration précédente. On peut d'ailleurs le voir directement. En effet, y étant par hypothèse fonction continue de x, l'on peut avoir accidentellement

$dy=0$, mais si telle est à partir de la valeur $x=a$ l'expression de la loi de génération, cette même expression ne peut s'appliquer à la suite infinie des états immédiatement successifs. Or, les modifications que la loi doit subir sont régies par la première des équations différentielles qui cesse de se présenter sous la forme $d^n y=0$. On ne peut donc admettre que l'on ait toujours et quelque soit n, $f^n(a)=0$, puisque ce serait réduire à néant les modifications dont il s'agit et par conséquent rendre permanente la loi de génération.

Il en est autrement, lorsque la fonction converge vers zéro à mesure que la variable est supposée de plus en plus grande. En ce cas les dérivées convergent toutes vers zéro en même temps que la fonction.

Pour démontrer ce principe, nous ferons observer que supposer $f(x)$ convergeant vers zéro, alors que x croit indéfiniment, c'est exprimer relativement à la fonction $f\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi(z)$ qu'elle converge vers zéro en même temps que z. On a par conséquent $\text{Lim.}\,\varphi(z)=\varphi(0)=0$. Mais d'ailleurs, la continuité subsistant, l'on a en général

$$\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)=\varphi'(z+\theta\Delta z)\cdot\Delta z.$$

Il vient donc en faisant d'abord $z=0$ puis remplaçant Δz par z.

$$\varphi(z)=\varphi'(\theta z)\cdot z.$$

de la résulte pour $z=0$

$$\varphi'(0)\cdot[z=0]=0.$$

D'un autre côté, si l'on différencie les équations de condition

$$x=\frac{1}{z}, \qquad f(x)=\varphi(z)$$

l'on trouve

$$f'\left(\frac{1}{z}\right)=-\varphi'(z)\cdot z^2.$$

et l'on en déduit d'après ce qui précède

$$f'\left(\frac{1}{z=0}\right)=0.$$

Or $f'\left(\frac{1}{z}\right)$ est continu dans un certain intervalle mesuré à partir de $z=0$ donc $f'\left(\frac{1}{z}\right)$ converge vers zéro à mesure que x croit

indéfiniment. Dès lors il en est de même de $f''(x)$, puis de $f'''(x)$ et ainsi de suite à l'infini.

En ce cas la loi de génération *tend à devenir permanente* à mesure que les valeurs affectées par la variable sont supposées de plus en plus grandes. Quant à la fonction $\varphi(z)$, on remarquera que ce ne sont point ses dérivées successives qui s'annulent toutes pour $z=0$ (ce que nous avons démontré impossible), mais bien les produits $z\varphi'(z)$, $z^2\varphi''(z)$, etc.

32) *Corollaire* 3. Soit deux fonctions $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$, supposées telles que l'on ait :

1° Pour $x=a$ et en ce qui concerne les $(n-1)$ premières dérivées

$$f'(a)=\varphi'(a),\ f''(a)=\varphi''(a),\ \text{etc.}\ f^{n-1}(a)=\varphi^{n-1}(a).$$

2° Pour une même valeur quelconque x comprise entre a et $a+h$

$$f^{n-1}(x)>\varphi^{n-1}(x).$$

Je dis que pour toute valeur de Δx comprise entre 0 et h, l'on a nécessairement

$$\Delta y>\Delta u.$$

En effet, si l'on applique à la fonction $y-u=f(x)-\varphi(x)$ la formule 2 du N° 29, en observant que pour $x=a$ les $(n-2)$ premières dérivées s'annulent, il vient

$$\Delta y-\Delta u=\theta_1^{n-2}\theta_2^{n-3}\ldots\theta_{n-2}\Delta x^{n-1}[f^{n-1}(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-1}\Delta x)$$
$$-\varphi^{n-1}(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-1}\Delta x)].$$

Or de la résulte évidemment $\Delta y>\Delta u$. C. Q. F. D.

Remarque. En vertu de la relation $f^{n-1}(a)=\varphi^{n-1}(a)$, il est indifférent de poser

$$f^{n-1}(x)>\varphi^{n-1}(x)$$

ou bien

$$[\Delta f^{n-1}(x)=f^n(a+\theta\Delta x)\cdot\Delta x]>[\Delta\varphi^{n-1}(x)=\varphi^n(a+\theta'\Delta x)\cdot\Delta x]$$

Il suffit donc que l'on ait :

1° En ce qui concerne les $(n-1)$ premières dérivées

$$f'(a)=\varphi'(a),\ f''(a)=\varphi''(a),\ \text{etc.}\ f^{n-1}(a)=\varphi^{n-1}(a)$$

2° En ce qui concerne les valeurs moyennes des dérivées de l'ordre n

$$f^n(a+\theta\Delta x)> \text{ ou } <\varphi^n(a+\theta'\Delta x)$$

pour qu'il en résulte nécessairement

$$\Delta y > \text{ou} < \Delta u.$$

33) Soit $f(x)$ une fonction continue supposée telle que dans l'intervalle compris entre $x=a$ et $x=a+h$ la dérivée $f^{n-1}(x)$ *reste toujours finie.* Si l'on désigne par M et m la plus grande et la plus petite des valeurs que la moyenne $f^n(a+\theta\Delta x)=\dfrac{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(a)}{x-a}$ affecte dans l'intervalle h, et par $\varphi(x), \psi(x)$ les deux fonctions algébriques

$$\varphi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}.f''(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2....(n-1)}.f^{n-1}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2.....n}\,\mathrm{M}$$

$$\psi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.....(n-1)}f^{n-1}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2...n}\,m$$

On aura d'abord pour l'une quelconque des $(n-1)$ premières dérivées, celle de l'ordre p par exemple

$$f^p(a)=\varphi^p(a)=\psi^p(a)$$

et ensuite

$$\Delta f^{n-1}(x) > [\Delta\psi^{n-1}(x)=m\Delta x]$$
$$\Delta f^{n-1}(x) < [\Delta\varphi^{n-1}(x)=\mathrm{M}\Delta x]$$

Or de là résulte conformément au principe établi N°. 32

$$\Delta f(x) > \Delta\psi(x)$$
$$\Delta f(x) < \Delta\varphi(x)$$

c'est-à-dire

$$f(x) > f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2....(n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1.2.....n}\,m.$$

$$f(x) < f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\,..\,(n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1.2....n}\,\mathrm{M}$$

Si donc on exprime par $f^n(a+\theta(x-a))$ une certaine valeur comprise entre m et M, il vient nécessairement

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(a+\theta(x-a)).$$

On observera

1° Que θ est une fraction

2° Que l'expression $f^n(a+\theta(x-a))$ a une valeur intermédiaire entre M et m, limites nécessairement plus resserrées que celles qui répondent à la plus grande et à la plus petite des valeurs affectées par $f^n(x)$ dans l'intervalle $x-a$.

3° Que les limites M et m sont toujours numériquement assignables, sauf le cas exceptionnel où la dérivée $f^n(x)$ deviendrait infinie pour la valeur particulière $x=a$.

34) Les hypothèses du N° 33 étant maintenues, supposons en outre que les $(n-1)$ premières dérivées s'annulent pour $x=a$; il vient alors

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(a+\theta(x-a)).$$

Mais on a d'ailleurs en faisant $x=a$, puis remplaçant Δx par $x-a$ dans l'équation (2) du N° 29

$$f(x)-f(a)=\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\cdots\theta_{n-1}(x-a)^n f^n(a+\theta_1\theta_2\cdots\theta_n(x-a)).$$

il vient donc en divisant membre à membre et supprimant le facteur commun $(x-a)^n$

$$\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\cdots\theta_{n-1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{f^n(a+\theta(x-a))}{f^n(a+\theta_1\theta_2\cdots\theta_n(x-a))}$$

ou passant à la limite et faisant $x=a$

$$\text{Lim.}\,\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\cdots\theta_{n-1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}.$$

On trouverait de même en appliquant ce qui précède à la dérivée $f'(x)$

$$\text{Lim.}\,\theta_2^{n-2}\theta_3^{n-3}\cdots\theta_{n-1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n-1}$$

De là résulte

$$\text{Lim. } \theta_1^{n-1} = \frac{1}{n}$$

ou

$$\text{Lim. } \theta_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ce résultat (1) est remarquable en ce qu'il assigne diverses limites à la quantité θ_1 *suivant le nombre* des dérivées successives qui s'évanouissent à partir de la dérivée du second ordre.

35) Reprenons le développement du N° 33

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(a+\theta(x-a)).$$

et supposons que la valeur $x=a$ rende infinie la dérivée de l'ordre n. En ce cas le développement ne peut être continué sans changer de forme, et si l'on veut ajouter de nouveaux termes à ceux qu'il contient, il est nécessaire de déterminer quelle est la loi de formation des termes suivants. Proposons-nous cette recherche en la res-

---

(1) Veut-on parvenir directement à ce résultat, l'on remarque que, la valeur $x=a$ annulant par hypothèse les $(n-1)$ premières dérivées, la différence Δy doit être considérée comme dépendant :

1° De la loi de génération de l'ordre n, $d^n y=f^n(a).\Delta x^n$.

2° Des modifications que cette loi subit dans l'intervalle $\Delta x=x-a$.

Cela posé, si l'on considère le rapport de l'accroissement effectif Δy à l'accroissement qui résulterait du développement de la loi, $d^n y=f^n(a)\Delta x^n$, supposée permanente, il est visible que ce rapport tend vers l'unité à mesure que Δx converge vers zéro. Or la fonction $\left(z=\frac{(x-a)^n}{1.2...n}f^n(a)\right)$ est précisément telle que, ses $(n-1)$ premières dérivées s'annulant dans l'hypothèse $x=a$, l'accroissement Δz est régi par la loi constante $d^n z=f^n(a)\Delta x^n$. On a donc nécessairement

$$\text{Lim.}\frac{\Delta z}{\Delta y}=1$$

d'où substituant et faisant $x=a$ après la suppression du facteur $(x-a)^n$

$$\text{Lim. } \theta_1^{n-1}.\theta_2^{n-2}...\theta_{n-1}=\frac{1}{1.2...n.}$$

treignant au cas où la dérivée $f^n(a)$ ne devient infinie que par l'annulation d'un facteur algébrique susceptible d'être mis en évidence.

Soit par exemple

$$f^n(x)=\frac{F(x)}{(x-a)^r}$$

r étant plus grand que zéro et $F(a)$ ne se présentant point sous la forme $\frac{1}{0}$.

L'on a

$$\Delta f^{n-1}(x)=f^n(a+\theta(x-a))\cdot(x-a)=F(a+\theta(x-a))\cdot\frac{(x-a)^{1-r}}{\theta^r}$$

il vient donc aussi $r<1$

La fonction $F(x)=(x-a)^r f^n(x)$ prenant une valeur finie pour $x=a$, ses dérivées successives $F'(a)$, $F''(a)$ etc., ne se présentent pas en général sous la forme $\frac{1}{0}$. L'on a donc d'après ce qui précède,

$$F(x)=F(a)+(x-a)F'(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^\rho}{1.2....\rho}F^\rho(a+\theta(x-a)).$$

ou désignant par M_1 et m_1 la plus grande et la plus petite des valeurs affectées par la moyenne $F^\rho(a+\theta(x-a))$ dans l'intervalle $x-a=h$, et remplaçant $F(x)$ par sa valeur $(x-a)^r f^n(x)$.

$$f^n(x)>F(a)\cdot(x-a)^{-r}+F'(a)\cdot(x-a)^{1-r}+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{\rho-r}}{1\cdot2\cdot\cdot\ \rho}m_1$$

$$f^n(x)<F(a)\ (x-a)^{-r}+F'(a)\cdot(x-a)^{1-r}+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{\rho-r}}{1\cdot2\cdot\cdot\ \rho}M_1.$$

c'est-à-dire

$$df^{n-1}(x)>d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}F'(a)+\frac{(x-a)^{2-r}}{2-r}+F'(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{\rho+1-r}}{\rho+1-r}\cdot\frac{m_1}{1.2...\rho}\Big] \qquad (1)$$

$$df^{n-1}(x)<d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}F(a)+\frac{(x-a)^{2-r}}{2-r}F'(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{\rho+1-r}}{\rho+1-r}\cdot\frac{M_1}{1.2...\rho}\Big] \qquad (2)$$

Cela posé, si l'on prend les deux fonctions algébriques

$$\Phi(x)=(x-a)f(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^{n-r}}{(1-r)(2-r)\ldots(n-r)}\mathrm{F}(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)\rho+n-r}{(\rho+1-r)(\rho+2-r)\ldots(\rho+n-r)}\cdot\frac{\mathrm{M}_1}{1.2\ldots\rho}$$
$$\Psi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^{n-1}}{(1-r)(2-r)\ldots(n-r)}\mathrm{F}(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)\rho+n-r}{(\rho+1-r)(\rho+2-r)\ldots(\rho+n-r)}\cdot\frac{m_1}{1.2\ldots\rho}$$

il est visible que l'on a pour l'une quelconque des $(n-1)$ premières dérivées, celles de l'ordre q par exemple

$$\Phi^q(a)=\Psi^q(a)=f^q(a).$$

et ensuite

$$d\Phi^{n-1}(x)=d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}\mathrm{F}(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)\rho+1-r}{\rho+1-r}\cdot\frac{\mathrm{M}_1}{1.2\ldots\rho}\Big]$$
$$d\Psi^{n-1}(x)=d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}\mathrm{F}(a)+\text{etc.}+\frac{(-a)\rho+1-r}{\rho+1-r}\cdot\frac{m_1}{1.2\ldots\rho}\Big]$$

il vient donc en vertu de inégalités (1) et (2)

$$df^{n-1}(x)<d\Phi^{n-1}(x).$$
$$df^{n-1}(x)>d\Psi^{n-1}(x).$$

d'où

$$\Delta f(x)<\Delta\Phi(x)$$
$$\Delta f(x)>\Delta\Psi(x).$$

et par conséquent

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\text{etc.}+\frac{1.2\ldots(n-1)}{(x-a)^{n-1}}f^{n-1}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^{n-r}}{(1-r)\ldots(n-r)}\mathrm{F}(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)\rho+n-1-r}{(\rho-r)\ldots(\rho+n-r)}\cdot\frac{\mathrm{F}^{\rho-1}(a)}{1.2\ldots(\rho-1)}$$
$$+\frac{(x-a)\rho+n-r}{(\rho+1-r)\ldots(\rho+n-r)}\cdot\frac{\mathrm{F}^{\rho}(a+\theta(x-a))}{1.2\ldots\rho}$$

La fonction $F(x)$ peut être telle que l'une de ses dérivées, celle de l'ordre p par exemple, devienne infinie pour $x=a$. S'il en est ainsi et que cela dépende encore de l'annulation d'un facteur algébrique $(x-a)^s$, la règle précédente est applicable au développement

$$F(x)=F(a)+(x-a)F'(a)+\text{etc.}$$

et ainsi de suite, la question se trouvant complètement résolue pour le cas de l'hypothèse où nous nous sommes placé.

36) Soit en dernier lieu, $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^m}$, m étant positif, entier ou fractionnaire et $\varphi(a)$ ne se présentant point sous la forme $\dfrac{1}{0}$. On a généralement

$$\varphi(x)=\varphi(a)+(x-a)\varphi'(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^n}{1.2....n}\varphi^n(a+\theta(x-a))$$

et l'on en déduit

$$f(a)=\frac{\varphi(a)}{(x-a)^m}+\frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{m-1}}+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-m}}{1.2..n}\varphi^n(a+\theta(x-a)).$$

Recherches relatives aux expressions qui se présentent directement ou indirectement sous la forme $\dfrac{0}{0}$.

37) Étant donné la relation générale

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x).\Delta x \qquad (1)$$

l'on remarque que pour toute valeur particulière de x satisfaisant à la condition $f(x)=0$, il vient

$$f(x+\Delta x)=f'(x+\theta\Delta x).\Delta x.$$

Soit $x=a$ l'une de ces valeurs. Si nous la substituons dans l'équation précédente et que nous posions ensuite $\Delta x=x-a$, nous aurons quelque soit x,

$$f(x)=f'(a+\theta(x-a)).(x-a) \qquad (2)$$

L'équation (2) subsistant alors même que $f'(a)$ se présenterait accidentellement sous la forme $\dfrac{1}{0}$, l'on conclut de ce qui précède le théorème suivant :

Toute fonction qui s'annule pour x=a *est en général le produit de deux facteurs. L'un de ces facteurs est* x—a, *l'autre se réduit à* f'(a), *lorsqu'on se place dans l'hypothèse particulière où la fonction s'annule.*

38) S'agit-il maintenant du rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$, supposé tel que, pour $x=a$, il se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, chacun de ces deux termes s'annulant dans cette hypothèse. L'annulation simultanée des fonctions $f(x)$, $F(x)$ dépend, *comme on vient de le voir*, de la présence du facteur commun $x-a$. Supprimons ce facteur et posons ensuite $x=a$, nous aurons d'après ce qui précède,

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}$$

si les dérivées s'annulaient encore toutes deux, on aurait de même

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}=\frac{f''(a)}{F''(a)}$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que, l'une des deux dérivées cessant de s'annuler, l'indétermination disparut.

Veut-on d'ailleurs procéder directement, on sait, conformément aux formules des N^os^ 33 et 34, que, si la valeur particulière $x=a$ annule la fonction et ses $(n-1)$ premières dérivées, il vient immédiatement

$$f(x)=\frac{(x-a)^n}{1.2...\ n}.f^n(a+\theta_1(x-a))$$

On a de même pour tout autre fonction remplissant les mêmes conditions

$$F(x)=\frac{(x-a)^n}{1.2...\ n}.F^n(a+\theta_1(x-a))$$

et par conséquent pour $x=a$

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f^n(a)}{F^n(a)}.$$

39) La proposition, que nous venons de démontrer, subsistant quel que soit a, il y a lieu d'examiner ce qui arrive lorsque l'annulation des fonctions que l'on considère répond, non plus à une valeur particulière de la variable, mais bien à l'expression symbolique $x=\infty$.

En ce cas les fonctions convergent vers zéro à mesure que x croit indéfiniment et il en est de même de toutes leurs dérivées (voir N° 28). Il semble donc que, si la formule du N° 38 était seule applicable, le symbole de l'indétermination ne pourrait jamais disparaitre.

Posons $x=\frac{1}{z-a}$ nous aurons $f(x)=f(\frac{1}{z-a})=\Phi(z)$, $F(x)=F(\frac{1}{z-a})=\Psi(z)$. et puisque par hypothèse ces fonctions convergent vers zéro en même temps que z converge vers a, il viendra nécessairement $\Phi(a)=0$, $\Psi(a)=0$. De là résulte

$$\frac{\Phi(a)}{\Psi(a)}=\frac{\Phi'(a)}{\Psi'(a)}$$

et cette valeur exprime la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ à mesure que x croit indéfiniment.

Si les dérivées successives $\Phi'(a)$, $\Phi''(a)$, etc., $\Psi'(a)$, $\Psi''(a)$, etc. s'évanouissent jusqu'à celles de l'ordre n exclusivement (il a été démontré que toutes les dérivées d'une fonction ne peuvent jamais s'annuler à la fois pour une même valeur particulière atttribuée à la variable), on aurait de même

$$\frac{f(\infty)}{F(\infty)}=\frac{\Phi(a)}{\Psi(a)}=\frac{\Phi^n(a)}{\Psi^n(a)}.$$

Remarque. Des relations $f(x)=\Phi(z)$, $F(x)=\Psi(z)$ l'on déduit généralement

$$f'(x)dx=\Phi'(z)dz$$
$$F'(x)dx=\Psi(z)dz.$$

et divisant membre à membre

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{\Phi'(z)}{\Psi'z)}.$$

Il suit de là que, si deux fonctions convergent vers zéro à mesure que la variable croit indéfiniment, le rapport de ces fonctions et celui de leurs dérivées premières convergent en même temps vers une *même limite* déterminée. Mais chacune de ces dérivées, prise isolément, converge alors vers zéro : le rapport des dérivées secondes a donc même limite que celui des dérivées premières et ainsi de suite à l'infini.

S'agit-il maintenant de la détermination de cette limite, nous venons de voir qu'il est toujours permis de substituer le rapport des dérivées d'un ordre quelconque à celui des fonctions primitives. Or la dérivation a généralement pour effet la mise en évidence du facteur qui s'annule haut et bas. On peut donc opérer directement sur les fonctions données et il n'est pas besoin de recourir à l'artifice de calcul indiqué ci-dessus. L'on a ainsi

$$\frac{f(x=\infty)}{F(x=\infty)}=\frac{0}{0}=\frac{f^n(x=\infty)}{F^n(x=\infty)}$$

l'hypothèse $x=\infty$ n'étant introduite dans l'expression générale du rapport $\frac{f^n(x)}{F^n(x)}$ qu'après la suppression du facteur qui en annule à la fois les deux termes.

40) Le symbole $\frac{\infty}{\infty}$ ne constitue en réalité qu'une représentation indirecte de la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins nous le considérerons en particulier.

Soit le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ supposé tel que pour $x=a$ il se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Si nous faisons $\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}, \psi(x)=\frac{1}{F(x)}$, les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ s'annulent toutes deux pour $x=a$ et il vient,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{\psi'(a+\theta(x-a))}{\varphi'(a+\theta'(x-a))} \qquad (1)$$

d'où

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}$$

et si plusieurs des dérivées successives $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc. $\psi'(a)$, $\psi''(a)$, etc., s'annulent, celles de l'ordre n étant les premières qui ne s'évanouissent pas toutes deux à la fois

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{\psi^n(a)}{\varphi^n(a)}.$$

Observons que les relations $\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}$, $\psi(x)=\frac{1}{F(x)}$ donnent,

quelque soit x,

$$\Phi'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(x)^2}$$

$$\Psi'(x) = -\frac{F'(x)}{F'(x)^2}$$

et par suite

$$\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} \cdot \left[\frac{F(x)}{f(x)}\right]^2$$

ou en vertu de l'équation (1)

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)} \cdot \left[\frac{\Psi'(a+\theta(x-a))}{\Phi'(a+\theta'(x-a))}\right]^2 \qquad (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) fournit le principe suivant :

Lorsque deux fonctions croissent indéfiniment à mesure que la variable converge vers une valeur particulière, le rapport de ces fonctions et celui de leurs dérivées premières convergent en même temps vers une même limite. Mais d'ailleurs chacune de ces dérivées est alors indéfiniment croissante : le rapport des dérivées secondes a donc même limite que celui des dérivées premières et ainsi de suite à l'infini.

De là résulte

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{f'(a)}{F'(a} = \frac{f^n(a)}{F^n(a)}$$

Il semble qu'il y a cercle vicieux à exprimer la limite $\frac{f(a)}{F(a)}$ par le rapport de deux termes dont chacun, pris isolément, affecte la forme $\frac{1}{0}$. Mais ici, de même qu'au N° 39, l'hypothèse $x=a$ ne doit être introduite dans l'expression $\frac{f^n(x)}{F^n(x)}$ qu'après la suppression des facteurs communs mis en évidence par les dérivations successives. Il n'est donc pas nécessaire de recourir à la formule,

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{\psi^n(a)}{\Phi^n(a)}$$

et l'on peut procéder directement comme nous venons de l'indiquer.

Nous avons supposé que la forme $\frac{\infty}{\infty}$, affectée par le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$, répondait à une valeur particulière $x=a$. Si l'hypothèse faite sur la variable était exprimée symboliquement par $x=\infty$, (la forme du rapport restant d'ailleurs la même) deux cas pourraient se présenter. Ou bien les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, etc. $F'(x)$, $F''(x)$, etc. seraient toutes indéfiniment croissantes avec x et en ce cas tout ce qui précède resterait applicable. Ou bien elles n'affecteraient pas toutes la forme $\frac{1}{0}$ pour $x=\infty$, et en ce cas il faudrait s'arrêter à la première des dérivées qui prendrait une valeur finie.

41) Soit encore le produit $f(x)F(x)$.

Si dans une hypothèse particulière ce produit prend la forme $0\times\infty$, l'on remarque qu'on peut écrire en général

$$f(x)F(x)=\frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}.$$

Tout revient donc à considérer une expression de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ et l'on est ramené à l'un des cas traités précédemment.

Soit enfin l'exponentielle $f(x)^{F(x)}$ supposée telle que pour $x=a$ elle se présente sous l'une des formes 0^0, ∞^0, 1^∞ il vient généralement

$$f(x)=e^{\log.f(x)}.$$

et par conséquent

$$f(x)^{F(x)}=e^{F x \log.f(x)}$$

La question se réduit donc à déterminer vers quelle limite converge le produit $F(x)\log.f(x)$ dans l'hypothèse où l'on s'est placé.

Développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières de l'accroissement de la variable.

APPLICATION AUX FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

42) Étant donné la formule du N° 33.

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2...(n-1)}\cdot f^{n-1}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2...n}f^n(a+\theta(x-a)). \qquad (1)$$

Posons $x-a=h$, et après substitution remplaçons a par x. Nous trouvons ainsi

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\text{etc.}+\frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)}\cdot f^{n-1}(x)$$
$$+\frac{h^n}{1.2...n}f^n(x+\theta h). \qquad (2)$$

fait-on simplement $a=0$, il vient

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}\cdot f''(0)+\text{etc.}+\frac{x^{n-1}}{1.2...(n-1)}\cdot f^{n-1}(0)$$
$$+\frac{x^n}{1.2...n}f(\theta x). \qquad (3)$$

Au lieu de limiter ces développements par l'addition du terme qui les complète, l'on peut concevoir qu'ils se prolongent à l'infini suivant la loi de formation indiquée. Les séries, que l'on obtient de cette manière sont généralement connues, l'une (2) sous le nom de série de Taylor, l'autre (3) sous celui de série de Maclaurin.

Il est permis en certains cas de substituer ces séries au développement limité de la fonction. Néanmoins on ne doit jamais perdre de vue qu'elles n'ont d'autre fondement que celui qui résulte de la possibilité présumée de prolonger toujours et suivant une loi constante le développement limité sur lequel elles reposent. Lorsque le terme complémentaire $\frac{(x-a)^n}{1.2...n}f^n(a+\theta(x-a))$ décroit indéfini-

ment à mesure que n augmente, les séries sont convergentes et elles permettent de calculer, avec tel degré d'approximation que l'on veut, la valeur des fonctions qu'elles servent à développer. Dans le cas contraire, elles sont divergentes. Pour que les séries puissent subsister, il faut que nulle dérivée ne devienne infinie, ou discontinue à l'origine de l'intervalle que l'on considère. Ces conditions étant supposées remplies, les séries sont convergentes pour tout ou partie de cet intervalle.

43) Soit à développer $(x+h)^m$ par la série de Taylor. La fonction x^m a pour dérivée de l'ordre n $\dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.\ 2\ \dots\ n}\,x^{m-n}$. Cette expression restant en général finie quels que soient x et n, la série peut subsister. On a d'ailleurs pour terme complémentaire

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.\ 2\ \dots\ n}\,h^n(x+\theta h)^{m-n}$$
$$=\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.\ 2\ \dots\ n}\,(x+\theta h)^m\cdot\left(\frac{h}{x+\theta h}\right)^n$$

Or, si l'on suppose $x>h$, ce terme converge indéfiniment vers zéro à mesure que n augmente. La série subsiste donc dans cette hypothèse et l'on a

$$(x+h)^m=x^m+mhx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}.h^2x^{m-2}+\text{etc.}$$

On observera que, pour toute valeur entière et positive de l'exposant m, les dérivées s'annulent à partir de l'ordre $m+1$. En ce cas le développement est limité, et il vient quels que soient x et h

$$(x+h)^m=x^m+mhx^{m-1}+\text{etc.}+mxh^{m-1}+h^m \quad (1)$$

Développée de la même manière la fonction $\log(x+h)$ donne

$$\log.(x+h)=\log.x+\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\text{etc.}$$

Cette série subsiste comme la précédente pour toute valeur de x supérieure à h.

44) Soit maintenant la fonction a^x à développer par la série de

(1) La formule (2) du N° 30 conduit immédiatement à ce résultat.

Maclaurin : on a $f^n(0)=(\log.\ a)^n$ et pour terme complémentaire

$$f^n(\theta x)=a^{\theta x}\frac{(\log.\ a)^n(x-a)^n}{1.2\ldots\ n}=a^{\theta x}.\left[\frac{(x-a)\log.a}{1}\right]\left[\frac{(x-a)\log.\ a}{n}\right]$$

$$\ldots\ldots\left[\frac{(x-a)\log\ a}{n}\right]$$

ce terme convergeant vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment, la série subsiste quelque soit x et l'on a toujours

$$a^x=1+x\log.\ a+\frac{x^2(\log.\ a)^2}{1.2}+\frac{x^3(\log.\ a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ (1)$$

Posons $a=e$ base du système des logarithmes Népériens : il vient $\log.\ a=\log.\ e=1$ et par conséquent

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

ou faisant $x=1$

$$e=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Veut-on déterminer pour cette dernière formule les limites de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant au terme du rang $n+1$, l'on remarque que les quantités désignées ci-dessus N° 33 par M et m sont les valeurs maxima et minima du rapport $\frac{f^n(x)-f^n(a)}{(x-a)^n}$ $=\frac{e^x-1}{x}$. La dérivée $\frac{d\frac{e^x-1}{x}}{dx}=\frac{1-(1-x)e^x}{x^2}$ restant toujours positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$ le rapport croit continuement

(1) La formule de Maclaurin n'est point applicable au développement de la fonction $a^{-\frac{1}{x}}$. On se rend compte de cette circonstance en observant que le symbole $a^{-\frac{1}{0}}$ exprime, non pas une valeur effective de la fonction $a^{-\frac{1}{x}}$, mais une limite que cette fonction ne peut jamais atteindre, bien qu'elle y tende indéfiniment à mesure que x converge vers zéro. Il y a donc solution de continuité, et il importe d'en faire la remarque, car autrement le fait que nous venons de signaler serait inexplicable.

dans cet intervalle. De là résulte

$$1°\text{ pour } x=1 \qquad M=e-1$$

$$2°\text{ pour } x=0 \qquad m=\frac{d(e^x-1)}{dx}=1$$

La différence entre ces deux expressions est $e-2$, il vient donc

$$e>2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}+\frac{1}{1.2...n}$$

$$e<2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}+\frac{1}{1.2...n}+\frac{e-2}{1.2...n}$$

c'est-à-dire

$$e<2+\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}+\frac{1}{1.2...n}\right]\frac{1.2...n}{(1.2...n)-1}$$

En faisant le calcul on trouve

$$e=2{,}718282...$$

Les mêmes considérations s'appliquent au développement en série des fonctions $\sin x$, $\cos x$. Bornons-nous à présenter le résultat.

$$\text{Sin}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2..5}-\text{etc.}$$

$$\text{Cos}x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.34}-\text{etc.}$$

Ces séries subsistent comme la précédente indépendamment de toute valeur particulière attribuée à la variable.

45) Soit en dernier lieu une fonction de plusieurs variables

$$u=F(x,y,z,....)$$

Pour ramener ce cas aux précédents il suffit de suivre la marche tracée N° 21 et 23 et de considérer chacune des variables x, y, z, etc. comme fonction d'une même variable indépendante liée aux premières par telles relations qu'on jugera à propos d'établir.

Prenons par exemple la fonction

$$z=F(x,y).$$

Si nous posons

$$x=\phi(t)$$

$$y=\psi(t)$$

il vient

$$z=f(t)$$

et développant par la série de Taylor

$$f(t+i)=f(t)+if'(t)+\frac{i^2}{1.2}f''(t)+\text{etc.}+\frac{i^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^{n-1}(t)$$
$$+\frac{i^n}{1.2....n}f^n(t+\theta i)$$

c'est-à-dire en désignant par h et k les accroissements $\Delta x=\varphi(t+i)-\varphi(t)$, $\Delta y=\psi(t+i)-\psi(t)$

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+if'(t)+\frac{i^2}{1.2}f''(t)+\text{etc.}$$

D'un autre côté l'on a généralement

$$f'(t)=\frac{dz}{\Delta x}\varphi'(t)+\frac{dz}{\Delta y}\psi'(t)$$
$$f''(t)=\frac{d^2z}{\Delta x^2}\varphi'(t)^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}\varphi'(t)\psi'(t)+\frac{d^2z}{\Delta y^2}\psi'(t)^2$$
$$+\frac{dz}{\Delta x}\varphi''(t)+\frac{dz}{\Delta y}\psi''(t)$$

et ainsi de suite.

Suppose-t-on, pour plus de simplicité, que les relations arbitraires $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ sont de la forme

$$x=at+m$$
$$y=bt+n$$

il en résulte

$$\varphi'(t)=a=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{h}{i},\qquad \varphi''(t)=0$$
$$\psi'(t)=b=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{k}{i},\qquad \psi''(t)=0$$

et substituant,

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+\frac{dz}{\Delta x}h+\frac{dz}{\Delta y}k+\frac{d^2z}{\Delta x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}hk$$
$$+\frac{d^2z}{\Delta y^2}\frac{k^2}{1.2}+\text{etc.}$$

On voit d'ailleurs que la série est ou non convergente suivant que le terme complémentaire $\frac{i^n}{1.2...n} f^n(t+\theta i)$ converge ou non vers zéro à mesure que n augmente.

Si pour les valeurs particulières attribuées aux variables x, y, les dérivées partielles $\frac{dz}{\Delta x}, \frac{dz}{\Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta x^2}, \frac{d^2z}{\Delta x \Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta y^2}$, etc., s'évanouissaient toutes à la fois jusqu'à celles de l'ordre n exclusivement, il viendrait

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=\frac{i^n}{1\cdot 2\cdots n} f^n(t+\theta i).$$

Cette formule comprend la théorie des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

Relation générale existant entre l'accroissement effectif de la fonction et ses accroissements différentiels de tous les ordres.

46) Désignons par $\Delta_1 x$ la partie de l'intervalle $\Delta_{x-1} x$ à laquelle répond la valeur moyenne de la dérivée $f'(x)$. Nous aurons, conformément au N° 29,

$$\Delta y=\Delta x\cdot f'(x)+\Delta x\cdot\Delta_1 x\cdot f''(x)+\Delta x\cdot\Delta_1 x\Delta_2 x\cdot f'''(x)+\text{etc.}$$

ou substituant aux fonctions dérivées les accroissements différentiels des ordres correspondants.

$$\Delta y=dy+\frac{\Delta_1 x}{\Delta x}\cdot d^2y+\frac{\Delta_1 x,\Delta_2 x}{\Delta x^2}\cdot d^3y+\text{etc.}$$

Soient d'ailleurs représentées par z_1, z_2, z_3, etc., les fractions $\frac{\Delta_1 x}{\Delta x_1}, \frac{\Delta_2 x}{\Delta x}, \frac{\Delta_3 x}{\Delta x}$, etc., lesquelles forment une suite indéfiniment décroissante, il viendra

$$\Delta y=dy+z_1 d^2y+z_1 z_2 d^3y+z_1 z_2 z_3 d^4y+\text{etc.}$$

En partant de cette formule et suivant les procédés de calcul du N° 30 on trouve en général

$$\Delta y=dy+\frac{d^2y}{1.2.}+\frac{d^3y}{1.2.3.}+\text{etc.}$$

Sous cette forme sont comprises les séries de Taylor et de Maclaurin, les variables engagées dans la fonction pouvant d'ailleurs être en nombre quelconque.

Lorsque la loi de génération de l'ordre n est constante, et que l'accroissement effectif Δy dépend exclusivement de cette loi, (la valeur particulière attribuée à la fonction rendant nuls les accroissements différentiels des ordres inférieurs) l'on trouve immédiatement (voir N° 30).

$$\Delta y = \frac{d^n y}{1.2...n}$$

A notre point de vue, ce principe suffit pour que l'on puisse en conclure généralement, et sans autre intermédiaire que l'application directe de notre conception fondamentale,

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \frac{d^3 y}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La série ne peut d'ailleurs être en défaut que s'il y a discontinuité.

Suppose-t-on que l'un quelconque des accroissements différentiels, prenne accidentellement la forme symbolique $\frac{1}{0}$. Cette circonstance indique que l'accroissement dont il s'agit n'est susceptible d'aucune détermination. On conçoit dès lors l'impossibilité de poursuivre le développement sans le modifier.

Maxima et minima des fonctions d'une ou plusieurs variables.

47) Toute valeur particulière d'une fonction est dite *minima* lorsque la fonction *supposée continuement variable*, ne peut changer sans commencer par croître. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque la valeur de la fonction ne peut changer sans qu'il y ait d'abord décroissance, cette valeur est dite *maxima*.

Nous avons vu qu'une fonction quelconque peut toujours être considérée comme fonction d'une seule variable indépendante. Dès lors les principes des N^{os} 25 et 29 montrent suffisamment quel est en général le procédé à suivre pour déterminer les valeurs de la variable susceptibles de rendre la fonction maxima ou minima. Ce procédé consiste à chercher les valeurs particulières qui annulent la dérivée du premier ordre, puis à les substituer dans les

dérivées successives, en s'arrêtant pour chacune de ces valeurs à la première des dérivées qu'elle ne fait pas évanouir. On sait d'ailleurs comment le rang et le signe de cette dérivée indiquent la marche de la fonction à partir de la valeur que l'on considère.

Soit pour exemple une fonction de deux variables,

$$z=\mathrm{F}(x,y)$$

En opérant comme au N° 45 on doit poser

$$f'(t)=\frac{dz}{\Delta x}\varphi'(t)+\frac{dz}{\Delta y}\psi'(t)=0$$

Or il faut que cette relation subsiste indépendamment de toute détermination des fonctions arbitraires, $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Il en résulte donc

$$\frac{dz}{\Delta x}=0, \qquad \frac{dz}{\Delta y}=0. \tag{1}$$

Les valeurs de x et y qui satisfont à la fois à ces deux équations devant être substituées dans les dérivées successives $f''(t)$, $f'''(t)$, etc., il vient d'abord.

$$f''(t)=\frac{d^2z}{\Delta x^2}\cdot\varphi''(t)^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}\varphi'(t)\psi'(t)+\frac{d^2z}{\Delta y^2}\psi'(t)^2.$$

Observons que la dérivée seconde $f''(t)$ se présente ici sous une forme particulière. Cette forme est précisément celle qu'elle affecte en général, lorsque disposant jusqu'à un certain point des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, on les suppose toutes deux linéaires. La même simplification se reproduirait pour la dérivée troisième $f'''(t)$, si les valeurs déduites des équations de condition (1), annulaient les dérivées partielles $\frac{d^2z}{\Delta x^2}$, $\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}$, $\frac{d^2z}{\Delta y^2}$, et ainsi de suite pour toutes les dérivées successives.

Cela posé, l'on voit qu'en ce qui concerne les substitutions à faire dans la suite de ces dérivées, il est permis de supprimer d'avance les termes où figurent les coefficients différentiels $\varphi''(t)$, $\psi''(t)$, $\varphi'''(t)$, $\psi'''(t)$, etc. Si la suppression est permise, en même temps que la substitution devient nécessaire, c'est parce que chacun de ces coefficients se trouve affecté d'un facteur qui s'évanouit et non parce qu'*on dispose en aucune façon*, des fonctions *arbitraires* $\varphi(t)$, $\psi(t)$. On arrive, au même résultat, lorsqu'on traite

à priori les dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ comme des quantités constantes, et tel est le point de vue auquel on se place habituellement. Mais procéder ainsi c'est dépouiller la solution de la généralité qu'elle comporte. Il paraît donc préférable de suivre la marche que nous venons d'indiquer.

Nous nous écarterions de notre but si nous insistions davantage sur la question des maxima et minima. Observons toutefois que la circonstance, qui rend maxima ou minima une valeur de la fonction, consiste *essentiellement* dans le changement de signe subi par la fonction dérivée. En général la dérivée est continue et dès lors elle ne peut changer de signe qu'en s'évanouissant. Il en est autrement, lorsqu'il y a discontinuité. On conçoit donc qu'il ne faut pas s'arrêter exclusivement à la solution

$$f'(t)=0$$

Il convient aussi d'écrire

$$\frac{1}{f'(t)}=0$$

et de voir, pour toute valeur finie qui satisferait à cette équation, si elle correspond, ou non, à un changement de signe de la dérivée.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Principes fondamentaux.

48) 1° La différentielle n'est qu'*une différence ordinaire*, prise dans une certaine hypothèse. Elle exprime ce que devient l'accroissement de la fonction, lorsque, considérant la loi qui en régit la génération initiale, l'on suppose que cette loi se développe en demeurant permanente.

2° Soit, un mode quelconque de génération, et une grandeur représentée numériquement par c.

Si, pour *toute* valeur *constante* affectée par cette grandeur, l'on a

$$\Delta y = c\Delta x.$$

Il en résulte *immédiatement* et *avec plus de généralité*,

$$dy = cdx$$

le mode de génération restant le même, et la grandeur c pouvant être ou *constante* ou bien *continuement variable*, dans l'intervalle que l'on considère.

Tangentes et plan tangent.

49) La tangente à une courbe, en un point donné, est la droite qui fixe, pour ce point, la direction suivant laquelle il y a continuité sur la courbe.

Deux lignes se touchent lorsqu'elles ont, en un point commun, même direction tangentielle.

Le système des axes coordonnés étant rectangulaire ou oblique, soit d'abord une courbe plane,

$$y = f(x)$$

L'équation différentielle

$$dy = f'(x_0)dx$$

est, *en différences ordinaires*, l'équation d'une ligne qui touche

la courbe $y=f(x)$ au point x_0, y_0. Cela résulte de ce qu'en supposant permanente la loi de générationu des grandeurs $\Delta y, \Delta x$, l'on n'altère point la direction suivant laquelle la continuité s'établit à l'origine de ces accroissements.

Considérant cette ligne, et substituant aux différentielles les différences qu'elles expriment, il vient

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

c'est-à-dire l'équation d'une droite. La ligne, dont il s'agit, est donc la tangente elle-même.

Soit ensuite une courbe quelconque dans l'espace

$$x=\Phi(z), \qquad y=\psi(z)$$

les mêmes considérations donnent pour les équations de la tangente au point x_0, y_0, z_0,

$$dx=\Phi'(z_0)dz, \qquad dy=\psi'(z_0)dz$$

c'est-à-dire

$$x-x_0=\Phi'(z_0)(z-z_0), \qquad y-y_0=\psi'(z_0)(z-z_0).$$

Tout accroissement effectif, pris par rapport à la tangente est accroissement différentiel par rapport à la courbe. Si donc on désigne par s la longueur d'un arc mesuré sur la courbe et par α, β, γ les angles que la tangente fait avec les axes coordonnés, *supposés rectangulaires*, il vient en vertu des propriétés de la droite

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$\operatorname{Cos}\alpha=\frac{dx}{ds}$$

$$\operatorname{Cos}\beta=\frac{dy}{ds}$$

$$\operatorname{Cos}\gamma=\frac{dz}{ds}$$

Les résultats, que nous venons d'obtenir, s'établissent, avec une égale facilité, lorsqu'on se fonde sur le principe (2) du N° 48.

En effet, toute courbe pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement d'un point dans l'espace, il y a lieu d'observer qu'un élément variable concourt à cette génération. C'est, pour chaque position du point générateur, la direction suivant laquelle le déplacement commence. Supposons d'abord cette direction quel-

conque, mais constante ; la ligne engendrée est droite et l'on a

$$\Delta x=\Delta s\cdot\cos\alpha,\quad \Delta y=\Delta s\cdot\cos\beta,\quad \Delta z=\Delta s\cdot\cos\gamma.$$

Suppose-t-on maintenant la direction continuement variable d'une position à une autre, il suffit de changer la caractéristique. Il vient donc en ce cas

$$dx=ds\cdot\cos\alpha,\quad dy=ds\cdot\cos\beta,\quad dz=ds\cdot\cos\gamma.$$
$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

50) Soit une surface,

$$u=\mathrm{F}(x,y,z,)=0.$$

et sur cette surface un point quelconque x_0, y_0, z_0. Il est un lieu géométrique déterminé par l'ensemble infini des directions suivant lesquelles à partir de ce point il y a continuité sur la surface. Quelque soit ce lieu, il reste le même, lorsque, supposant permanente la loi de génération des grandeurs $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, l'on substitue à la surface donnée celle qui a pour équation,

$$\frac{du_0}{\Delta x_0}dx+\frac{du_0}{\Delta y_0}dy+\frac{du_0}{\Delta z_0}dz=0$$

c'est-à-dire

$$(x-x_0)\frac{du_0}{\Delta x_0}+(y-y_0)\frac{du_0}{\Delta y_0}+(z-z_0)\frac{du_0}{\Delta z_0}=0$$

Or cette équation appartient à un plan. Elle exprime donc le lieu géométrique lui-même. On le nomme plan tangent.

Considérons tant de courbes qu'on voudra, tracées sur la surface et passant par le point de contact du plan tangent. A partir de ce point la continuité s'établit, pour chaque courbe, suivant la direction fournie par la tangente. Lieu géométrique de ces directions, le plan tangent contient toutes les tangentes. (1)

---

(1) Etant donné un point sur une droite, imaginons que ce point se déplace suivant une direction quelconque, *normale* à la droite. Pris à son origine, le déplacement dont il s'agit peut toujours être considéré comme s'effectuant, *par rotation*, autour d'un point, choisi comme on voudra sur la droite donnée. On a donc

$$d[(x-t)^2+(y-u)^2+(z-v)^2]=0$$

x, y, z étant les coordonnées du point mobile et t, u, v, celles du centre de rotation, *supposé fixe*.

Courbure et rayon de courbure dans les courbes planes.

51) Lorsque la continuité s'établit sur une courbe, c'est suivant une direction déterminée pour chaque point. Si la direction persistait d'un point à un autre, la ligne serait droite. En général la direction ne persiste pas et elle varie avec continuité. De là nait la courbure. On voit ainsi comment la courbure résulte des modifications continues subies par la direction tangentielle.

Soit ω l'angle qu'une tangente à la courbe $y=f(x)$, fait avec l'axe des abcisses : l'on a

$$\omega=\text{arc. tang. } f'(x).$$

et différenciant

$$d\omega=\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}dx$$

ou remplaçant dx par sa valeur $\dfrac{ds}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$

$$d\omega=\frac{f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}}ds \qquad (I)$$

Cela posé, si l'on rend permanente à partir du point x_0, y_0, la loi qui régit la génération simultanée des accroissements angulaires et arcuels, l'on n'altère pas la courbure en ce point. Or, dans cette hypothèse, les différentielles ne sont plus que des différences ordinaires. Il vient donc pour équation de la ligne qui résulte du développement continu de la loi de génération, supposée permanente à partir du point x_0, y_0,

$$\Delta\omega=\frac{f''(x_0)}{\left[1+f'(x_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Delta s.$$

S'agit-il d'ailleurs du lieu géométrique déterminé par l'ensemble des points susceptibles d'être pris pour centres de rotation, il vient immédiatement,

$$(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=0$$

t, u, v étant les coordonnées courantes.

De là, les équations des normales et plans normaux.

ou posant $$\rho_0 = \frac{\left[1+f'(x_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$$

$$\Delta s = \rho_0 \Delta x.$$

La ligne représentée par cette équation est évidemment une circonférence de cercle ayant ρ_0 pour rayon. Elle a en tous ses points même courbure et cette courbure est celle de la courbe donnée au point x_0, y_0.

Le cercle ainsi déterminé prend, par rapport à la courbe, et pour le point que l'on considère, le nom de cercle osculateur. Le rayon de ce cercle a pour expression générale,

$$\rho = \frac{\left(1+f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

On le nomme rayon de courbure.

52) On voit d'après ce qui précède que le changement de direction, *pris à son origine*, s'effectue sur la courbe de la même manière qu'en un point quelconque du cercle osculateur. On voit également que, si plusieurs courbes ont en un point commun même tangente, et que les dérivées du second ordre affectent même valeur particulière, ces courbes ont en ce point même courbure. Cette dernière conséquence peut s'établir directement et à priori. Il est clair en effet que, pour une même valeur attribuée à la direction tangentielle, le changement, que cette direction subit à l'origine des accroissements, reste le même, soit que l'on considère la courbe $y=f(x)$, soit qu'on lui substitue la ligne qui a pour équation

$$df'(x) = f''(x_0) \cdot dx \cdot = c \cdot dx.$$

Il suit de là, qu'étant donné l'équation générale du cercle

$$(x-t)^2+(y-u)^2 = \rho^2$$

et par suite les équations différentielles

$$x-t+(y-u)\frac{dy}{\Delta x} = 0 \qquad (1)$$

$$1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2+(y-u)\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0 \qquad (2)$$

si l'on veut que ce cercle soit osculateur à la courbe $y=f(x)$ au point x_0, y_0, il suffit de poser dans ces trois équations; $y=y_0$, $x=x_0$, $\frac{dy}{\Delta x} = f'(x_0)$, $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = f''(x_0)$. En opérant de cette ma-

nière, on retombe sur l'expression déjà trouvée pour le rayon de courbure. On a d'ailleurs pour les coordonnées du centre, (1)

$$u=y_0+\frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}, \quad t=x_0-\frac{f'(x_0)(1+f'(x_0)^2)}{f''(x_0)}$$

Enveloppes et développées planes.

53) Soit l'équation

$$y=ax-\Phi(a). \tag{1}$$

dans laquelle le paramètre a est supposé continuement variable. A chaque valeur affectée par ce paramètre répond une droite déterminée. Considérons l'une quelconque de ces droites, la droite (1) par exemple, et *prenant à son origine* le déplacement qu'elle subit lorsqu'on fait varier a, imaginons que ce déplacement *soit continué* suivant le mode particulier qui le régit *alors qu'il commence.* Cela revient à *supposer permanente* la loi de génération des grandeurs Δa, $\Delta\Phi(a)$. Si donc il s'agit, *dans cette hypothèse*, d'une seconde position *quelconque* de la droite mobile c'est en substituant aux différences Δa, $\Delta\Phi(a)$ les différentielles da, $d\Phi(a)$, qu'on obtiendra l'équation de la droite dans cette position. Il vient ainsi,

$$y=ax-\Phi(a)+[x-\Phi'(a)]da. \tag{2}$$

Cela posé, quelle que soit celle des droites représentées par l'équation (2) que l'on veuille considérer, il est visible qu'elle coupe la droite (1) en un point qui reste toujours le même et dont les coordonnées sont respectivement

$$x=\Phi'(a) \tag{3}$$
$$y=a\Phi'(a)-\Phi(a) \tag{4}$$

c'est donc, *en tournant autour de ce point* que *commence* le déplacement de la droite (1). Chaque position de cette droite fournit ainsi un centre de rotation. Le lieu de ces centres est en général

---

(1) Interprétées *directement et à priori*, les équations (1) et (2) expriment, l'une, que le point (t,u) est pris sur la normale, l'autre, que ce point reste *fixe*, lorsque le changement de direction tangentielle est *continué* d'après le mode qui le régit *alors qu'il commence.*

une courbe. On en obtient l'équation en éliminant a entre les relations (3) et (4).

La courbe, dont il s'agit, étant représentée par l'équation (4) dans laquelle a est une fonction de x déterminée par la relation (3), l'on a en différenciant,

$$dx = \varphi''(a)da$$
$$dy = a\varphi''(a)da$$

De là résulte pour l'équation de la tangente au point (3)(4)

$$dy = a\,dx$$

c'est-à-dire

$$y - a\varphi'(a) + \varphi(a) = a(x - \varphi'(a))$$

ou réduisant

$$y = ax - \varphi(a).$$

Cette tangente n'est donc autre chose que la droite (1) elle même.

Il suit de là que chacune des droites représentées par l'équation (1). touche le lieu des centres. Par ce motif, on donne en général à ce lieu le nom d'*enveloppe*.

L'équation (1) exprimant un système quelconque de droites assujetties à une loi de succession continue, supposons, comme cas particulier, que ce système soit celui des normales à la courbe $y = f(x)$. En ce cas, le changement de direction, *pris à son origine*, s'effectue sur la courbe de la même manière que sur le cercle osculateur. C'est donc en tournant autour du centre de ce cercle que *commence* le déplacement de chaque normale, et l'*enveloppe* des normales est le lieu des centres de courbure.

Veut-on vérifier par le calcul la déduction précédente, l'on doit poser

$$a = -\frac{1}{f'(x)}, \qquad \varphi(x) = -\frac{x}{f'(x)} - y$$

d'où différenciant,

$$\frac{dx}{da} = \frac{f'(x)^2}{f''(x)}.$$
$$\varphi'(a) = x - \frac{f'(x)(1 + f'(x))}{f''(x)}$$

et par suite

$$a\Phi'(a)-\Phi(a)=y+\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$$

Les valeurs, que l'on obtient ainsi pour $\Phi'(a)$ et $a\Phi'(a)-\Phi(a)$, coincident avec celles que nous avons trouvées N° 52 pour les coordonnées du centre de courbure. Il est donc vérifié que le lieu de ces centres est l'enveloppe des normales.

54) Reprenons les équations du N° 52.

$$(x-t)^2+(y-u)^2=\rho^2 \qquad (1)$$

$$(x-t)+(y-u)f'(x)=0 \qquad (2)$$

$$1+f'(x)^2+(y-u)f''(x)=0 \qquad (3)$$

et rappelons nous qu'il suffit d'attribuer aux variables, x, y, les valeurs qu'elles affectent en un point quelconque de la courbe $y=f(x)$, pour qu'en ce point le cercle osculateur se trouve déterminé, 1° par son rayon ρ; 2° par les coordonnées de son centre u et t.

Les équations (1) (2) (3) subsistant avec cette même signification pour tous les points de la courbe $y=f(x)$, l'on peut les considérer indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux variables x, y. En ce cas, les quantités ρ, t, u, sont fonction de ces variables et si l'on différencie les équations (1) et (2), il vient, eu égard aux réductions que les équations (2) et (3) permettent d'effectuer :

$$(x-t)dt+(y-u)du=\rho d\rho \qquad (4)$$

$$dt+f'(x)\cdot du=0. \qquad (5)$$

L'équation (5) exprime que la tangente au lieu des centres de courbure est normale à la courbe donnée. Soit ω l'angle que cette tangente fait avec l'axe des abscisses, on a

$$\frac{x-t}{\rho}=\cos\omega=\frac{dt}{d\sigma}$$

$$\frac{y-u}{\rho}=\sin\omega=\frac{du}{d\sigma}$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (4).

$$d\sigma=d\rho.$$

La loi qui régit la génération simultanée des différences $\Delta\sigma$, $\Delta\rho$ est constante : il vient donc aussi

$$\Delta\sigma=\Delta\rho$$

Ce résultat montre qu'une courbe quelconque peut être décrite par l'extrémité d'un fil inextensible, qui serait enroulé sur le lieu des centres de courbure et qu'on développerait progressivement. De là le nom de *développée* par lequel on exprime plus particulièrement l'*enveloppe* des normales et celui de *développante* donnée à la courbe par raison de réciprocité.

Détermination du mode suivant lequel commence *en général* (1) *tout déplacement d'une droite ou d'un plan.*

(GÉNÉRATION DES SURFACES RÉGLÉES, GAUCHES OU DÉVELOPPABLES).

55) Soit les équations générales

$$\left.\begin{aligned} x &= az+h \\ y &= bz+i \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

dans lesquelles les quantités a, b, h, i sont fonction d'une même variable γ. A chaque valeur affectée par γ répond dans l'espace une droite déterminée. Considérons l'une quelconque de ces droites, la droite (1), par exemple, et prenant à son origine le déplacement qu'elle subit lorsqu'on fait varier γ, imaginons que ce déplacement *persiste* suivant le mode particulier qui le régit *alors qu'il commence*. Cela revient à supposer permanente la loi de génération des grandeurs Δa, Δb, Δh, Δi. Si donc il s'agit *dans cette hypothèse*, d'une seconde position quelconque de la droite mobile, c'est en substituant à ces différences, les différentielles da, db, dh, di, qu'on obtiendra les équations de la droite dans cette position. Il vient ainsi

$$\left.\begin{aligned} x &= az+h+zda+dh \\ y &= bz+i+zdb+di \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(1) Nous laissons de côté le cas où le déplacement s'effectue sans qu'il y ait changement de direction.

La comparaison des équations (1), (2) donne lieu aux remarques suivantes :

1° Lorsque l'on a

$$\frac{dh}{da}=\frac{di}{db} \qquad (3)$$

la droite (1) est coupé en un seul et même point par chacune des droites représentées en nombre infini par les équations (2). Ce point a pour ordonnée

$$z=-\frac{dh}{da}=-\frac{di}{db}.$$

2° Suppose-t-on

$$\frac{dh}{da} \begin{matrix} > \\ \text{ou} \\ < \end{matrix} \frac{di}{db}$$

les droites (1), (2) ne se rencontrent pas.

3° Étant donné le plan

$$Ax+By+Cz=k$$

dont la direction se trouve complètement fixée par les équations de condition

$$\left.\begin{aligned} Aa+Bb+C&=0 \\ Ada+Bdb&=0. \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

les droites (2) sont toutes ainsi que la droite (1) parallèles à ce plan.

Il suit de là qu'à l'origine de tout déplacement la droite (1) peut subir deux conditions différentes, *les rapports* $\frac{dh}{da}, \frac{di}{db}$ *affectant ou non la même valeur particulière.*

Dans le premier cas, le déplacement s'effectue suivant un seul et même plan déterminé. Dans le second cas, la droite s'écarte de ce plan, en lui demeurant parallèle.

La droite (1), considérée dans l'ensemble infini des positions qu'elle peut prendre, a pour lieu géométrique une surface réglée. Si la condition (3) est remplie indépendamment de toute valeur attribuée à la variable γ, il n'existe pour tous les points situés sur une même génératrice rectiligne qu'un seul et même plan tangent, et la surface est dite *développable.* Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, la surface est gauche.

50) Soit l'équation

$$Ax+By+Cz=k. \qquad (1)$$

dans laquelle les quantités A, B, C, k, sont fonction d'une même variable γ. A chaque valeur attribuée à cette variable répond dans l'espace un plan déterminé. Considérons l'un quelconque de ces plans, le plan (1) par exemple, et prenant à son origine le déplacement qu'il subit lorsqu'on fait varier γ, imaginons que ce déplacement *soit continué* suivant le mode particulier qui le régit *alors qu'il commence*. Cela revient à supposer permanente la loi de génération des grandeurs ΔA, ΔB, ΔC, Δk. Si donc il s'agit, *dans cette hypothèse* d'une seconde position quelconque du plan mobile, c'est en substituant à ces différences les différentielles dA, dB, dC, dk, qu'on obtiendra l'équation du plan dans cette position. On trouve ainsi

$$Ax+By+Cz+xdA+ydB+zdC=k+dk. \qquad (2)$$

Cela posé, quelque soit celui des plans représentés par l'équation (2) que l'on veuille considérer, il est visible qu'il coupe le plan (1) suivant une droite qui reste constamment la même et qui a pour équations générales

$$Ax+By+Cz=k \qquad (3)$$

$$xdA+ydB+zdC=dk. \qquad (4)$$

C'est donc en tournant autour de cette droite que commence le déplacement du plan (1). Chaque position de ce plan fournit ainsi un axe de rotation. Le lieu de ces axes est une surface dont l'équation s'obtient en éliminant γ entre les relations (3) et (4).

La surface, dont il s'agit, étant représentée par l'équation (3) dans laquelle γ est une fonction de x, y, z, déterminée par la relation (4), la différenciation donne pour équation du plan tangent à cette surface

$$Adx+Bdy+Cdz=0.$$

c'est-à-dire

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0$$

Or si le point (x, y, z) est pris sur la droite (3), (4), cette équation devient

$$At+Bu+Cv=k.$$

C'est donc suivant le plan (1) que la continuité s'établit sur la surface pour chacun des points de la génératrice rectiligne située dans ce plan.

Tel est le mode de génération et le caractère distinctif des surfaces développables.

57) Reprenons les équations de la génératrice

$$Ax+By+Cz=k.$$
$$xdA+ydB+zdC=dk.$$

Si nous appliquons les considérations du N° 55 et que nous nous proposions de déterminer le point autour duquel s'effectue par rotation le déplacement initial de cette génératrice, il suffit de joindre aux équations précédentes la relation

$$xd^2A+yd^2B+zd^2C=d^2k.$$

L'ensemble de ces trois équations représente l'enveloppe des génératrices rectilignes, laquelle prend, par rapport à la surface développable, le nom d'*arête de rebroussement.*

58) Soit $z=F(x,y)$ l'équation d'une surface développable. Posons pour simplifier $p=\frac{dz}{\Delta x}, q=\frac{dz}{\Delta y}, r=\frac{d^2z}{\Delta x^2}, s=\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}, t=\frac{d^2z}{\Delta y^2}$.

Le plan tangent

$$dz=pdx+qdy$$

reste le même le long d'une génératrice. On a donc *pour tous les points* situés sur une même génératrice quelconque,

$$p=\text{Cons}^{te}., \qquad q=\text{Cons}^{te}.$$

et par suite

$$dp=rdx+sdy=0$$
$$dq=sdx+tdy=0.$$

De là résulte :

1° Pour équation d'une génératrice quelconque projetée dans le plan des xy, ou ce qui revient au même, pour équation différentielle de la projection de l'arête de rebroussement

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{r}{s}=-\frac{s}{t}.$$

2° Pour équation de condition, caractérisant toute surface développable

$$rt-s^2=0.$$

Courbes à double courbure.

PLAN OSCULATEUR.

59) Considérons comme application particulière de la théorie exposée au N° 53 le système des tangentes à la courbe

$$x=\varphi(z), \qquad y=\psi(z).$$

Si l'on désigne par t, u, v, les coordonnées courantes et par x, y, z celles du point de contact, il vient pour équations générales d'une tangente quelconque

$$t=v\frac{dx}{dz}+x-z\frac{dx}{dz}$$
$$u=v\frac{dy}{dz}+y-z\frac{dy}{dz}$$

L'on doit poser en conséquence

$$a=\frac{dx}{dz}, \qquad h=x-z\frac{dx}{dz}, \qquad b=\frac{dy}{dz}, \qquad i=y-z\frac{dy}{dz}.$$

d'où différenciant

$$da=d\cdot\frac{dx}{dz}, \quad dh=-z\cdot d\cdot\frac{dx}{dz}, \quad db=d\cdot\frac{dy}{dz}, \quad di=-zd\cdot\frac{dy}{dz}.$$

On a donc en ce cas,

$$\frac{dh}{da}=\frac{di}{db}=-z.$$

De là résultent les principes suivants :

1° *C'est par rotation autour de son point de contact que commence le déplacement de la tangente.*

2° *Pris à son origine, et continué suivant le mode qui le régit alors qu'il commence, le changement de direction tangentielle s'effectue suivant un plan déterminé.*

3° Le lieu géométrique des tangentes est une surface développable. Ajoutons, comme conséquences subsidiaires, que, dans le

développement de cette surface, la courbe donnée conserve en chaque point sa courbure et que toute trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes a, pour développée, l'enveloppe de ces génératrices, c'est-à-dire la courbe que l'on considère.

Cela posé l'on nomme *plan osculateur* le plan suivant lequel commence le changement de direction tangentielle.

Soit

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0$$

l'équation de ce plan. On a pour fixer sa direction les équations de condition (4) du N° 55. Il vient donc,

$$Adx+Bdy+Cdz=0$$
$$Ad.\frac{dx}{dz}+Bd.\frac{dy}{dz}=0.$$

ces relations donnent

$$\frac{A}{B}=-\frac{d.\frac{dy}{dz}}{d.\frac{dx}{dz}},\quad \frac{C}{B}=-\frac{dy}{dz}+\frac{dx}{dz}\,\frac{d.\frac{dy}{dz}}{d.\frac{dx}{dz}}$$

d'où substituant dans l'équation du plan osculateur et réduisant

$$(t-x)(dzd^2y-dyd^2z)+(u-y)(dxd^2z-dzd^2x)$$
$$+(v-z)(dyd^2x-dxd^2y)=0.$$

On arrive directement au même résultat lorsqu'étant donné trois points qui ont pour coordonnées respectives

$$\text{Le 1}^{\text{er}}.\left\{\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\},\ \text{le 2}^{\text{me}}.\left\{\begin{matrix}x+dx\\y+dy\\z+dz\end{matrix}\right\},\ \text{le 3}^{\text{me}}.\left\{\begin{matrix}x+2dx+d^2x\\y+2dy+d^2y\\z+2dz+d^2z\end{matrix}\right\}$$

ou plus généralement

$$\text{Le 1}^{\text{er}}.\left\{\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\},\ \text{le 2}^{\text{me}}.\left\{\begin{matrix}x+mdx\\y+mdy\\z+mdz\end{matrix}\right\},\ \text{le 3}^{\text{me}}.\left\{\begin{matrix}x+ndx+pd^2x\\y+ndy+pd^2y\\z+ndz+pd^2z\end{matrix}\right\}$$

l'on assujettit un plan à contenir ces trois points.

En effet l'on a d'abord

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0$$

il vient ensuite

$$Adx+Bdy+Cdz=0 \qquad (1)$$
$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0 \qquad (2)$$

et l'élimination conduit à la même équation finale.

Lorsqu'on opère ainsi, voici quelle est en réalité le sens du procédé qu'on emploie.

Le premier point est sur la courbe, le second sur la tangente, le troisième dans le plan osculateur. La position de ces points est *d'ailleurs* tout-à-fait arbitraire et leurs distances *si petites* ou *si grandes* qu'on voudra.

Cette explication donnée, l'on observera qu'il est plus simple de poser immédiatement les équations (1) et (2) sans recourir à la considération auxiliaire des trois points. En effet l'équation (1), prise isolément, exprime que le plan est parallèle à la tangente, et, combinée avec l'équation (2), qu'il ne cesse pas de lui être parallèle lorsque le changement de direction persiste suivant le mode qui le régit à son origine.

68) La normale située dans le plan osculateur est dite normale principale. Pour obtenir ses équations, il suffit de joindre à l'équation du plan osculateur, celle du plan normal.

$$(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=0$$

Veut-on d'ailleurs ramener ces équations à la forme ordinaire on trouve par leur combinaison

$$t-x=\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{d\cdot\frac{dz}{ds}}(v-z)=\frac{dsd^2x-dxd^2s}{dsd^2z-dzd^2s}(v-z)$$

$$u-y=\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{d\cdot\frac{dz}{ds}}(v-z)=\frac{dsd^2y-dyd^2s}{dsd^2z-dzd^2s}(v-z)$$

Soit λ, μ, ν, les angles que la normale principale fait avec les axes coordonnés, on a d'abord

$$\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{1}{ds^2}[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]$$

et par suite

$$\text{Cos}\,\lambda=\frac{ds\ d\cdot\frac{dx}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)-(d^2s)^2}},$$

$$\text{Cos}\,\mu=\frac{ds\cdot d\cdot\frac{dy}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}},$$

$$\text{Cos}\,\nu=\frac{ds\cdot d\cdot\frac{dz}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

61) Les principes établis N° 56 montrent suffisamment que c'est en commençant par tourner autour de la tangente que le plan osculateur se déplace sur la courbe. On peut d'ailleurs vérifier cette déduction en observant que les équations (3) et (4) du N° 56 deviennent en ce cas,

$$\begin{aligned}&(t-x)(dzd^2y-dyd^2z)+(u-y)(dxd^2z-dzd^2x)\\&+(v-z)(dyd^2x-dxd^2y)=0.\\&(t-x)(dzd^3y-dyd^3z)+(u-y)(dxd^3z-dzd^3x)\\&+(v-z)(dyd^3x-dxd^3y)=0\end{aligned}$$

et sont toutes deux satisfaites, lorsque l'on y pose : $t=x+dx$, $u=y+dy$, $v=z+dz$.

Il suit de là que la surface, lieu géométrique des diverses positions successivement affectées par la normale principale, est en général une surface gauche. Pour qu'il en fut autrement, il faudrait que le plan osculateur demeurat invariable. Cette dernière circonstance ne peut se présenter que dans les courbes planes, alors que l'on a

1° $$d\cdot\frac{dxd^2z-dzd^2x}{dzd^2y-dyd^2z}=0$$

2° $$d\cdot\frac{dyd^2z-dzd^2y}{dzd^2y-dyd^2z}=0$$

3° $$d\left[x+y\frac{dxd^2z-dzd^2y}{dzd^2y-dyd^2z}+z\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dzd^2y-dyd^2z}\right]=0$$

ou plus simplement, et ce qui revient au même

$$dz[d^2xd^3y-d^2yd^3x]+dy[d^2zd^3x-d^2xd^3z]+dx[d^2yd^3z-d^2zd^3y]=0.$$

Rayons de 1re et 2me courbure.

62) Pris à son origine, le changement de direction tangentielle s'effectue dans le plan osculateur. De là résulte une première courbure. D'un autre côté, si la courbe n'est point plane, il y a déplacement continu du plan osculateur et c'est par rotation autour de la tangente que ce plan change incessamment de direction dans l'espace. De là, une sorte de torsion nommée deuxième courbure. Cette deuxième courbure peut, ainsi que la première demeurer constante, ou bien varier d'un point à un autre. Dans tous les cas si l'on représente par $\Delta\omega'$ l'angle de deux plans osculateurs qui correspondent respectivement aux deux tangentes dont l'angle est $\Delta\omega$, il est évident que, la première courbure étant mesurée par le rapport $\frac{d\omega}{ds}=\frac{1}{\rho}$, la deuxième pourra l'être par le rapport $\frac{d\omega'}{ds}=\frac{1}{\rho'}$. On observera seulement que dans ce cas les accroissements différentiels $d\omega$, $d\omega'$ sont pris nécessairement à partir des valeurs particulières $\omega=0$, $\omega'=0$.

Lorsque les deux courbures sont constantes en chaque point, la courbe est telle que deux arcs quelconques égaux en longueur sont toujours superposables. Cette condition suffit pour fixer la nature de la ligne dont il s'agit. En effet, ce ne peut être qu'une hélice, offrant comme cas extrêmes le cercle et la droite.

Cherchons l'expression générale des rayons ρ, ρ', de première et deuxième courbure.

Soit ω l'angle de deux droites, l'une fixe et faisant avec les axes coordonnées les angles α, ε, γ; l'autre de direction variable et faisant avec les mêmes axes les angles α', ε', γ'. L'on a

$$\cos\omega=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\varepsilon\cos\varepsilon'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

d'où différenciant

$$d\omega=-\frac{\cos\alpha.d\cos\alpha'+\cos\varepsilon.d\cos\varepsilon'+\cos\gamma.d\cos\gamma'}{\sin\omega.}$$

Le changement de direction que l'on considère devant être pris à son origine, c'est-à-dire lorsque commence la génération de l'angle ω, l'on doit poser dans cette équation,

$$\alpha'=\alpha, \qquad \varepsilon'=\varepsilon, \qquad \gamma'=\gamma. \qquad \omega=0.$$

mais il vient alors

$$d\omega = \frac{0}{0}$$

Il faut donc appliquer la règle du N° 38. On trouve ainsi

$$(d\omega)^2 = -[\cos\alpha . d^2\cos\alpha + \cos\mathcal{E} . d^2\cos\mathcal{E} + \cos\gamma . d^2\cos\gamma]$$

On a d'ailleurs

$$\cos\alpha . d\cos\alpha + \cos\mathcal{E} . d\cos\mathcal{E} + \cos\gamma . d\cos\gamma = 0$$

d'où résulte

$$\cos\alpha . d^2\cos\alpha + \cos\mathcal{E} . d^2\cos\mathcal{E} + \cos\gamma . d^2\cos\gamma = -[(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\mathcal{E})^2 + (d\cos\gamma)^2]$$

il vient donc aussi et plus simplement,

$$(d\omega)^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\mathcal{E})^2 + (d\cos\gamma)^2 \qquad (1)$$

Pour passer de ce cas à celui où la direction de la droite est fixée soit par ses projections,

$$t - x = \frac{a}{c}(v - z)$$

$$u - y = \frac{b}{c}(v - z)$$

soit par l'équation du plan normal,

$$a(t-x) + b(u-y) + c(v-z) = 0.$$

il suffit de poser

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \cos\mathcal{E} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ce qui donne immédiatement,

$$(d\omega)^2 = \frac{(da)^2 + (db)^2 + (dc)^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{(ada + bdb + cdc)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

et après réduction,

$$(d\omega) = \frac{(adb - bda)^2 + (adc - cda)^2 + (bdc - cdb)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \qquad (2).$$

Les formules (1) et (2) permettent de résoudre aisément la question proposée.

S'agit-il d'abord du rayon ρ de première courbure, on posera $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$, $\cos\beta=\frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma=\frac{dz}{ds}$, ou bien $a=dx$, $b=dy$, $c=dz$. Il vient ainsi

$$\rho=\frac{ds}{d\omega}=\frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

$$=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

ou faisant usage de la formule (2)

$$\rho=\frac{ds}{d\omega}=\frac{ds^3}{\sqrt{(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2}}$$

S'agit-il ensuite du rayon ρ' de deuxième courbure : on fera,

$$a=dyd^2z-dzd^2y,\quad b=dzd^2x-dxd^2z,\quad c=dxd^2y-dyd^2x$$

et observant que l'on a,

$$\begin{aligned}adb-bda&=-dz[ad^2x+bd^2y+cd^2z]\\cdx-adc&=-dy[ad^2x+bd^2y+cd^2z]\\bdc-cdb&=-dx[ad^2x+bd^2y+cd^2z]\end{aligned}$$

il vient

$$\rho'=\frac{ds}{d\omega'}$$

$$=\frac{[dyd^2z-dzd^2y]^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+[dxd^2y-dyd^2x]^2}{d^4x[dyd^2z-dzd^2y]+d^4y[dzd^2x-dxd^2z]+d^4z[dxd^2y-dyd^2x]}$$

63) Soit, comme au N° 60, λ, μ, ν, les angles que la normale principale fait avec les axes coordonnés, et t, u, v, les coordonnées du centre de première courbure, l'on a

$$t-x=\rho\cos\mu=\frac{ds^3}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}\cdot d.\frac{dx}{ds}\cdot$$

$$u-y=\rho\cos\mu=\frac{ds^3}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)}\ d.\frac{dy}{ds}\cdot$$

$$v-z=\rho\cos\nu=\frac{ds^3}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}\ d.\frac{dz}{ds}\cdot$$

Les mêmes résultats peuvent s'obtenir, soit en partant de l'équation générale du cercle et opérant comme au N° 52, soit en considérant la surface enveloppe des plans normaux. Cette surface est développable et sa génératrice rectiligne a pour équations,

$$(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=0 \qquad (1)$$
$$(t-x)d^2x+(u-y)d^2y+(v-z)d^2z=0. \qquad (2)$$

L'expression

$$[d^2x(dyd^2z-dzd^2y)+d^2y[dzd^2x-dxd^2z)+d^2z(dxd^2y-dyd^2x)]$$

étant identiquement nulle, le plan (2) est, ainsi que le plan (1), normal au plan osculateur. La même condition subsiste donc pour la droite (1) (2). Or c'est en commençant par tourner autour de cette droite que le plan normal se déplace sur la courbe. Le centre de 1re courbure se trouve donc au point d'intersection de la droite dont il s'agit avec le plan osculateur.

Si l'on observe que tout plan normal touche la surface enveloppe le long de la génératrice sur laquelle est situé le centre de courbure, l'on peut en conclure immédiatement que la tangente au lieu de ces centres est contenue, pour chaque centre, dans le plan normal correspondant. Cette tangente est donc perpendiculaire à la courbe donnée. Elle ne doit pas être confondue avec la normale principale. Celle-ci est dans le plan osculateur : l'autre s'en écarte généralement.

Détermination directe des rayons de 1re et 2me courbure dans l'hélice.

64) Soit (fig. 2) une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire, R le rayon du cylindre, et μ la tangente de l'angle que la touchante à la courbe fait avec le plan de la section droite.

Prenons sur cette hélice un point quelconque *m*. Le plan mené par la touchante *ma* et par la droite *mf* normale au cylindre est le plan osculateur de l'hélice au point *m*. Cela résulte de la position symétrique que les deux branches de la courbe affectent de chaque côté de ce point par rapport au plan dont il s'agit. On voit d'ailleurs que dans la génération de l'hélice, le plan tangent *map* commençant par tourner autour de la droite *mp*, la continuité s'établit pour le point *a* suivant la droite *ac* normale à ce plan.

Cela posé, considérons les angles que tendent à décrire respectivement les droites *ma*, *pa*, lorsque la rotation commence autour

de l'axe *mp*, et supposons permanente la loi qui régit cette génération, prise à son origine. En ce cas, les angles dont il s'agit sont inversement proportionnels aux longueurs *ma*, *pa*. Si donc on désigne le premier par $d\omega$, le second par dt, l'on a évidemment

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{ma}{pa} = \sqrt{1+\mu^2}$$

Mais dt n'est autre chose que l'angle de deux plans tangents au cylindre et comprenant entr'eux un arc d'hélice égal à ds. L'on a donc aussi

$$\frac{ds}{dt} = R\sqrt{1+\mu^2}$$

et il vient en substituant

$$\frac{ds}{d\omega} = \rho = R(1+\mu^2). \quad (1)$$

Le rayon de première courbure étant ainsi déterminé, l'on remarque que la droite *mb*, menée dans le plan tangent *map* perpendiculairement à *ma*, est normal au plan osculateur. On a donc de même

$$\frac{dt}{d\omega'} = \frac{mb}{pb} = \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}$$

---

(1) Le centre du cercle osculateur se trouve sur le prolongement de la normale *mf*, à une distance de l'axe *of* représentée par $\rho - R = R\mu^2$. Le lieu de ces centres est donc une hélice concentrique à l'hélice donnée, de même pas, et pour laquelle, en nommant μ' la tangente de son inclinaison sur le plan de la section droite, il vient

$$\mu'(\rho - R) = \mu R$$

de là résulte

$$\mu\mu' = 1$$

Les touchantes situées aux deux extrémités de la normale *mn* sont à angle droit l'une sur l'autre. On voit en outre que les deux hélices ont même courbure dans leurs plans osculateurs respectifs et qu'elles sont en quelque sorte réciproques l'une de l'autre. En effet le rayon de première courbure est pour la seconde hélice

$$(\rho - R)(1+\mu'^2) = R\mu^2\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right) = R(1+\mu^2) = \rho.$$

Chacune de ces deux hélices est donc pour l'autre le lieu des centres de première courbure.

et par conséquent pour rayon de deuxième courbure

$$\frac{ds}{d\omega'}=\rho'=\frac{R(1+\mu^2)}{\mu}=\frac{\rho}{\mu} \quad (1)$$

Delà résulte

$$\mu=\frac{\rho}{\rho'}$$

$$R=\frac{\rho}{1+\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2}$$

On peut donc se donner arbitrairement les deux rayons de courbure ρ, ρ' et déterminer d'après ces conditions les éléments μ et R.

Il suit de là que, quels que soient en un point donné d'une courbe quelconque les deux modes particuliers suivant lesquels commencent les changements de direction de la tangente et du plan osculateur, il existe toujours une hélice pour laquelle les mêmes changements s'effectuent en chaque point suivant ce même mode, devenu permanent. On voit en outre qu'en disposant convenablement cette hélice, on peut toujours identifier sa double courbure constante avec celle de la courbe donnée au point que l'on considère. L'hélice ainsi déterminée prend par rapport à la courbe le nom d'*hélice osculatrice*. Elle est, *pour les courbes à double courbure, ce que le cercle osculateur est pour les courbes planes.*

---

(1) Remarquons que pour la seconde hélice on aurait dans les mêmes circonstances

$$\rho''=\frac{\rho}{\mu'}=\mu\rho$$

et par suite

$$\rho^2=\rho'\rho''.$$

Le rayon de première courbure de chacune de ces deux hélices est donc moyenne proportionnelle entre leurs rayons de deuxième courbure.

Dans le cas particulier où l'on pose $\mu=1$ l'inclinaison de l'hélice sur son axe étant de 45°, l'on trouve

$$\rho=\rho'=\rho''=2R.$$

Les deux hélices sont alors tracées sur le même cylindre. La 1re et la 2me courbure sont égales. Leur rayon est double de celui de la section droite.

Courbure des surfaces.

65) Soit une surface,

$$z=F(x,y)$$

Pour abréger, nous représenterons par p et q les dérivées partielles du premier ordre $\frac{dz}{\Delta x}$, $\frac{dz}{\Delta y}$ et par r, s, t, les dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2z}{\Delta^2 x}$, $\frac{d^2z}{\Delta x \Delta y}$, $\frac{d^2z}{\Delta y^2}$.

Soit un point de la surface. En ce point, où nous supposons l'origine des coordonnées transportée, le plan tangent a pour équation

$$dz-pdx-qdy=0 \qquad (1)$$

et, eu égard à la direction de ce plan, la courbure d'une section quelconque se trouve complétement déterminée par l'équation différentielle,

$$d^2z-pd^2x-qd^2y=rdx^2+2sdxdy+tdy^2 \qquad (2)$$

Considérons le cercle osculateur à l'une de ces sections, pour le point dont il s'agit, et, quel qu'il soit, concevons le tracé sur la sphère

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2 \qquad (3)$$

Par hypothèse la sphère passe par l'origine, et l'on peut l'assujettir à toucher en ce point la surface donnée. On a donc d'abord

$$\rho^2=a^2+b^2+c^2$$

puis différenciant l'équation (3)

$$(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=0 \qquad (4)$$

et posant $x=0$, $y=0$, $z=0$

$$adx+bdy+cdz=0$$

Delà résulte

$$\frac{a}{c}=-p, \qquad \frac{b}{c}=-q$$

et par conséquent,

$$\rho=c\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Veut-on maintenant que pour les sections faites par un même plan, l'une sur la surface donnée, l'autre sur la sphère, le point de contact devienne un point d'osculation, il faut exprimer qu'en ce qui concerne respectivement chacune de ces deux sections, la loi de courbure est, en ce point, la même pour les deux surfaces.

Différencions en conséquence l'équation (4) et posons $x=0$, $y=0$, $z=0$, dans le résultat de la différenciation. Il vient ainsi,

$$ad^2x+bd^2y+cd^2z=dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$$

ou remplaçant a et b par leurs valeurs

$$d^2z-pd^2x-qd^2y=\frac{ds^2}{c} \qquad (5)$$

Observons que si le plan sécant est déterminé, l'on peut considérer les quantités ds, dx, dy, dz comme l'étant aussi. Donc alors pour faire coincider les équations de courbure (2) et (5), il suffit d'écrire,

$$\frac{ds^2}{c}=rdx^2+2sdxdy+tdy^2 \qquad (6)$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\rho=\frac{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2} \qquad (7)$$

Cela posé, s'il s'agit d'une section normale, la section qui lui répond dans la sphère est un grand cercle et elle a pour rayon de courbure le rayon ρ de la sphère. S'agit-il au contraire d'une section oblique, la section correspondante est un petit cercle. Néanmoins la sphère, sur lequel ce cercle est tracé, ne change pas si les quantités $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ restent les mêmes, c'est-à-dire si la section oblique a même tangente que la section normale. Or en ce cas désignant par ε l'angle des deux sections et par R le rayon du petit, cercle, on a évidemment

$$R=\rho\cos\varepsilon \qquad (8)$$

Donc, pour toute section normale le rayon de courbure est fourni par l'équation (7), et, pour toute section oblique ayant même tangente, par l'équation (8).

Il suit delà que la courbure en un point donné d'une surface se

trouve complétement déterminée par la courbure des sections normales.

66) De l'équation (7) l'on déduit

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=\frac{ds^2}{\rho}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

c'est-à-dire,

$$rx^2+2sxy+ty^2=\frac{\sigma^2}{\rho}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

σ étant une longueur quelconque, mesurée à partir de l'origine suivant la tangente à la section normale que l'on considère, et x, y, les coordonnées du point suivant lequel l'extrémité de cette longueur se projète dans le plan des x, y.

Le rayon vecteur σ étant tout-à-fait arbitraire on peut le supposer tel que pour chaque section normale on ait constamment

$$\sigma^2=\rho.$$

Dans cette hypothèse l'extrémité du rayon vecteur σ reste sur une certaine courbe, située dans le plan tangent et ayant pour projection

$$rx^2+2sxy+ty^2=\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

La courbe déterminée par cette équation et celle du plan tangent a reçu le nom d'*indicatrice* (1). Elle est remarquable en ce que le carré de chacun de ses demi-diamètres fournit le rayon de courbure de la section normale correspondante.

La considération de l'indicatrice conduit aux déductions suivantes :

1° En général les rayons de courbure sont susceptibles d'un maximum et d'un minimum, les plans normaux correspondants étant rectangulaires.

---

(1) En général on pose $\sigma^2=2\rho\delta$ et l'on a pour projection de l'indicatrice,

$$rx^2+2sxy+ty^2=2\delta\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Voici d'ailleurs ce qu'est l'indicatrice. Au point donné sur la surface il existe une infinité de paraboloïdes osculateurs. Si l'on considère en particulier celui de ces paraboloïdes dont l'axe principal est parallèle à la droite choisie pour axe des z, l'indicatrice est l'intersection de ce paraboloïde par un plan mené parallèlement au plan tangent, à une distance égale à δ. De là résulte un mode de génération applicable à tous les paraboloïdes osculateurs.

2° La somme inverse des rayons de courbure appartenant à deux sections normales quelconques rectangulaires, est constante.

3° La courbure d'une section quelconque est déterminée par celles qu'affectent les sections de plus petite et de plus grande courbure.

4° Les directions de plus petite et de plus grande courbure sont les seules suivant lesquelles la normale puisse en se déplaçant engendrer une surface développable. (1)

67) Supposons le plan des xy parallèle au plan tangent. Il vient en ce cas $p=0$, $q=0$, et l'on a pour équation de l'indicatrice

$$rx^2+2sxy+ty^2=1$$

Choisit-on les axes de manière à ce que cette courbe soit rapportée à ses diamètres principaux, il vient en outre $s=0$.

Cela posé, si l'on fait $p=0$, $q=0$, $s=0$ dans l'expression (7) du N° 65 l'on trouve pour le rayon de courbure d'une section normale quelconque

$$\rho=\frac{dx^2+dy^2}{rdx^2+tdy^2}$$

ou désignant par ϕ l'angle que la tangente à la section que l'on considère fait avec l'axe des x

$$\rho=\frac{1}{r\cos^2\phi+t\sin^2\phi}$$

Les rayons de plus petite et de plus grande courbure sont nommés *rayons de courbure principaux*, les sections qui leur répondent *sections normales principales.*

Soit ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux, l'on déduit de l'équation précédente en y faisant successivement $\phi=0$ et $\phi=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\rho_1}=r, \qquad \frac{1}{\rho_2}=t.$$

En général

$$\frac{1}{\rho}=r\cos^2\phi+t\sin^2\phi$$

---

(1) Cette propriété doit être démontrée. Nous ne la présentons ici que comme une induction fondée sur le résultat qu'on obtient, lorsqu'on substitue à chaque section normale son cercle osculateur, et à la surface donnée le lieu de ces cercles.

et pour une section normale à angle droit sur la précédente

$$\frac{1}{\rho'}=r\sin^2\varphi+t\cos^2\varphi$$

il vient donc

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=r+t=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}.$$

68) Quels que soient les axes coordonnés, supposés rectangulaires, l'on a généralement

$$\rho=\frac{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2}$$
$$=\frac{(p^2+1)dx^2+2pqdxdy+(q^2+1)dy^2}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Considérant $\frac{dy}{dx}$ comme variable, différenciant et égalant à zéro le résultat de la différenciation, l'on trouve pour équation de condition relative aux deux sections normales principales

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}$$
$$-(1+p^2)s+pqr=0 \qquad (1)$$

D'un autre côté la normale au point x, y, z, a pour équations

$$t=x-p(v-z)$$
$$u=y-q(v-z)$$

si l'on veut que dans ses déplacements successifs elle engendre une surface développable il faut que l'on ait (voir N° 55)

$$\frac{dp}{dq}=\frac{d(x+pz)}{d(y+qz)}$$

Effectuant les calculs et substituant à dz, dp, dq leurs valeurs respectives $pdx+qdy$, $rdx+sdy$, $sdx+tdy$ l'on retombe précisément sur l'équation de condition précédente. Il est ainsi démontré que c'est en suivant les directions de plus petite et de plus grande courbure, *et celles-là seulement*, que la normale peut engendrer une surface développable. La suite continue de ces directions forme sur la surface donnée un réseau de lignes qui se coupent à angle droit et prennent le nom de *lignes de courbure*. Les projections de

de ces lignes sur le plan des x,y ont pour équation différentielle

$$\frac{dp}{dq}=\frac{d(x+pz)}{d(y+qz)}$$

ou plus simplement

$$dp(dy+qdz)=dq(dx+pdz)$$

69) Reprenons l'équation 6 du N° (65) et développons le terme ds^2 en y remplaçant dz par $pdx+qdy$. Il vient,

$$(p^2+1)dx^2+2pqdxdy+(q^2+1)dy^2=c[rdx^2+2sdxdy+tdy^2]$$

La valeur que l'on trouve ainsi pour c varie en général avec le rapport $\frac{dy}{dx}$. Si l'on voulait qu'elle demeurat constante indépendamment de toute valeur attribuée à ce rapport, il faudrait que l'on eut

$$p^2+1=rc, \qquad pq=sc, \qquad (q^2+1)=tc$$

et par suite

$$\frac{p^2+1}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{q^2+1}{t}.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbure reste la même dans toutes les sections normales. Le point ainsi déterminé prend le nom d'*ombilic*.

On arrive au même résultat en partant de l'équation (1) du N° 68 et exprimant qu'elle subsiste quelque soit $\frac{dy}{dx}$.

Rectifications, quadratures, cubatures.

INDICATIONS PRÉLIMINAIRES.

70) Étant donné la fonction continue

$$y=f(x) \qquad (1)$$

l'on a en même temps

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \qquad (2)$$

et la différenciation consiste à déduire de l'équation (2) l'équation différentielle

$$dy=f'(x)dx \qquad (3)$$

L'opération inverse prend le nom d'*intégration*. Elle devient nécessaire lorsque la mise en équation du problème à résoudre fournit directement l'équation (3) et que l'objet que l'on se propose est la détermination de l'équation (2). Le signe d'intégration est $\int$, ou plutôt $\int_x^{x+\Delta x}$, les indices x et $x+\Delta x$ fixant les limites de l'intervalle que l'on considère. Le résultat qu'on obtient en intégrant est nommé *intégrale*. Il a pour valeur correspondante la différence Δy. On écrit ainsi,

$$\Delta y=\int_x^{x+\Delta x} f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (4)$$

les équations (2), (3), (4) s'impliquant l'une l'autre et le signe $\int_x^{x+\Delta x}$ indiquant l'opération qui reste à effectuer dans l'équation (4) pour passer de l'équation (3) à l'équation (2).

On observera que si l'équation (2) résulte nécessairement de l'équation (1), la réciproque n'est pas également vraie. Concevons en effet que l'équation (2) subsiste seule et qu'après y avoir fait $x=a$ l'on remplace Δx par $x-a$; il vient

$$\Delta y=f(x)-f(a) \qquad (5)$$

ou désignant par b la valeur que prend y pour $x=a$

$$y=f(x)+b-f(a) \qquad (6)$$

Or quelle que soit la constante $b-f(a)=c$, l'équation (6) peut toujours se résoudre en l'une ou l'autre des équations (2) et (5). Celles-ci répondent donc en général à la relation

$$y=f(x)+\text{Cons}^{te}.$$

Pour ne pas nous écarter de notre but, nous laisserons de côté l'intégration proprement dite et, supposant résolu tout problème que nous aurons ramené à une question de calcul intégral, nous aborderons directement une nouvelle série d'applications géométriques.

Rectifications.

71) Soit s l'arc d'une courbe et x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point pris comme on voudra sur la courbe. Imaginons qu'à partir de ce point la continuité *persiste* suivant la direction fournie par la tangente. L'on a dans cette hypothèse,

$$\Delta s = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{\Delta z}\right)^2+\left(\frac{dy}{\Delta z}\right)^2}\cdot\Delta z. \qquad (1)$$

L'équation (1) subsiste quelle que soit la direction tangentielle, pourvu qu'elle demeure *constante* à partir du point et dans l'intervalle que l'on considère. Il vient donc pour le cas où cette direction *varie continuement*,

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{\Delta z}\right)^2+\left(\frac{dy}{\Delta z}\right)^2}\cdot dz.$$

et par suite

$$\Delta s = \int_z^{z+\Delta z} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{\Delta z}\right)^2+\left(\frac{dy}{\Delta z}\right)^2}\cdot dz.$$

Quadratures.

1° AIRES PLANES.

72) Étant donné une aire plane, A l'on peut toujours la considérer comme engendrée par une portion de droite qui se déplace en changeant de grandeur. Pour plus de simplicité nous admettrons que les déplacements de la génératrice s'effectuent, soit parallèlement à une direction constante, soit par rotation autour d'un point fixe.

Dans le premier cas, prenons pour axes coordonnés deux droites rectangulaires, et pour directrice, l'axe des y par exemple. Soit d'ailleurs z la longueur de la génératrice. Si l'on suppose qu'à partir d'une position quelconque déterminée, la longueur z demeure

invariable, on a pour la génération qui répond à cette hypothèse,

$$\Delta A = z\Delta x.$$

De là résulte pour le cas général ou la grandeur z varie avec continuité dans l'intervalle Δx

$$dA = z dx$$

et par conséquent

$$\Delta A = \int_{x}^{x+\Delta x} z dx.$$

Autrement. L'on a en général,

$$\Delta A = (z + \mu\Delta x)\Delta x$$

μ étant une fraction. Il vient donc, comme ci-dessus,

$$dA = z dx.$$

Autrement. Considérons le triangle formé par la génératrice z et par les deux tangentes aux courbes qui la limitent. Soit, pour une position quelconque de la génératrice, T la surface de ce triangle. Le mode de génération restant le même, on a évidemment

$$dT = dA.$$

Or, si l'on désigne par x la hauteur du triangle, il vient

$$T = \tfrac{1}{2} zx = \tfrac{1}{2} mx^2$$

m étant une constante. On a donc

$$dA = dT = mx \cdot dx = z dx.$$

Dans le second cas, le point fixe étant pris à l'intérieur, nommons r la partie de la génératrice comprise entre ce point et le périmètre. Si la longueur r demeurait constante, à partir d'une position quelconque de la génératrice, la surface engendrée dans l'intervalle angulaire $\Delta\omega$ aurait pour mesure

$$\Delta A = \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\omega.$$

Il suit delà que le rayon vecteur ne peut être continuement variable sans qu'il n'en résulte nécessairement,

$$dA = \tfrac{1}{2} r^2 d\omega$$

et par suite

$$\Delta A = \tfrac{1}{2} \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} r^2 d\omega.$$

Autrement. L'on a en général

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\,[r^2 + \mu(2r\Delta r + \Delta r^2)]\Delta\omega.$$

μ étant une fraction. Il vient donc comme ci-dessus

$$dA = \tfrac{1}{2} r^2 d\omega.$$

Autrement. Soit o (fig. 3) le centre de rotation, $om = r$ une position quelconque du rayon vecteur, ba la tangente en m au périmètre courbe nmt, et s l'arc nm compris dans l'angle $nom = \omega$. Si, du point o, l'on abaisse sur la tangente la perpendiculaire $oa = p$, il vient

$$dA = \tfrac{1}{2} p \cdot ds. \qquad (1)$$

En général, la tangente étant substituée à la courbe, et α exprimant l'angle aom, il suffit de poser $d\alpha = d\omega$, pour qu'il en résulte immédiatement,

$$ds = d(ma) = d(p \text{ tang. } \alpha) = \frac{p}{\cos^2 \alpha} d\omega.$$

on a donc en substituant

$$dA = \tfrac{1}{2} \frac{p^2}{\cos^2 \alpha} d\omega = \tfrac{1}{2} r^2 d\omega.$$

Si la courbe nmt était une circonférence de cercle ayant 0 pour centre, on aurait $p = r = \text{cons}^{te}$. En ce cas la relation (1) suffit et l'on en déduit directement

$$\Delta A = \tfrac{1}{2} r \Delta s = \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\omega.$$

Remarque. A étant la surface d'un secteur circulaire ayant r pour rayon et répondant à l'angle au centre ω, l'on a

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \omega.$$

d'où, traitant ω comme une constante et différenciant

$$dA = r\omega \cdot dr = s \cdot dr.$$

L'équation différentielle $dA = sdr$ exprime que l'aire engendrée par un arc de cercle qui se déplace en conservant même centre et même longueur a pour mesure le produit de l'arc par l'accroissement du rayon.

Aires de révolution.

73) Soit une surface A décrite par une courbe plane qui tourne autour de l'axe des x et a pour équation $y=f(x)$.

Etant pris sur la courbe un point quelconque (x,y), imaginons qu'à partir de ce point, la continuité *persiste* suivant la direction tangentielle. La courbe se trouvant ainsi continuée par une droite, imaginons en outre que chacun des points de la tangente soit assujetti à décrire une ligne précisément égale à la circonférence $2\pi y$.

La surface engendrée dans cette double hypothèse a pour mesure

$$\Delta A = 2\pi y \sqrt{1+f'(x)^2}\cdot\Delta x.$$

Suppose-t-on maintenant que le produit $y\sqrt{1+f'(x)^2}$ soit continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, il vient immédiatement

$$dA = 2\pi y \sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx$$

et l'on en déduit, pour le cas général que nous avons en vue,

$$\Delta A = 2\pi \int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx.$$

Autrement. La section que l'on considère étant déterminée par la valeur attribuée à la variable, ce n'est point altérer la loi de génération des grandeurs ΔA, Δx que de substituer à la surface donnée le cône qui l'enveloppe suivant cette section. Mais s'il s'agit de ce cône, l'on a (1)

$$dA = 2\pi y \sqrt{1+f'(x)}\cdot dx$$

---

(1) En général z étant fonction continue de la variable indépendante x, si Δx change de signe et non de grandeur, il en est de même de l'accroissement différentiel dz. De là résulte le principe suivant :

Considéré en lui-même et mesuré directement entre les deux extrémités d'un intervalle quelconque égal à Δx, *l'accroissement différentiel de la fonction ne change pas de grandeur absolue, soit que*, conformément à la méthode ordinaire, *l'intervalle dont il s'agit se trouve porté* tout entier en deçà ou au-delà *de la valeur particulière attribuée à la variable indépendante, soit* qu'au contraire *il se compose de deux parties quelconques portées*, l'une en deçà, l'autre au-delà *de cette même valeur.*

La même équation subsiste donc pour la surface donnée.

Autrement. Soit ω l'angle de deux plans méridiens, l'un fixe, l'autre de position variable. Imaginons qu'un cylindre droit soit circonscrit à l'une des deux sections méridiennes et limité par le plan de l'autre. Soit d'ailleurs A′ la surface cylindrique ainsi déterminée. On a d'abord et à partir de $\omega=0$,

$$dA'=dA=\Delta A=C.\Delta\omega.$$

C étant une constante. L'on a ensuite et généralement,

$$A'=\text{tang.}\omega\cdot\int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx.$$

d'où

$$dA'=\frac{\Delta\omega}{\cos^2\omega}\int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx$$

et par conséquent pour $\omega=0$

$$\Delta A=dA'=\Delta\omega\int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx.$$

Dans le cas particulier de la sphère, si l'on désigne par r le rayon, il vient

$$y\sqrt{1+f'(x)^2}=r$$

et l'on en déduit immédiatement pour la portion de surface comprise entre deux parallèles et deux méridiens

$$\Delta A=r\Delta\omega.\Delta x.$$

Aires quelconques.

74) Considérons d'abord une aire plane P ayant pour projection sur le plan des xy l'aire p. Si l'on désigne par ω l'angle que font

---

Cela posé si, dans le cas du cône, la section que l'on considère occupe le milieu de l'intervalle Δx, l'on a

$$\Delta A=2\pi y\sqrt{1+f'(x)^2}.\Delta x$$

et comme cette relation subsiste, quelque soit Δx, elle s'étend jusqu'à l'origine même de l'accroissement ΔA.

entr'eux les plans de ces aires, l'on a

$$\Delta p = \cos\omega \cdot \Delta P.$$

En effet, l'axe des x étant pris parallèle à l'intersection des plans dont il s'agit, la formule du N° 72 donne

$$\Delta p = \int_x^{x+\Delta x} y\,dx$$

$$\Delta P = \int_x^{x+\Delta x} \frac{1}{\cos\omega}\, y\,dx = \frac{1}{\cos\omega} \int_x^{x+\Delta x} y\,dx.$$

il vient donc

$$\Delta p \cdot = \cos\omega \cdot \Delta P.$$

Soit ensuite une surface

$$z = F(x,y).$$

et ω l'angle que le plan tangent au point (x,y,z) fait avec le plan des xy. Concevons qu'à partir de ce point, choisi comme on voudra, la continuité persiste suivant les directions fournies par les tangentes. Dans cette hypothèse aux accroissements $\Delta x, \Delta y$, répond une aire plane située dans le plan tangent et ayant pour expression,

$$\Delta A = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\cos\omega} = \Delta x \cdot \Delta y \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2}.$$

Cela posé, si le radical varie continuement avec y dans l'intervalle Δy, et que l'on traite x comme une constante, il vient

$$dA = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2} \cdot dy$$

De là résulte, eu égard aux changements que subit l'angle ω dans la section faite par le point (x,y,z) perpendiculairement à l'axe des x,

$$\Delta A = \Delta x \int_y^{y+\Delta y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2} \cdot dy.$$

Suppose t-on d'ailleurs que l'intégrale $\int_y^{y+\Delta y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2} \cdot dy$,

soit continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, l'on a immédiatement

$$\Delta A=\Delta x\int_{y}^{y+\Delta y}\sqrt{1+\left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^{2}+\left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^{2}}\cdot dy$$

et par suite, pour le cas général d'une aire quelconque,

$$\Delta A=\int_{x}^{x+\Delta x}dx\int_{y}^{y+\Delta y}\sqrt{1+\left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^{2}+\left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^{2}}\cdot dy.$$

Cubatures.

75) Le système des axes étant rectangulaire, considérons un solide quelconque et nommons z la partie de l'ordonnée comprise entre les surfaces qui le limitent supérieurement et inférieurement.

Si l'on imagine qu'à partir d'un point pris arbitrairement dans l'intérieur du solide la hauteur z demeure invariable, aux accroissements $\Delta x, \Delta y$ répond un volume ΔV ayant pour mesure,

$$\Delta V=z\Delta x.\Delta y.$$

De là résulte pour le cas où la hauteur z, supposée constante avec x dans l'intervalle Δx, varie continuement avec y dans l'intervalle Δy

$$\Delta V=\Delta x\int_{y}^{y+\Delta y}zdy.$$

L'intégrale $\int_{y}^{y+\Delta y}zdy$ est-elle à son tour supposée continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, il vient sans autre intermédiaire

$$dV=dx\int_{y}^{y+\Delta y}zdy$$

et l'on a généralement

$$\Delta V=\int_{x}^{x+\Delta x}dx\int_{y}^{y+\Delta y}zdy.$$

On parvient au même résultat en considérant le solide comme engendré par les déplacements successifs d'une aire plane u qui se meut perpendiculairement à l'axe des x, en changeant de grandeur.

En effet, si cette aire est constante, l'on a

$$\Delta V = u\Delta x$$

Elle ne peut donc varier avec continuité, sans qu'il n'en résulte nécessairement

$$dV = u\,dx$$

et par suite

$$\Delta V = \int_{x}^{x+\Delta x} u\,dx$$

Observons que l'aire u a pour expression générale $\int_{y}^{y+\Delta y} z\,dy$.

La formule que nous venons d'obtenir coïncide donc avec la précédente.

Si le solide est symétrique par rapport à l'axe des x (solide de révolution), il vient

$$u = \pi y^2$$

On a donc en ce cas

$$\Delta V = \pi \int_{x}^{x+\Delta x} y^2\,dx$$

S'agit-il en particulier de la sphère et veut-on procéder plus simplement encore? Prenons un point de la surface et à partir de ce point une aire quelconque ΔA située dans le plan tangent. Soit d'ailleurs ΔV le volume du cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base l'aire ΔA. Il vient,

$$\Delta V = \frac{r}{3}\Delta A$$

on déduit de là pour la sphère

$$dV = \frac{r}{3}\,dA$$

ou ce qui revient au même, la loi de génération des grandeurs $\Delta V, \Delta A$ étant constante,

$$\Delta V = \frac{r}{3} \Delta A.$$

De là résulte en remplaçant ΔA par la valeur du N° 73

$$\Delta V = \frac{r^2}{3} \Delta\omega . \Delta x.$$

76) Considérons en dernier lieu le cas où la surface du solide a pour équation

$$r = f(\omega, \epsilon)$$

r étant le rayon vecteur mené de l'origine à un point quelconque de la surface, ϵ l'angle que ce rayon fait avec sa projection sur le plan des zy, ω l'angle de cette projection avec l'axe des z.

Si l'on suppose d'abord qu'à partir d'un point choisi comme on voudra, le rayon vecteur soit constant, et qu'on exprime par ΔV le volume d'un cône ayant son sommet à l'origine et pour base la portion de surface sphérique qui répond aux accroissements angulaires $\Delta\omega, \Delta b$, il vient dans cette hypothèse

$$\Delta V = \frac{r^2}{3} \Delta\omega . \Delta x = \frac{r^2}{3} \Delta\omega \, \Delta(r \sin\epsilon) = \frac{r^3}{3} \Delta\omega . \Delta \sin\epsilon.$$

Suppose-t-on ensuite que constant avec ω dans l'intervalle $\Delta\omega$, le rayon vecteur varie continuement avec ϵ dans l'intervalle $\Delta\epsilon$, l'on doit écrire

$$dV = \frac{r^3}{3} . \Delta\omega . d. \sin\epsilon = \frac{r^3}{3} \Delta\omega . \cos\epsilon . d\epsilon.$$

On a donc en ce cas

$$\Delta V = \frac{\Delta\omega}{3} \int_{\epsilon}^{\epsilon+\Delta\epsilon} r^3 \cos\epsilon . d\epsilon.$$

Suppose-t-on enfin que l'intégrale $\int_{\epsilon}^{\epsilon+\Delta\epsilon} r^3 \cos\epsilon \, d\epsilon$ soit continuement variable avec ω dans l'intervalle $\Delta\omega$, il vient,

$$dV = \frac{1}{3} d\omega \int_{\epsilon}^{\epsilon+\Delta\epsilon} r^3 \cos\epsilon \, d\epsilon$$

et l'on en déduit pour solution générale

$$\Delta V=\frac{1}{3}\int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} d\omega \int_{\epsilon}^{\epsilon+\Delta\epsilon} r^3\cos\epsilon.d\epsilon.$$

APPLICATIONS GÉNÉRALES.

Exemples particuliers offrant soit la résolution complète, soit la mise en équation de différents problèmes.

GÉNÉRATION DES TRIANGLES SEMBLABLES.

77) Soit x, y, z, les trois côtés d'un triangle quelconque construit sous certains angles déterminés.

Si l'on suppose que l'un des côtés varie (les angles restant les mêmes) les deux autres côtés varient en même temps. En ce cas, les grandeurs Δx, Δy, Δz, s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro, et la loi qui régit cette génération est indépendante de toute valeur attribuée aux quantités x, y, z. On a donc,

$$\Delta x=c\Delta z, \qquad \Delta y=c'\Delta z, \qquad \Delta x=c''\Delta y$$

c, c', c'' étant des constantes.

Mesure du parallélogramme et du parallélipipède.

78) Soit x et y les deux côtés d'un parallélogramme, A sa surface. La longueur x restant d'abord la même, imaginons que la

---

(1) Les questions traitées à partir du N° 77 jusque et y compris le N° 81 sont essentiellement élémentaires. On s'est attaché à les résoudre en faisant exclusivement usage

1° Des définitions du N° 1.

2° Des principes fondamentaux établis N°s 2, 3, 4.

On remarquera peut-être que le principe du N° 2 n'a été démontré que pour des parties commensurables avec a, mais il est aisé de voir que dès qu'il y a continuité dans la génération que l'on considère, la généralisation du principe en dérive immédiatement.

longueur y varie. Dans cette hypothèse les grandeurs ΔA , Δy s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro et la loi qui régit cette génération est indépendante de toute valeur attribuée à y. On a donc nécessairement

$$\Delta A = c\Delta y$$

ou ce qui revient au même

$$A = cy$$

c ne dépendant pas de y.

Suppose-t-on maintenant x variable et y constant, on trouve de la même manière,

$$A = c'x$$

c' ne dépendant point de x.

De là résulte

$$A = mxy.$$

m pouvant dépendre de l'angle suivant lequel se coupent les côtés du parallélogramme, mais non de leur grandeur.

Lorsque l'on pose $x=1$, $y=1$, il vient $A=m$. Fait-on en outre $m=1$, c'est-à-dire prend-on la surface m pour unité de mesure applicable à tous les parallélogrammes construits sous l'angle que l'on considère, on a généralement

$$A = xy.$$

Soit de même x , y , z les trois côtés d'un parallélipipède : V son volume.

Si l'on suppose successivement que chacune des trois longueurs x , y , z , varie, tandis que les deux autres demeurent constantes, on trouve comme tout-à-l'heure,

$$V = cx = c'y = c''z = mxyz$$

S'agit-il d'ailleurs d'un parallélipipède quelconque, construit sous certains angles déterminés, et prend-on pour unité de mesure le volume du parallélipipède construit sous les mêmes angles, avec des côtés respectivement égaux à l'unité de longueur, il vient en général,

$$V = xyz.$$

Mesure des angles et du secteur circulaire. Quadrature et cubature des cones et cylindres droits.

79) Soit un cercle et dans ce cercle un angle au centre ω. Soit d'ailleurs s l'arc compris entre les côtés de cet angle.

Les grandeurs Δs, $\Delta\omega$, s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro, et la loi qui régit cette génération est indépendante de l'angle ω. On a donc,

$$\Delta s = c\Delta\omega.$$

Cela posé, soit bmc (fig. 4) une tangente menée à l'extrémité du rayon $om = r$. Si nous prolongeons les côtés des angles $moa = \omega$, $moh = \Delta\omega$ et que nommant l la longueur bm, nous considérions la génération simultanée des grandeurs Δl, $\Delta\omega$, nous aurons évidemment

$$mh = dl = \Delta s = c\Delta\omega\,, \qquad mc = \Delta l = (c+\eta)\Delta\omega.$$

η étant une quantité qui décroit indéfiniment à mesure que $\Delta\omega$ converge vers zéro.

Il viendra de même pour un cercle concentrique au premier et dont le rayon serait $om' = r'$,

$$m'h' = dl' = \Delta s' = c'\Delta\omega\,, \qquad m'c' = \Delta l' = (c'+\eta')\Delta\omega.$$

Or, quel que soit l'accroissement $\Delta\omega$, l'on a toujours

$$\frac{\Delta l}{\Delta l'} = \frac{r}{r'} = \frac{c+\eta}{c'+\eta'}$$

il vient donc aussi

$$rc' - r'c = r'\eta - r\eta'.$$

En vertu de cette équation, la différence $r'\eta - r\eta'$ ne peut qu'être nulle ou constante. Mais en supposant qu'elle ne fut pas nulle, elle serait indéfiniment décroissante avec $\Delta\omega$. Elle est donc nulle, et l'on a séparément

$$r'\eta - r\eta' = 0\,, \qquad rc' - r'c = 0.$$

De là résulte,

$$\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta s}{\Delta s'} = \frac{r}{r'}$$

Faisant $r' = 1$, et prenant pour mesure de l'angle $\Delta\omega$ l'arc $\Delta s'$, on déduit de ce qui précède

$$\Delta s = r\Delta\omega, \qquad \Delta l = (r+\varkappa)\Delta\omega.$$

Soit encore A l'aire du triangle *bom*. A l'accroissement angulaire $\Delta\omega$ répond,

1° L'accroissement effectif. $omc = \Delta A = \frac{r}{2}\Delta l = \frac{r}{2}[r+\varkappa]\Delta\omega.$

2° L'accroissement différentiel. $omh = dA = \frac{r^2}{2}\Delta\omega = \frac{r}{2}\Delta s.$

Il vient donc

$$\text{Secteur } omh = \frac{r^2}{2}\Delta\omega = \frac{r}{2}\Delta s.$$

Le procédé, que nous venons de suivre pour la mesure du secteur circulaire, s'étend de lui-même aux quadratures et cubatures des cônes et cylindres droits.

Mesure du fuseau et de l'onglet cylindriques.

80) Étant donné deux plans qui se coupent suivant AX (fig. 5), soit YAX l'un de ces plans, m la projection sur ce plan d'une droite qui se déplace en lui restant perpendiculaire.
z la partie de cette droite interceptée par les deux plans
$x = Ap$, $y = mp$, les coordonnées rectangulaires du point m.
mm' la direction suivant laquelle *commence* le déplacement de ce point.
r le rayon d'un cercle ayant son centre en 0 sur la droite AX, et touchant en m la direction mm'.
μ le rapport *constant* $\frac{y}{z}$.

ΔA l'aire engendrée, à partir du point m, par les déplacements successifs de la perpendiculaire z.

ΔV le volume de la pyramide qui a son sommet en O et ΔA pour base.

Imaginons d'abord que le déplacement du point m *persiste* suivant une seule et même direction. Dans cette hypothèse la perpendiculaire z engendre une aire trapézoïdale, et il vient,

$$\Delta A = mm' \cdot \mu \cdot \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot = \mu r \cdot \left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right) \Delta x.$$

$$\Delta V = \frac{r}{3} \Delta A = \frac{1}{3} \mu r^2 \left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right) \cdot \Delta x.$$

De là résulte

$$dA = \mu r \Delta x \qquad (1)$$

$$dV = \tfrac{1}{3} \mu r^2 \Delta x. \qquad (2)$$

Suppose-t-on maintenant que le déplacement du point m s'effectue suivant la circonférence mo, la quantité r cesse d'être variable. Dès lors les lois de génération exprimées par les équations (1) et (2) sont constantes, indépendamment de toute valeur attribuée à x et l'on en déduit immédiatement,

$$dA = \Delta A = \mu r \Delta x$$

$$dV = \Delta V = \tfrac{1}{3} \mu r^2 \Delta x.$$

Dans l'hypothèse où nous venons de nous placer, l'aire engendrée par la perpendiculaire z est une portion de surface cylindrique. Les quadratures et cubatures, qui répondent à ce cas, n'offrent, ainsi qu'on le voit, aucune difficulté. S'il s'agit du fuseau et de l'onglet compris entre les deux plans que l'on considère, on doit remplacer Δx par $2r$. On peut d'ailleurs substituer à μr la valeur $z = \Delta l$, laquelle répond à l'abscisse $x = A0$. En opérant de cette manière, on trouve,

$$\Delta A = 2r \Delta l$$

$$\Delta V = \tfrac{2}{3} r^2 \Delta l.$$

Quadrature et cubature de la sphère.

81) Considérons une sphère quelconque, engendrée par la rotation du demi cercle om autour du diamètre nn'.

Soit $\Delta\omega$ l'angle de deux plans méridiens, dont l'un, supposé fixe, est représenté fig. 5.

La demi circonférence *nmn'* étant prise pour base d'un demi cylindre droit, circonscrit à la sphère, le fuseau et l'onglet cylindriques, qui répondent à l'angle $\Delta\omega$, ont respectivement pour mesure,

$$\Delta A = 2r\Delta l = 2r[r+\gamma]\Delta\omega.$$
$$\Delta V = \tfrac{2}{3}r^2\Delta l = \tfrac{2}{3}r^2[r+\gamma]\Delta\omega.$$

De là résulte pour le fuseau et l'onglet sphérique, qui répondent à la même ouverture angulaire,

$$dA = \text{fuseau sphérique} = 2r^2\Delta\omega.$$
$$dV = \text{onglet sphérique} = \tfrac{2}{3}r^3\Delta\omega.$$

S'il s'agit d'une zone et du secteur correspondant, il suffit de rétablir le facteur Δx au lieu du facteur $2r$. On trouve ainsi

$$\text{zone sphérique} = r\Delta\omega\cdot\Delta x.$$
$$\text{secteur sphérique} = \tfrac{1}{3}r^2\Delta\omega\,\Delta x.$$

Loi des températures d'une barre solide.

82) Considérons une barre prismatique, chauffée ou non à l'une de ses extrémités et placée dans un milieu dont la température est zéro.

Les dimensions transversales de la barre, étant supposées très petites, nous ne tiendrons pas compte des différences de température qui peuvent exister entre les diverses parties d'une même section.

Nommons ω l'aire de la section transversale, γ son périmètre, k et h les coefficients de conductibilité intérieure et extérieure, C la chaleur spécifique, D le poids de l'unité de volume.

Soit une section quelconque m, située à une distance x de l'origine, et v la température de cette section à la fin du temps t.

Lorsqu'une même quantité de calorique traverse à la fois toutes les sections, la température reste partout la même à toutes les époques. En ce cas, si l'on désigne par Q la quantité de calorique qui traverse la section m pendant l'unité de temps, l'on a

$$Q\Delta x = k\omega\Delta V.$$

De là résulte pour le cas où le flux de calorique varie continue-

ment d'une section à l'autre, la température restant partout la même, ou *subissant partout les mêmes changements*,

$$Q = k\omega \frac{dv}{\Delta x}. \quad (1)$$

S'agit-il d'ailleurs d'une autre section, séparée de la première par l'intervalle Δx, la différence entre les quantités de calorique, qui traversent à la fois ces deux sections pendant l'unité de temps, a pour expression $\Delta\left(k\omega\frac{dv}{\Delta x}\right)$.

Quelle que soit, pendant le temps que l'on considère, la température de chacune des sections comprises dans l'intervalle Δx, l'on peut toujours imaginer que la température du milieu varie d'une section à l'autre, de telle manière que, pour chaque section, l'excès de sa température sur celle du milieu qui la circonscrit, soit constamment représenté par v. Dans cette hypothèse, à la longueur Δx répond une perte de calorique, effectuée par la surface extérieure de la barre, et exprimée pour l'unité de temps par $h\gamma v\Delta x$.

Il vient donc pour mesure de la quantité de calorique qui s'accumule, pendant l'unité de temps, sur la longueur Δx.

$$\Delta\left(k\omega\frac{dv}{\Delta x}\right) - h\gamma v\Delta x.$$

Cela posé, si l'on prend à son origine le changement de température de la section m, on remarque qu'il s'effectue suivant une loi déterminée. Cette loi, *supposée permanente*, répond à une élévation de température exprimée, pour l'unité de temps, par la dérivée partielle $\frac{dv}{\Delta t}$. On peut d'ailleurs imaginer qu'elle s'applique, avec cette même détermination, à toute l'étendue de l'intervalle Δx. En ce cas, *les changements de température sont partout les mêmes*, et ils ne peuvent se produire sans qu'il n'y ait absorbtion d'une quantité de calorique représentée, pour l'unité de temps et pour la

(1) Cette relation subsiste en général. Il faut observer seulement que dans le cas où la dérivée partielle $\frac{dv}{\Delta x}$ est fonction de t, Q exprime, pour l'unité de temps, non plus la quantité de chaleur qui traverse *effectivement* la section m, mais celle qui la traverserait, si le flux persistait en conservant la détermination qu'il affecte à l'instant que l'on considère.

longueur Δx, par l'expression $C.D.\omega.\Delta x.\frac{dv}{\Delta t}$. On a donc nécessairement,

$$\Delta\left(k\omega\frac{dv}{\Delta x}\right)-h\gamma v\Delta x=C\cdot D\cdot\omega\cdot\Delta x\cdot\frac{dv}{\Delta t}.$$

De là résulte, pour le cas général que nous avons en vue, les quantités v et $\frac{dv}{\Delta t}$ n'étant pas constantes, mais bien continuement variables avec x dans l'intervalle Δx,

$$k\omega\frac{d^2v}{\Delta x^2}-h\gamma v=C\cdot D\cdot\omega\cdot\frac{dv}{\Delta t}.$$

L'équilibre est-il établi d'une manière permanente, on a $\frac{dv}{\Delta t}=0$ et il vient plus simplement,

$$k\omega\frac{d^2v}{\Delta x^2}=h\gamma v.$$

Problème de la corde vibrante.

83) Considérons une corde tendue entre deux points fixes et exécutant librement des vibrations quelconques très petites.

Soit m la masse de la corde pour l'unité de longueur, P sa tension *supposée constante*, y la distance comprise à la fin du temps t entre un plan fixe, choisi comme on voudra, et un point quelconque n appartenant à la courbe.

A partir du point n prenons un arc Δs, assez petit pour que, dans toute son étendue, la dérivée partielle $\frac{dy}{\Delta s}$ affecte le même signe, à l'instant que l'on considère. Isolons cet arc du reste de la courbe, et pour suppléer l'effet de la liaison, plaçons à chacune de ses extrémités et suivant la tangente une force égale à P. Les composantes parallèles aux y étant de signe contraire, et l'une d'elles ayant pour expression $P\frac{dy}{\Delta s}$, leur résultante est évidemment $\Delta\left(P\frac{dy}{\Delta s}\right)$.

Cela posé, si la loi qui régit le changement d'état du point n, à partir du temps t, subsistait en même temps et avec la même détermination pour tous les points de l'arc Δs, la réaction due à l'inertie aurait pour composante parallèle aux y, $m\Delta s \cdot \frac{d^2y}{\Delta t^2}$, et il viendrait,

$$\Delta\left(\mathrm{P}\frac{dy}{\Delta s}\right) = m\Delta s \cdot \frac{d^2y}{\Delta t^2}$$

De là résulte pour le cas ou la dérivée partielle $\frac{d^2y}{\Delta t^2}$ varie continuement avec s dans l'intervalle Δs,

$$\mathrm{P}\frac{d^2y}{\Delta s^2} = m\frac{d^2y}{\Delta t^2}.$$

IX.—*Note sur un nouvel énoncé des conditions d'équilibre d'un système de forces;*

Par J.-B. BRASSEUR,

PROFESSEUR ORDINAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE À L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Premier cas : les forces sont situées dans un même plan.

Tant de forces que l'on voudra, situées dans un même plan et appliquées à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre, lorsque la somme de leurs moments est nulle par rapport à chacun de trois points quelconques non en ligne droite.

Démonstration. Représentons

par P, P', P'', etc. les forces données,
par (x,y), (x',y'), (x'',y''), etc. les coordonnées rectangulaires de leurs points d'application.

Ayant décomposé chacune de ces forces en deux respectivement parallèles aux deux axes coordonnés, désignons

par X, X', X'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des x,
par Y, Y', Y'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des y.

Cela posé, si nous exprimons que la somme des moments de toutes ces forces est nulle d'abord par rapport à l'origine, puis par rapport à deux autres points quelconques, non en ligne droite avec l'origine, nous aurons, en représentant par (a,b), (a',b') les coordonnées de ces deux derniers points, les trois équations écrites en abrégé :

$$\begin{aligned} &\Sigma(Xy-Yx)=0,\\ &\Sigma[X(y+b)-Y(x+a)]=0,\\ &\Sigma[X(y+b')-Y(x+a')]=0. \end{aligned}$$

Conservant la première et réduisant les deux autres au moyen de la première, il vient

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma(Xy-Yx)=0\\ &\Sigma(Xb-Y)=0\\ &\Sigma(Xb'-Ya')=0 \end{aligned}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{aligned} &\Sigma(Xy-Yx)=0\,..(1)\\ &b\Sigma X-a\Sigma Y=0\,..(2)\\ &b'\Sigma X-a'\Sigma Y=0\,..(3). \end{aligned}\right.$$

Les deux dernières équations (2,3) donnent, en éliminant successivement ΣX et ΣY, les deux équivalentes

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)\Sigma Y=0\,,\quad \left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\Sigma X=0\,,$$

qui ne peuvent exister à moins que l'on ait séparément

$$\Sigma X=0 \text{ et } \Sigma Y=0\ldots.\ (m)\ ;$$

car le facteur $\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)$ égalé à zéro conduirait à conclure que les deux points (a,b), (a',b') sont en ligne droite avec l'origine, ce qui est contre l'hypothèse que nous avons faite. Or, les deux dernières équations $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ avec l'équation (1) expriment précisément les conditions connues pour l'équilibre d'un système de forces situées dans un même plan ; donc, etc.

Second cas : les forces sont situées dans l'espace.

Tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre lorsque, ces forces étant projetées successivement sur les trois plans coordonnés rectangulaires, la somme des moments des projections de ces forces sur chaque plan coordonné est nulle d'abord par rapport à l'origine et puis par rapport à un autre point quelconque de ce plan ; seulement les trois points quelconques, choisis respectivement dans les trois plans coordonnés, ne doivent pas être les projections d'un même point de l'espace.

Démonstration. Représentons

par P, P′, P″, etc. les forces données,
par (x,y,z), (x',y',z'), (x'',y'',z''), etc. les coordonnées de leurs points d'application.

Décomposons chacune des forces en trois respectivement parallèles aux trois axes rectangulaires et désignons
par X, X′, X″, etc. leurs composantes parallèles à l'axe des x,
par Y, Y′, Y″, etc. leurs composantes parallèles à l'axe des y,
par Z, Z′, Z″, etc. leurs composantes parallèles à l'axe des z.

Cela posé, pour exprimer d'abord que la somme des moments des projections de toutes les forces sur chaque plan coordonné est nulle par rapport à l'origine, nous aurons les trois équations connues

$$\Sigma(Xy-Yx)=0,\quad \Sigma(Xz-Zx)=0,\quad \Sigma(Zy-Yz)=0\ldots\ (m).$$

Prenons actuellement

dans le plan des xy un point dont les coordonnées soient a,b,
dans celui des xz un point dont les coordonnées soient a,c,
dans celui des yz un point dont les coordonnées soient b,c';
ces trois points ainsi choisis respectivement dans les trois plans coordonnés ne seront pas les projections d'un même point de l'espace; car pour cela il faudrait que l'on eût $c'=c$.

Pour exprimer maintenant que la somme des moments des projections de toutes les forces sur chaque plan coordonné est nulle par rapport au point que nous avons choisi plus haut dans ce même plan; nous aurons les trois nouvelles équations

$$\begin{aligned}
\Sigma[X(y+b)-Y(x+a)]&=0,\\
\Sigma[X(z+c)-Z(x+a)]&=0,\\
\Sigma[Z(y+b)-Y(z+c')]&=0,
\end{aligned}$$

qui se réduisent en vertu des trois équations (m) à

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma(Xb-Ya)&=0\\
\Sigma(Xc-Za)&=0\\
\Sigma(Zb-Yc')&=0
\end{aligned}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{aligned}
b\Sigma X-a\Sigma Y&=0\\
c\Sigma X-a\Sigma Z&=0\\
b\Sigma Z-c'\Sigma Y&=0
\end{aligned}\right\} \cdot \quad (n).$$

En éliminant ΣX et ΣZ de ces trois équations (n), on a $(c-c')\Sigma Y=0$; et puisque $(c-c')$ n'est pas nul, on a nécessairement $\Sigma Y=0$; et les équations (n) deviennent

$$\Sigma X=0, \qquad \Sigma Y=0, \qquad \Sigma Z=0.$$

Or, ces trois équations constituent avec les trois équations (m) les six conditions d'équilibre connues; donc, etc.

X. — *Prémices entomologiques*,

Par M. Jules PUTZEYS,

membre des sociétés entomologiques de France et de Stettin.

(planche v).

I.

Note monographique sur le genre Pasimachus *et sur un nouveau genre voisin.*

Lorsqu'en 1813, Bonelli établit le genre *Pasimachus*, on n'en connaissait que trois espèces, que Bonelli lui-même était fort disposé à réduire à deux. C'étaient 1° *Scarites depressus*. Fab. 2° *Sc. marginatus*. F. 3° *Sc. sublaevis*. Pall.

Voici comment l'auteur le caractérisait :

« Mâchoires droites, obtuses et sans crochet à l'extrémité. Lan-» gue arrondie à son sommet et proéminente au-delà de l'évase-» ment des paraglosses, terminée par deux soies. Palpes fili-» formes. »

Le premier de ces caractères, reproduit par Latreille, est exprimé d'une manière inexacte.

Mr Westwood (1) fait observer que les *Scarites* et les genres voisins n'ont, pas plus que les *Carenum* et les *Pasimachus*, les mâchoires munies d'un crochet terminal. Son observation est très juste, en ce sens que dans aucun de ces genres les mâchoires ne sont terminées, comme dans les Cicindélides, par un crochet articulé ; mais il est permis de douter que Bonelli et Latreille aient entendu autre chose qu'opposer les mâchoires droites, inermes et arrondies

(1) Arcana entomologica, t. 1er, p. 81.

des *Carenum* et des *Pasimachus*, aux mâchoires des *Scarites*. Si donc, au lieu de : *terminées par un crochet*, on dit : *terminées en crochet*, on exprimera d'une manière irréprochable un caractère qui doit être regardé comme très important.

Le second des caractères indiqués par Bonelli est bien établi : mais il n'en est pas de même du dernier : non-seulement les palpes des *Pasimachus* sont en général composés d'articles assez dilatés, mais ces insectes diffèrent des *Scarites*, entre autres en ce que dans ce dernier genre les palpes sont plus grêles et souvent filiformes.

Les autres caractères particuliers indiqués par Bonelli et reproduit par Latreille sont les suivants :

« Corselet prolongé de chaque côté de sa base en un angle droit; » languette plus saillante que chez les *Scarites ;* antennes filiformes; » corps large et court; élytres très fortement rebordées; jambes » intermédiaires manquant des épines qui, chez les *Scarites*, sont » placées au bord externe de ces jambes. »

M. Dejean ajoute que « le menton des *Pasimachus* est plus large, » plus court et presque plane, la lèvre supérieure un peu moins » courte, un peu plus large et dentelée à sa partie antérieure, » les palpes maxillaires un peu moins allongés, et le dernier article » des labiaux presque conique; les antennes ne grossissent pas » vers l'extrémité : les pattes un peu moins grandes et les jambes » antérieures un peu moins palmées que dans les *Scarites ;* qu'enfin, » ces insectes sont d'une couleur noire, un peu bleue ou violette » sur les côtés. »

M. Brullé (1) distingue ainsi les *Pasimachus* des autres Scaritides : « Corselet carré (2), plus large que long et plus large en » avant qu'en arrière; lobe intermédiaire du menton qui, sans » être bifide, le paraît cependant, à cause de deux bourrelets laté- » raux au-delà desquels son extrémité est cachée. (3) Leurs palpes » ont le dernier article un peu élargi et tronqué. Leur lèvre supé- » rieure est sinueuse et inégale. Leurs antennes atteignent presque » la base du corselet. Leurs jambes de devant ont deux digitations

(1) *Hist. nat. des Ins.* V. p. 61.

(2) Cependant M. Brullé cite (ib. p. 62 note 1), comme appartenant à ce genre, le *P. rotundipennis* décrit par M. Chevrolat et dont le corselet est en demi cercle.

(3) Cela n'est exact que pour une seule espèce, le *P. depressus*.

» en dehors. (1) Leur corps est plat, et leurs élytres sont en ovale » tronqué à la base et presque pointu à l'extrémité. (2)

A comparer ces diverses diagnoses, on croirait que le genre *Pasimachus* n'a pas de caractères bien tranchés et bien fixes. Ni M. Dejean, ni M. Brullé ne parlent des caractères principaux indiqués par Bonelli, la forme des mâchoires, et l'absence de dents aux jambes intermédiaires. Cependant ce genre, tel que Bonelli l'a établi, est très-naturel, très-nettement tranché; je ne pense donc pas qu'il convienne, soit en retranchant, soit en ajoutant des caractères, d'en faire sortir des insectes que l'auteur y avait compris, ou d'y faire entrer des insectes tout-à-fait distincts.

Pour mieux tracer la limite qui sépare le genre *Pasimachus* des autres genres voisins, je vais procéder par comparaison. Je caractériserai ensuite un nouveau genre dont la création est devenue nécessaire et que je nommerai *Molobrus*.

Le menton des *Pasimachus* est très large et très court; de même que chez les *Scarites*, il est divisé en deux lobes, au milieu desquels s'élève une forte dent; mais cette dent atteint à peine le niveau des lobes latéraux, tandis qu'elle le dépasse dans les *Scarites*. Dans ce dernier genre (3) la partie du menton comprise entre la base et l'échancrure du milieu est concave, mais coupée par une carène longitudinale partant de la base et atteignant l'extrémité de la dent. Chez les *Pasimachus*, (4) cette partie du menton est très convexe et ne porte aucune trace de carène.

La languette, dans les *Scarites*, est très concave, hérissée de poils dans tout son pourtour supérieur, et munie d'une dent médiane; les paraglosses sont proéminentes et couvertes de poils droits. Chez les *Pasimachus*, la languette est plane, souvent munie d'une canalicule intermédiaire; elle ne porte que deux poils droits au centre et parfois deux autres sur les côtés; les paraglosses sont cachées par les bords latéraux du menton auxquels elles adhérent fortement; de devant, on n'aperçoit que les poils qui les sur-

---

(1) Elles en ont trois, ou plutôt, elles ont une forte dent, souvent peu marquée, qui est située au dessus des deux digitations extérieures.

(2) Ce caractère n'est point général; on ne le rencontre point p. ex. dans le *P. sublaevis*, et moins encore dans le *P. rotundipennis* Chevt. admis dans ce genre par M. Brullé.

(3) Fig. 1ª.

(4) Fig. 2ª.

montent ; ils sont assez longs, raides et dirigés vers le centre de la languette.

Les mâchoires sont légèrement sinuées au milieu, grossissant vers l'extrémité où elles sont parfaitement arrondies, comme dans les *Carenum*. Chez les *Scarites*, elles sont toujours recourbées au bout et terminées en pointe aigue. Dans ce dernier genre, elles portent à leur base externe, au dessous du premier article des palpes, une dent large et spiniforme. Cette dent ne se remarque point chez les *Pasimachus*.

Les palpes maxillaires sont plus épais ; leur dernier article surtout est plus dilaté et tronqué à l'extrémité ; il est plus court que le précédent (1). Chez les *Scarites* ce dernier article est moins dilaté ; l'extrémité en est arrondie et moins large que le milieu.

Les palpes labiaux sont épais dans les *Pasimachus ;* leur dernier article est plus court et tronqué à l'extrémité ; le précédent est plus droit et porte quelques poils courts et parsemés. Chez les *Scarites*, le dernier article de ces palpes est dilaté au milieu, assez allongé ; le précédent est ordinairement plus grêle, souvent courbé ou tordu, et porte à l'intérieur des poils longs et assez serrés.

Le labre qui, chez les *Scarites*, est assez étroit et ordinairement divisé en trois lobes dont l'intermédiaire est le plus étroit et le plus avancé, est, chez les *Pasimachus*, (sauf chez le *sublaevis*) un peu plus large et moins distinctement trilobé. Le lobe du milieu est du double plus large que les autres, et peu proéminent.

Les mandibules sont plus droites, plus courtes, plus planes que chez les *Scarites*. Dans ce dernier genre, elles ont en dessus un large sillon longitudinal (2), commençant devant l'épistome où il est arrondi, et se prolongeant vers l'extrémité. Ce sillon manque dans les *Pasimachus*.

Dans les *Scarites*, la mandibule droite porte ordinairement deux dents, l'une vers la base, l'autre au delà du milieu, et la mandibule gauche une dent très large, divisée en deux. Dans les *Pasimachus*, la mandibule droite ne porte qu'une seule forte dent (indépendamment de quelques petites) *qui est située au milieu.*

---

(1) Excepté dans le *P. sublaevis* où il est, comme en général dans les *Scarites*, de la longueur du précédent. Dans ce *Pasimachus*, il est arrondi mais pas plus étroit à l'extrémité.

(2) Fig. 1^{d} *x*.

La tête est large et plus convexe antérieurement que dans les *Scarites*.

Chez les *Scarites*, les antennes grossissent vers l'extrémité et sont ordinairement presque moniliformes; leur 2e article est plus long que le 3e, et surtout que le 4e. Chez les *Pasimachus*, les antennes diminuent de grosseur vers l'extrémité; elles sont composées d'articles coniques; quelquefois même elles sont filiformes, (*Pas. marginatus*); le 2e article est plus court ou au moins de la même longueur que le 3e; les 2e, 3e et 4e articles sont fortement comprimés à la base et ont extérieurement une carène élevée, ce qui les fait paraître presque triangulaires; cette carène se prolonge quelquefois, mais d'une manière moins distincte, sur les articles suivants.

Le corselet qui, chez les *Scarites*, est faiblement échancré en arrière et souvent prolongé vers l'écusson, a les angles antérieurs arrondis, les postérieurs tout-à-fait nuls ou seulement indiqués par une petite dent, et son impression antérieure est très distincte. Il est, chez les *Pasimachus*, échancré antérieurement et postérieurement, nullement prolongé en arrière, avec ses angles antérieurs aigüs, les postérieurs très marqués, et l'impression antérieure à peine distincte, surtout au milieu. Les épaules sont très marquées, anguleuses, et portent ordinairement une petite dent.

La petite strie à la base des élytres, entre la suture et la première strie, existe dans les *Pasimachus* comme dans les *Scarites;* mais elle est toujours fort peu distincte.

Les parapleures, en carré allongé dans les *Scarites*, sont carrées chez les *Pasimachus*.

Les dents des jambes antérieures, surtout la dent supérieure, sont beaucoup moins marquées; les jambes intermédiaires n'ont point extérieurement et à l'extrémité, comme dans les *Scarites*, une ou plusieurs dents longues et spiniformes; elles ne portent qu'une seule épine, large, peu prolongée et située à la base : 4 ou 5 petites dentelures, égales entre elles, sont ordinairement placées depuis la partie supérieure jusqu'au delà du tibia.

Les trochanters des jambes postérieures, acuminés dans les *Scarites* sont, dans les *Pasimachus*, plus larges et plus dilatés à l'extrémité.

Voici maintenant les principaux caractères qui distinguent des *Pasimachus* le genre *Molobrus*.

Dernier article des palpes maxillaires plus long que le pénultième et grossissant vers l'extrémité qui est arrondie. Paraglosses membraneuses, divergentes sur les côtés de la languette, hérissées intérieurement et postérieurement de poils courts. Tête plus carrée que dans les *Pasimachus ;* les deux impressions longitudinales beaucoup plus marquées. Antennes plus courtes et composées d'articles plus coniques ; aucun des articles ne porte de carène. Corselet tantôt sans angles postérieurs, en demi cercle ; tantôt presque cordiforme avec les angles postérieurs marqués. Elytres ovales, très convexes, leurs angles huméraux arrondis ; des stries ou des sillons profonds, ponctués dans les intervalles ; la petite strie oblique à la base des élytres, entre la suture et la 1re strie, est bien distincte. Au milieu des tibias intermédiaires, une dent assez forte, au dessous de laquelle la jambe semble échancrée : au dessus de cette dent, on en voit encore deux ou trois autres bien marquées. Les poils qui couvrent la partie externe de ces mêmes tibias, sont plus longs et plus serrés que chez les *Pasimachus*. Trochanters des jambes postérieures acuminés comme dans les *Scarites*.

Ces insectes semblent se rapprocher, beaucoup plus que les *Pasimachus* de Bonelli, du genre *Carenum* dont ils ne diffèrent essentiellement que par la forme des palpes labiaux.

PASIMACHUS. *Bon.*

1. *P. depressus.*

Fab. *Ent. Syst.* I, 94, n° 1. — S. E. I. 123 n° 1 (Scarites).
Oliv. III, 36, p. 5, n° 1, pl. 2, f. 15. (Scarites.)
Herbst. *Natur Syst. All. Ins.* X, 254, n° 3, pl. 175, fig. 4. (Scarites).
Paliss. de Beauvois. *Ins. d'Afr. et d'Am.* VII, p. 106, t. 15, fig. 3.
Schoenh. *Syn. Ins.* I, p. 126, n° 1. (Scarites).
Bonelli. *Obs. Ent.* (1813) 2e p., p. 45, n° 1.
Latr. *Hist. Nat. des Crust. et des Ins.* VIII, p. 376, n° 2.
Dejean. *Spec. Gén.* I, 406, n° 1.
Encyclop. Méthod. (Lep. St.-Farg. et Aud.-Serv.) t. X, p. 15.
Aud. et Brullé. *Hist. Nat. des Ins.* V, 61.
Laporte. *Hist. Nat. des anim. art.* I, 65.

Je n'ajouterai que quelques observations à la description très détaillée de M. *Dejean*.

La dent qui s'élève au milieu du menton (1) est accompagnée de deux petits tubercules qui la font paraître bifide. La languette (2)

(1) Fig. 2a.
(2) Fig. 2b.

a, au centre, une canalicule s'étendant de la base, où elle est arrondie, jusqu'au sommet.

Les palpes labiaux (1) ont tous les articles plus allongés dans le ♂ que dans la ♀. Dans ce dernier sexe, l'article terminal est tronqué plus nettement.

Le labre (2) est divisé en trois lobes dont l'intermédiaire est du double plus large que les latéraux. Ces derniers sont plus avancés; dans le ♂, ils sont anguleux, dans la ♀ ils sont arrondis. Dans le ♂, le lobe du milieu est légèrement sinueux et divisé par une ligne longitudinale; dans la ♀ il est arrondi. Toute cette partie de la tête est couverte des rugosités longitudinales dans le ♂ ; dans l'autre sexe, ces rugosités ne se remarquent qu'à la base.

Les dents des mandibules (3) varient par leur forme et par leur nombre, soit chez le ♂, soit chez le ♀.

La carène des 2e, 3e et 4e articles des antennes est très marquée. Chez le ♂, le 1er article est un peu moins gros vers l'extrémité et le 2e un peu moins long que chez la ♀.

Les élytres portent souvent des traces de stries et de points; la strie suturale est quelquefois entièrement ponctuée; vers l'extrémité de l'élytre on remarque parfois de gros points enfoncés, soit en ligne, soit épars.

La dent supérieure des tibias antérieurs (4) est peu marquée dans les deux sexes. Les trois dents sont beaucoup plus rugueuses dans le ♂ que dans la ♀. Chez cette dernière les tibias postérieurs sont plus étroits et les tarses sont beaucoup plus grêles.

2. *P. subsulcatus.* Say.

Say. *Trans. of the Am. Phil. Soc. New. Ser.* p. 19, n° 2.
Dejean. *Spec. Gén.* II, p. 471.
Dejean et Boisduval. *Iconogr. des Col. d'Eur.* I, pl. 22, f. 2.

Cet insecte, que je n'ai point vu en nature, semble être très voisin du précédent. J'en dirai autant du suivant, que je ne connais que par la description trop laconique et par la figure qu'en donne Griffith.

(1) Fig. 2*e*.
(2) Fig. 2*c*.
(3) Fig. 2*d*.
(4) Fig. 2*f*. ♂ ♀.

3. ***Mexicanus.*** Gray.

Anim. Kingd. Ins. p. 274, pl. 12, f. 1.
Laporte. *Hist. nat. des Ins.* I, p. 63, n° 3.

4. ***P. marginatus.*** Fab.

Fab. *E. S.* I, 94. 1. — *S. E.* I, 123. 1.
Oliv. III, p. 5, n° 2, t. 2, f. 20.
Schoenh. *Syn. Ins.* 1, 126, n° 2.
Palissot de Beauvois., p. 106, t. 15, f. 1. 2.
Bonelli. *Obs. Ent.*, 2e p., p. 45, n° 2.
Latr. *Hist. nat. des Crust. et des Ins.*, t. VIII, p. 376, n° 3.
Dejean. *Spec.* I, 407, 2.
Encyclop. méth. (Lep. St.-Farg. et Aud. Serv.) X, p. 16, pl. 181, fig. 8.
Laporte. *Hist. nat. des Ins.* I, p. 63, n° 2.

La dent du menton est large et très concave; la languette (1) est arrondie, légèrement échancrée au centre, avec une canalicule qui n'est point marquée au milieu. Les côtés derrière lesquels sont cachés les paraglosses, sont plus relevés que dans le *P. depressus.* Le labre est semblable à celui du *P. depressus;* les mandibules de même, mais elles sont plus arquées et beaucoup plus lisses et moins rugueuses.

Les antennes sont plus grêles et plus allongées que dans les autres espèces. Leurs articles sont plus cylindriques. Les art. 2—4 sont comprimés extérieurement comme dans le *P. depressus.*

Le corselet, dont la ligne longitudinale atteint le bord antérieur, est plus plane que dans les autres espèces. L'impression transversale antérieure est assez marquée. Comme dans les autres espèces du genre, il porte à sa partie postérieure deux impressions larges et oblongues, mais ici elles sont plus rapprochées du milieu que des bords latéraux. Outre ces deux impressions, on en distingue deux autres arrondies et beaucoup moins profondes vers les angles postérieurs. Les bords latéraux sont longés par un sillon large et profond qui, prenant naissance à l'angle antérieur, n'atteint pas l'angle postérieur.

Il n'y a point de dent à l'angle huméral des élytres.

Les trochanters des jambes postérieures (2) sont encore moins acuminés que dans le *P. depressus.*

Les dents des tibias antérieurs sont peu développées. La dent

(1) Fig. 6*b*.
(2) Fig. 6*f*.

supérieure est très peu marquée ; la seconde est aigue et inclinée ; la 3e, qui est ordinairement digitée (c. à. d. obtuse à l'extrémité et de la même largeur dans presque toute son étendue), est assez courte, large à la base et aigue à l'extrémité.

Les tarses, surtout les postérieurs, sont beaucoup plus grèles et plus allongés que dans le *P. depressus.*

5. *P. sublaevis.* Pall.

Palissot de Beauvois. *Ins. d'Afr. et d'Amér.* VII, p. 107, t. 15, f. 4.
Bonelli. *Obs. ent.* 2e partie, p. 46.
Dejean. *Spec. gén.* I, p. 408, no 3.

Palisot de Beauvois regardait cet insecte comme le ♂ du *P. marginatus* et Bonelli soupçonnait que ce pouvait être la ♀ de la même espèce. Leurs conjectures à cet égard sont détruites depuis que l'on connait les deux sexes, tant du *P. marginatus* que du *P. sublaevis.*

Outre les caractères signalés par les auteurs, voici ceux que j'ai reconnus dans cette espèce qui, sous plus d'un rapport, s'éloigne assez des autres du genre.

La dent du menton (1), concave comme dans le *P. marginatus*, est cependant moins large. Les lobes latéraux, qui sont arrondis dans ce dernier, ont dans le *sublaevis* une petite dent à leur sommet. La languette (2), au lieu d'avoir une rainure creusée depuis l'extrémité jusqu'auprès de la base, ne porte qu'une fossette longitudinale placée près de cette dernière.

Les palpes sont un peu plus allongés dans le ♂ que dans la ♀. Le dernier article des palpes labiaux qui, dans le *P. marginatus*, est assez fortement dilaté et tronqué à son extrémité est, dans le *sublaevis*, beaucoup moins épais, légèrement courbé à sa base et arrondi à son extrémité. Le dernier article des palpes maxillaires est également moins dilaté.

Le lobe intermédiaire du labre (3) est arrondi et de la même largeur, mais plus avancé que les lobes latéraux : ceux-ci sont sinués sur leur bord antérieur ; ils portent au milieu une carène longitudinale, qui dans la ♀ se prolonge en une petite dent aigue.

(1) Fig. 3a.
(2) Fig. 3b.
(3) Fig. 3c.

Les mandibules sont moins courbes que dans le *marginatus ;* elles sont plus rugueuses, surtout chez la ♀ ; les dents sont plus dirigées vers l'extrémité. Dans le ♂, ces dents sont beaucoup plus aigues et les mandibules sont plus étroites.

Les 2e, 3e et 4e articles des antennes sont moins comprimés extérieurement que dans le *depressus*, surtout chez la ♀.

Le corselet, plus convexe, est plus rétréci en arrière ; il ne porte que les impressions ordinaires, c'est-à-dire situées au milieu et la ligne longitudinale n'atteint pas le bord antérieur.

Les jambes sont beaucoup plus courtes dans les deux sexes que chez les autres espèces.

Les tibias antérieurs sont fortement dentés. La dent supérieure est très marquée dans les deux sexes. La partie extérieure est couverte de rugosités qui sont beaucoup plus nombreuses et plus profondes dans la ♀ que dans le ♂.

La dent située à l'extrémité externe des tibias intermédiaires est plus forte, plus large et moins aigue que dans les autres espèces ; elle est rugueuse intérieurement, surtout dans la ♀. Ces mêmes tibias portent, depuis le premier quart jusqu'au delà du milieu, 5 ou 6 petites crénelures, un peu plus marquées en approchant de l'extrémité.

Molobrus. Gen. nov.

1. *M. purpuratus.*

Ater nitidus. Caput transversum, longitudinaliter profunde biimpressum. Pronotum breve, subcordatum, postice coarctatum, in medio leviter emarginatum, angulis anticis productis, posticis rectis, impressione semilunari postice utrinque notatum alteraque minori pone angulos posticos. Elytra lata, ovato-rotundata, postice sinuato-angustata, striis profundis punctisque in illis postice et versus margines crebrioribus atque majoribus impressa. Thoracis elytrorumque margines laterales cupreo-purpureæ.

Long. 29 mill. — Lat ♂ 12 mill., ♀ 13 ½ mill. — Long. anten. ♂ 14, ♀ 12½.

Antennes plus courtes et plus épaisses dans la ♀. Mandibules très rugueuses dans les deux sexes. Labre (1) couvert de rugosités

(1) Fig. 5a.

longitudinales ; son bord antérieur tronqué ; les trois lobes sur la même ligne ; une fossette profonde dans l'échancrure entre le lobe intermédiaire et chaque lobe latéral.

Tête plus large dans le ♂ que dans la ♀.

Corselet presque cordiforme, plus large et moins long que dans le *P. depressus*, plus arrondi sur les côtés, tronqué en avant avec les angles antérieurs avancés et aigus ; le bord postérieur sinueux et échancré dans le milieu, avec ses angles presque droits ; le bord extérieur rebordé et très épais ; impression antérieure effacée au milieu ; ligne longitudinale profonde, n'atteignant pas le bord antérieur et s'arrêtant à une petite impression semi-circulaire assez marquée ; en arrière, à égale distance du bord et du milieu, deux impressions profondes semi-circulaires, se réunissant à la ligne longitudinale ; en dedans des angles postérieurs on remarque deux fossettes arrondies qui se joignent par une impression oblique à l'impression semi-circulaire.

Elytres en ovale très court, plus larges et plus dilatées sur les côtés dans la ♀ que dans le ♂ ; l'angle huméral marqué par une petite dent ; légèrement sinuées à l'extrémité ; elles ont, indépendamment de la strie marginale, 7 stries profondes, surtout postérieurement, ponctuées, avec les points plus gros et plus marqués vers l'extrémité ; une ligne de gros points existe dans toute l'étendue de la strie marginale ; l'intervalle entre cette dernière strie et la 7ᵉ, est marqué d'une rangée de gros points depuis le quart antérieur jusqu'au quart postérieur de l'élytre ; des points semblables situés à l'extrémité de l'élytre envahissent même les intervalles.

Les 1ʳᵉ, 2ᵉ et 7ᵉ stries se réunissent à l'extrémité ; les 3ᵉ et 4ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ se joignent vers le dernier quart de l'élytre.

Tibias antérieurs ayant la dent supérieure moins marquée dans le ♂ que dans la ♀ et leur partie externe plus rugueuse dans ce dernier sexe que dans l'autre. Tarses plus allongés dans le ♂ que dans la ♀.

La couleur de l'insecte est noire, avec un reflet violet tant sur les bords et dans les impressions postérieures du corselet que sur les bords externes des élytres ; bords latéraux du corselet et des élytres d'un cuivreux-pourpré très brillant, avec une ligne d'un vert doré intérieurement ; le fond des stries d'un bleu-violet foncé.

2. *M. splendidus.*

Ater nitidus. Caput transversum, longitudinaliter profunde biimpressum. Pronotum semicirculare, postice rotundatum atque in

medio leviter emarginatum, angulis anticis productis, impressione oblique elongata postice utrinque notatum. Elytra ovata, postice sinuato-angustata, summo apice divergentia, costis 8 *nitidissimis, sulcis* 7 *punctis magnis antice minoribus impressis. Verticis impressiones, pronoti foveæ, ejusdem margines posticæ lateralesque aureo-virides; elytrorum sulcorumque bases, costaque* 8ª *exterius virides; elytrorum limbus rubro-cupreus, auronitens; caput thoraxque subtus viridi-nitentia.*

Long. ♂ 23,28 mill. ♀ 29 mill. Lat. ♀ 8 ½, 10 mill. ♂ 10 ½ mill. — Long. anten. ♂ 7 ½, 9. ♀ 7 ½.

Outre les caractères signalés dans la diagnose et qui établissent les différences existant entre cette espèce et la suivante, il faut remarquer que le corselet est un peu plus rétréci postérieurement, que les élytres sont plus planes, plus allongées, plus rétrécies postérieurement et sinuées à leur extrémité.

Cet insecte, dont je ne possède que trois individus, vient de la cordillère orientale d'Oaxaca. (Talea, Villa alta. 3 à 4000 pieds au dessus du niveau de la mer).

3. *M. rotundipennis.* Chevr. (1)

Chevrolat. *Col. du Mexique*, 2e fasc. nº 1. Mars 1834.

Ater nitidus. Caput transversum, longitudinaliter profunde biimpressum. Pronotum semicirculare, postice rotundatum atque in medio leviter emarginatum, angulis anticis productis, impressione oblique elongata postice utrinque notatum. Elytra ovato-rotundata, summo apice divergentia, profunde sulcata, costis 8 *nitidissimis, sulcis* 7 *punctis magnis antice minoribus impressa. Verticis impressiones, pronoti foveæ, ejusdem margines posticæ lateralesque atque elytrorum limbus coerulei.* Long. 26 ½ mill. Lat. 11 mill. — Long. anten. 12 ½. ♂.

(Mexico).

Observation.

M. Sturm, dans son catalogue imprimé en 1843, mentionne deux autres espèces appartenant au groupe des *Pasimachus* et qu'il a nommées *obtusus* et *virens*. La première est de l'Amérique boréale, la seconde vient du Mexique.

(1) Voyez fig. 4a, 4b, 4c, 4 l, 4e, 4f ♂ ♀.

II.

Descriptions de 62 *espèces nouvelles de Coléoptères appartenant aux familles des* Cicindélides *et des* Carabiques, *avec l'indication des caractères de cinq nouveaux genres.*

—

1. *Cicindela Claussenii.*

Atro-cuprea; elytris fasciis duabus obliquis, tortuosis, dilaceratis, lunulaque apicis, albidis.

Long. 7. — Elytr. 4 ½. — Lat. 3 ½.

Elytra cupreo-purpurea, punctis viridibus irrorata, fasciis 3 albidis notata, 1ª humerali oblique usque ad 3ᵃᵐ suturæ partem descendente, 2ª in medio margine (quam non attingit) incipiente, præcedenti parallela, 3ª terminali, in medio emarginata; fasciis 2 primis irregularibus, dilaceratis, punctisque aliquot elytris concoloribus notatis.

Palpi albidi, articulo ultimo viridi-æneo. Labrum album, dentibus 3 apice nigris, quorum medius prominens, instructum. Mandibulæ viridi-æneæ, basi albidæ. Antennarum articuli 4 primi æneo-cuprei, cæteri picei, pubescentes; articuli primi, præsertim 3ᵘˢ, pilis aliquot albis interne munitis. Oculi prominuli. Vertex planus.

Pronotum quadratum, lateribus rotundatum, bi-gibbum, antice cucullatum, postice bisinuatum.

Scutellum magnum, acutum. Elytra latitudine triplo longióra, lateribus fere parallela, postice paullo latiora, margine postico dentato, apice spinoso.

Pedes viridi-cuprei, femorum basi tibiisque, apice excepto, fuscis; tarsorum articuli primi tres virides, reliqui viridi-violacei. Femora, corpus subtus, abdominis parte media excepta, albo pilosa.

Cette espèce qui vient de la province des Mines au Brésil, où elle paraît commune, a beaucoup de rapports avec la *Cic. apiata* Dej. mais elle en diffère principalement par sa taille de moitié plus petite, par les bandes des élytres plus étroites, beaucoup moins déchiquetées et moins tachetées.

2. *Cicindela ferrugata.*

Atro-ænea nec nitida, elytris oblongo-ovatis, lunula humerali infra dilatata, fascia media abbreviata, maculaque postica rotundata, ochraceis.

♂ Long. 11 ½. — Lat. 4 ½.
♀ Long. 12, 14. — Lat. 5, 5 ½.

Atro-ænea. Oculi prominuli, fuscescentes. Labrum in medio porrectum, unidentatum, castaneum, aliquando nigro-purpureum, in mare æneum, fere rotundatum. Mandibulæ basi cupreo-purpureæ; palpi viridi-cuprei; palporum labialium articulus penultimus fulvus aut albidus, pilis albis longis utroque latere munitus. Antennarum articuli 4 primi nigro-cuprei, basi virides, 2^us^ arcuatus, cæteri cylindrici, pube tenui obscure coerulescenti obtecti.

Pronotum fere quadratum, lateribus parallelis, margine antico in medio prominente, postico vero bi-sinuato; bi-gibbum, sulco medio longitudinali postice profundiore impressum.

Elytra nigro-brunnea, summa basi cuprea, punctulis coeruleis parum distinctis notata, thorace plus duplo latiora, convexiuscula, oblonga, in mare marginibus parallelis, in femina paullo infra humeros latiora, apicem versus nequaquam sinuata (in femina rotundiora), margine extremo crenato-dentato; maculis 3 ferrugineis non nitidis, punctis minutissimis nigris irroratis; 1^a^ humerali, infra latiore, sequenti aliquando pone marginem cohærente; 2^a^ media, lata, oblique versus suturam quam non attingit, descendente; 3^a^ magna, rotundata, versus apicem in medio sita.

Corpus subtus ut et femora pilis albis obtecta. Abdomen lateribus et postice castaneum.

Variat maculis omnibus dilatatis et cohærentibus, ita ut in quoque elytro plaga irregularis ab humero descendens usque ad apicem extendatur.

Mexique (Oaxaca). 5 indiv.

3. *Cicindela palliata.*

Sub-complanata, subtus cupreo-fulgida lateribus albo-pilosis, supra virescenti-cuprea; elytrorum margine integro valde dilatato, intus tridentato, albido.

Long. 9 ½, 10 ½. — Elytr. 6 ¼. — Lat. 3 ¾, 4 ¼.

Palporum labialium articulus ultimus, maxillarium articuli 2 ultimi virides. Labrum albidum, transversum, in medio dente parvo nigro (duobusque in ♂ obsoletis) instructum. Pronotum transversum, margine rotundato. Elytra punctata, marginibus in mare parallelis, apice fere recte truncato, acuto, sutura extrema spinosa; marginibus in femina post medium latioribus, apice sinuato, acuto, sutura extrema spinosa.

Cette espèce qui, au premier aspect, ressemble beaucoup à la *Cic. togata* Laf. en diffère essentiellement. Dans les deux sexes, le dernier article des palpes labiaux est d'un vert brillant; les deux derniers des palpes maxillaires sont de la même couleur, sauf dans quelques ♂ où ils sont alors d'une teinte un peu plus foncée que les précédens.

Le labre est un peu plus avancé; il a, dans les deux sexes, une petite dent noirâtre dans son milieu; dans le ♂ cette dent en a une autre obtuse et à peine distincte de chaque côté. La tête n'a pas les poils blancs que l'on remarque sur toute sa surface chez la *C. togata*. Le corselet est moins allongé, plus large et plus arrondi; il n'a quelques poils blancs que sur les côtés.

Les élytres sont un peu plus larges et moins allongées; dans aucun des deux sexes elles ne sont arrondies; l'extrémité forme un angle distinct à l'endroit où finit le bord latéral; elle est presque tronquée obliquement dans le ♂ et un peu sinuée dans la ♀. La suture, qui se termine en une épine, forme dans les deux sexes la partie extrême des élytres, tandis que chez la *C. togata* les élytres se prolongent encore après cette épine.

Le dessous du corps est comme dans la *C. togata :* mais les deux derniers segments sont ferrugineux.

Venezuela (Cumana). Se trouve dans l'intérieur, sur les terres marécageuses desséchées, où elle est commune.

4. *Cicindela fulgidiceps.*

♂ Long. 10 ½. — Elyt. 6 ½. — Lat. 3 ½.
♀ — 12. — — 8 ½. — — 4 ½.

Viridi-œnea, capite antice et inter oculos cupreo-aureo; pronoto subquadrato, antice paulo angustiore, margine omni albo-piloso; elytris albidis, sutura antice, fasciis duabus angustis abbreviatis, macula media communi, lineisque duabus flexuosis hamatis, viridi-œneis.

Les palpes labiaux et maxillaires sont d'un blanc jaunâtre, avec le dernier article d'un vert brillant ; le pénultième article des palpes labiaux porte des poils longs et assez serrés, disposés des deux côtés ; des poils semblables, mais plus rares, se voient à la base des palpes maxillaires. Les mandibules, qui sont presqu'entièrement recouvertes par le labre, sont d'un blanc jaunâtre à la base, vertes au milieu, noires à l'extrémité. Le labre est très-large, surtout dans le ♂ où il est plus large en avant qu'en arrière : dans ce sexe, son milieu est peu saillant et porte une petite dent noirâtre ; sa partie supérieure et médiane est élevée ; dans la ♀, le labre est moins large, plus prolongé dans son milieu où il est unidenté ; ses angles antérieurs sont plus marqués que chez le ♂. Les antennes ont leurs quatre premiers articles d'un cuivreux très brillant, avec l'extrémité verte ; le 4e n'est pas moins long que le 3e ; le 1er porte un poil blanc à son extrémité extérieure, le 3e plusieurs le long de sa première moitié et 4 ou 5 à l'extrémité : le 4e article en a extérieurement quelques uns assez courts : à son extrémité on en remarque d'autres jaunâtres, beaucoup plus grands chez le ♂ et qui, surtout dans ce dernier sexe, forment une espèce d'aigrette ; les autres articles sont noirs, couverts d'une pubescence cendrée.

La tête est couverte de rides longitudinales ; celles de derrière sont transversales. La partie antérieure et la région entre les yeux sont d'un cuivreux-pourpré éclatant, avec des reflets dorés. Les yeux sont d'un brun rougeâtre.

Le corselet est presque carré, un peu rétréci en avant, à peine arrondi latéralement ; tous ses bords sont couverts de poils blancs assez forts mais peu serrés ; le disque est presqu'entièrement découvert.

L'écusson est aigu, déprimé au milieu ; il porte à sa base une impression longitudinale ; ses bords sont cuivreux.

Les élytres sont plus parallèles dans le ♂ que dans la ♀ : dans ce dernier sexe, elles sont arrondies séparément à l'extrémité : dans l'un et l'autre sexe, la suture se termine par une petite épine. A la partie supérieure et médiane de l'élytre, on remarque une petite ligne courbe de points enfoncés assez gros. Le fond qui est vert bronzé, a presqu'entièrement disparu sous les taches blanches ; il se réduit à quelques lignes dont je vais donner la description : la suture qui est très étroite, excepté dans son premier quart ; une ligne en crochet dont l'extrémité remonte vers l'épaule sans l'attein-

dre ; une seconde dont le crochet, qui est plus épais, descend parallèlement à la suture ; au milieu de l'élytre, sur la suture, une tache composée de deux petites lignes allongées et un peu découpées ; enfin dans la dernière moitié de chaque élytre, une ligne sinueuse, terminée par deux crochets plus épais et dont le dernier a la pointe recourbée en haut. Si l'on voulait décrire les taches blanches, on dirait qu'il existe une lunule humérale, plus épaisse en dessus, une lunule apicale plus épaisse à l'extrémité où elle se redresse le long de la suture, une ligne coudée au milieu, remontant jusque vers la suture, puis la longeant et se recourbant intérieurement, enfin une tache allongée au milieu du dernier tiers de l'élytre ; toutes ces tâches adhérant à une large bordure blanche et entière.

Le corps en dessous est d'un vert cuivreux ; les côtés sont couverts de poils blancs assez longs. Les pattes sont d'un vert bronzé un peu cuivreux, beaucoup plus éclatant. Les jambes, les cuisses, surtout les antérieures et l'extrémité des jambes, portent intérieurement des poils blancs assez longs. Les jambes antérieures sont un peu arquées extérieurement ; les pattes postérieures sont très longues et grèles.

Venezuela (Cumana).

Cet insecte habite exclusivement le bord de la mer, dans les endroits sablonneux.

5. *Cicindela Minarum.*

Long. 8 $\frac{1}{2}$. — El. 5 $\frac{1}{4}$. — Lat. 2 $\frac{3}{4}$.

Subcylindrica, nigro-subcuprea, elytris puncto medio, fascia media angusta arcuata recurva, lunulaque apicis, albidis ; subtus cyanea, tarsis nitide azureis.

Palpes blancs avec le dernier article vert ; le pénultième article des palpes labiaux vert ou obscur chez la ♀ : mandibules jaunâtres à la base, vertes au milieu ; leurs dents et l'extrémité noires. Labre transversal, avec une dent aigue au milieu, et de chaque côté, une dent large et arrondie, surtout chez la ♀. Les quatre premiers articles des antennes d'un vert brillant, les autres noirs, couverts d'une pubescence blanche. Tête d'un cuivreux un peu obscur, sillonnée par des rugosités disposées en divers sens et qui forment un espace assez large et parfaitement arrondi entre les yeux.

Corselet cylindrique, plus étroit que la tête, un peu arrondi sur les côtés, avancé antérieurement, échancré entre les angles postérieurs et le milieu.

Écusson cordiforme; des deux côtés de cet organe, la base des élytres est d'un bleu clair brillant.

Élytres presque cylindriques, assez convexes, un peu élargies postérieurement; l'angle externe de l'extrémité arrondi, quoique marqué; l'extrémité prolongée au delà de la suture qui se termine par une petite épine. Leur fond semble être d'un cuivreux très obscur avec quelques taches noires irrégulières; mais à l'aide d'une forte loupe, on reconnait que la couleur générale est un cuivreux-pourpré doré, parsemé de taches bleues cerclées de vert. Le milieu du bord extérieur porte une tache d'un blanc jaunâtre et allongée, du centre de laquelle part une bande étroite se dirigeant vers la suture qu'elle n'atteint cependant point; elle se recourbe brusquement vers l'extrémité et bientôt se redresse en crochet. Entre cette bande et l'écusson, mais plus près de la suture que du bord extérieur, on distingue un petit point blanchâtre. L'extrémité de l'élytre est occupée par une bande étroite de même couleur, très recourbée en crochet à sa partie extérieure.

Le dessous du corps et les pattes sont d'un bleu bronzé; on voit quelques poils blanchâtres sur les bords du corselet, de l'abdomen et sur les pattes; les trochanters et la base des jambes sont ferrugineux; les tarses d'un beau bleu brillant.

Brésil. (Province des Mines.) 7 indiv.

6. *Casnonia Funckii.*

Long. 11 $\frac{1}{2}$.— Thor. 2 $\frac{1}{4}$.— Elytr. 4 $\frac{1}{6}$.

Atra, antennarum basi, pedibus elytrorumque maculis pallide testaceis.

Caput undique (labro excepto) reticulato-rugosum, pone oculos longitudinaliter rugatum. Labrum leviter emarginatum, foveis 2 longitudinalibus profundis, juxta marginem punctis 3 piliferis impressum.

Clypeus in medio parum emarginatus, lateribus rotundatus. Mandibulæ elongatæ, acutæ, apice piceæ.

Antennarum articuli 4 primi pallide testacei, 5 atque 6 picei, cæteri nigri, pubescentes. Oculi albidi.

Pronotum capite multo angustius, elongatum, rugis transversis profundis undique exaratum, postice latius, lineis 3 parallelis longitudinaliter impressum, ante medium dorso (oblique inspectum) profunde emarginatum.

Elytra oblonga, paullo post medium latiora, apice bispinosa, profunde emarginata; striæ 9 inæqualiter dispositæ, ita ut interstitia 3, 5 et 7 multo latiora sint apice (ubi convexiora) atque basi; interstitia imparia punctis plurimis distinctis impressi sunt. In media marginis parte macula irregularis apparet quæ efformatur maculis 5 oblongis in interstitiis 1, 2, 3 et 4 (a margine) sextaque punctiformi in interstitio 5. Ante apicem maculæ 6 in interstitiis 2, 3, 5, 7, 8 et 9.

Pedes obscure rufescentes, femorum basi et annulo apicali, tibiarumque media parte pallide testaceis.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

7. *Casnonia marginestriata.*

Long. 6 $\frac{3}{4}$. — Thor. 2 $\frac{1}{4}$. — Elytr. 4. — Latr. 2 $\frac{1}{2}$.

Atra, pronoto cyaneo, elytris æneis, in medio lævibus, in omni margine striatis.

Caput nitidissimum, antice strigosum, postice obsoletissime rugatum. Mandibulæ apice piceæ. Antennæ piceæ, articulis 3 et 4 testaceis, duobus primis apice infuscatis. Oculi albi. Labrum transversum, angulis rotundatis, in medio depressum, secundum marginem 6-punctatum. Clypeus truncatus, bifoveolatus. In medio capite, ante verticem, foveola transversa sat profunda, antice recte limitata, foveolæ 2 laterales rugatæ.

Pronotum transversum, rugatum, postice latius quam in *Casnonia Funckii*, sulcis longitudinalibus minus profundis. Pronoti dorsum (oblique inspectum) distincte sed parum emarginatum.

Elytra lata, elongato-quadrata, post medium latiora, postice angustiora, in apice profunde emarginata, bispinosa, delicatissime cælata; in singulo striæ 9 quarum interstitia imparia linea punctorum evidentium notantur; striarum tamen 1-6 vix ullum superest vestigium in disco utriusque elytri, ubi apparet plaga nitidissima, lævis, ovata, quæ neque basin, neque apicem, neque marginem elytrorum invadit.

Pedes fusci, femora basi pallide testacea.

Mexico. (Oaxaca). 1 indiv.

8. *Agra Klugii.*

Nigro-œnea, antennis pedibusque brunneis; elytris apice bispinosis, striato-foveolatis.

Long. 11. — Elytr. 5 $\frac{1}{2}$. — Lat. 3.

Caput latum, oblongum. Palpi nigri, omnium articulorum apice testaceo. Mandibulæ ferrugineæ. Antennæ pubescenti-pilosæ. Labrum sinuatum, in medio elevatum. Clypeus emarginatus, fere bilobus, utrinque rotundatus. Intra antennas foveæ 2 oblongæ, elevatione in medio angustiore separatæ; post hanc elevationem fovea rotundata in medio capite conspicitur; occiput foveam alteram latiorem præbet punctaque plurima sparsa.

Pronotum summa latitudine triplo longior, antice angustatum, usque ad medium dilatatum, dein paullo angustius; fulvo-pilosum, 4-sulcatum atque profunde punctatum et foveolatum; in medio carinula elevata punctis minutis linea dispositis.

Scutellum elongatum, triangulare, lævc.

Elytra thorace dimidio longiora, humeris rotundatis, lateribus paullo ante medium dilatatis, dein angustatis, apice truncato bispinosis; striis 9-punctatis, quarum interstitia sæpe confluunt ita ut foveolas permultas rotundatas efforment; in humeris puncta sunt majora.

Cette espèce, qui vient de Venezuela, ressemble à l'*Agra variolosa*. Kl. Mais elle en diffère par la coloration de ses élytres, par la ligne longitudinale du corselet qui est ponctuée, par les fossettes des élytres plus larges et plus nombreuses, etc.

9. *Calleida basalis.*

Long. 7 $\frac{1}{4}$. — El. 4 $\frac{1}{2}$. — Lat. 2 $\frac{3}{4}$.

Rubro-fulva, capite geniculisque nigris; elytrorum dimidia parte antica viridi.

Tête noire, allongée, plane, lisse; palpes ferrugineux avec le dernier article noir au milieu. Labre bordé de jaune, transversal, plus large que l'épistôme, arrondi vers les angles, échancré en avant, déprimé au milieu. Epistôme légèrement échancré, marqué sur chacun de ses côtés d'un point enfoncé très distinct. La tête porte entre les antennes deux impressions obliques assez profondes,

irrégulières et rugueuses. La partie postérieure du col est ferrugineuse.

Corselet allongé, cordiforme, un peu plus large que la tête, plus étroit en avant et en arrière ; les angles antérieurs sont obtus, les postérieurs droits ; les impressions antérieure et postérieure bien marquées ; la ligne longitudinale profonde et n'atteignant pas le bord antérieur ; la base porte deux impressions allongées.

Élytres allongées, ayant leurs côtés presque parallèles, arrondies à la base et tronquées à l'extrémité ; elles portent des stries dans lesquelles on distingue des points assez distans les uns des autres. Les intervalles sont planes et parsemés de points très petits. La 3e strie porte deux points plus gros, l'un avant le milieu, l'autre au dernier quart. La première moitié des élytres est d'un vert brillant ; cette nuance se continue le long de la suture dans les deux premiers intervalles, mais elle n'atteint pas l'extrémité.

En dessous, les parties latérales de la tête sont noires : l'abdomen est d'un ferrugineux obscur ; les pattes sont testacées, avec les genoux, la base et l'extrémité des jambes ainsi que les tarses, noirs.

Mexique. (Coll. Lacordaire). 1 ind.

10. *Calleida nitida.*

Long. 11 $\frac{3}{4}$. — Elytr. 6 $\frac{3}{4}$. — Lat. 4 $\frac{1}{2}$.

C. smaragdinipenni Reiche simillima, sed major ; pronotum non nigrum, sed viride, latius, præsertim postice : Elytra latiora ; punctum in interstitio 3° magis a basi remotum.

Brésil. 1 indiv.

11. *Calleida cordicollis.*

Long. 5 $\frac{1}{2}$. — El. 3. — Lat. 2 $\frac{1}{4}$.

Rubro-fulva, capite cœrulco, elytris cyanco-viridibus, ore, antennis apice, geniculis, tarsisque nigris ; pronoto cordato ; elytris obsoletissime punctato-striatis, bipunctatis.

Les parties de la bouche sont noires ; l'extrémité des mandibules est fauve. La tête est d'un bleu verdâtre, triangulaire, assez fortement rétrécie derrière les yeux qui sont très gros et très saillans : on voit deux impressions assez courtes entre les antennes ; toute

la surface de la tête paraît lisse, mais à laide d'une forte loupe on s'aperçoit qu'elle est couverte de rides et de points très petits.

Le corselet est d'un fauve rougeâtre, épais, très convexe, muni d'un rebord étroit, moins large que la tête et les yeux, cordiforme, tronqué en avant, arrondi en arrière; les angles antérieurs sont presque droits; les côtés se rétrécissent en arrière; les angles postérieurs sont munis de deux petites dents assez saillantes; toutes les impressions sont peu marquées.

L'écusson est ferrugineux, très déprimé à l'extrémité.

Les élytres sont en carré un peu allongé, plus larges et moins longues que chez la *Calleida rubricollis* Dej., d'un vert bleuâtre; les stries sont à peine distinctes; la 3e porte deux gros points, l'un après le premier quart, l'autre avant le dernier quart de l'élytre.

Tout le dessous du corps est d'un ferrugineux orangé; les genoux, l'extrémité des jambes et les tarses sont noirs.

Mexique. (Oaxaca.) (Coll. Lacordaire). 1 ind.

Cylindronotum. Gen. nov.

Menton sans dent. Palpes courts : le pénultième des maxillaires très court, le dernier deux fois et demie plus long, presque cylindrique, tronqué obliquement; le dernier des labiaux large et sécuriforme, coupé un peu obliquement à l'extrémité. Le premier article des antennes gros et s'élargissant de la base à l'extrémité, et de la longueur du 3e; le 2e de moitié plus court, conique; les autres articles s'élargissant à partir du 4e et de la même longueur que celui-ci. Labre allongé, presque triangulaire, coupé droit en avant; yeux très peu saillans, oblongs. Col à peine distinct.

Corselet de la largeur de la tête, presque cylindrique, anguleux un peu avant le milieu, tronqué en avant et en arrière.

Élytres en carré long, échancrées postérieurement. Tarses antérieurs à premier article cylindrique, le 2e triangulaire, le 3e cordiforme, le 4e plus long et bilobé; les crochets pectinés.

12. *Cylindronotum æneum.*

Long. 4 ½. — Elyt. 3. — Lat. 1 ½.

Nigro-æneum, capite et pronoto profunde punctatis; elytris striato-punctatis, tri-vel quadri-depressis.

Tout l'insecte est d'un noir bronzé, un peu plus clair sur les élytres. La tête et le corselet, tant en dessus qu'en dessous, sont couverts de gros points assez rapprochés. Le labre et les trois premiers articles des antennes sont fauves. La tête est un peu plus élargie vers les yeux; elle se rétrécit légèrement en arrière. Le corselet est à peine plus large; il est presque cylindrique, dilaté angulairement avant son milieu, et un peu rétréci avant les angles postérieurs qui sont saillans, un peu relevés et arrondis. Les angles antérieurs sont arrondis. Les bords antérieur et postérieur sont tronqués. Le rebord des côtés est étroit et très peu saillant; la ligne longitudinale est entière et bien distincte, quoiqu'assez fine.

Écusson triangulaire et déprimé.

Élytres en carré long, arrondies à la base, un peu élargies au milieu, tronquées et échancrées postérieurement; l'angle extérieur arrondi, l'angle sutural droit. Elles portent des stries assez profondes, fortement ponctuées; la 3e et la 4e, la 5e et la 6e se réunissent avant l'extrémité; la seconde porte deux points vers l'extrémité, la troisième un point dans la première moitié de l'élytre. Sur chaque élytre, on remarque trois ou quatre dépressions assez larges et irrégulières, analogues à celles qui existent chez certaines espèces du genre *Calleida*.

Les cuisses sont assez fortes, arrondies, brunes avec l'extrémité plus claire; les jambes sont de cette dernière couleur.

Cayenne. (Coll. Lacordaire). 2 ind.

13. *Miscelus unicolor.*

Long. 12. — Elyt. 6 $\frac{1}{2}$. — Latr. 3 $\frac{3}{4}$.

Niger nitidus; capite elongato, tri-impresso : pronoto cordato, convexo, augulis posticis obtusis, elevatis; elytris elongato-quadratis, punctato-costatis, interstitiis linea punctorum minorum impressis.

Cet insecte, appartient au genre *Miscelus*, établi par M. Klug, (*Jahrb.* I, p. 82) (1). Il a beaucoup de rapport avec le *M. javanus* de cet auteur; mais il est entièrement d'un noir brillant. La tête porte des points très petits et assez distans à sa partie antérieure

(1) *Leptodactyla.* Brullé. (Histoire nat. des Ins.)

et sur le labre et l'épistôme. Entre les yeux se trouvent deux impressions longitudinales assez rugueuses, et au milieu de la tête une dépression irrégulière dans le fond de laquelle on voit une ligne longitudinale enfoncée. Le corselet est plus convexe et moins rugueux que chez le *M. javanus ;* les angles postérieurs sont moins marqués. Les élytres portent des côtes inégalement élevées dont les intervalles ont chacun une ligne de petits points assez écartés les uns des autres ; le fond des stries entre les côtes est assez fortement ponctué.

Java.

14. *Dromius subfasciatus.*

Long. 4 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 2 $\frac{3}{4}$. — Latr. 1 $\frac{1}{4}$.

Niger, undique subtilissime punctulatus ; elytris obscure æneis ; ore, antennarum basi, pedibus elytrorumque maculis quatuor flavis.

Caput triangulare, inter antennas obsolete rugoso-foveolatum. Antennarum articulus 1 pallide testaceus, 2 atque 3 nigro-brunneis apice fulvo, cæteri nigro-brunnei, pubescentes. Labrum porrectum, late emarginatum, antice angustatum, angulis rectis, margine antico testaceo. Clypeus emarginatus, in angulis anticis fovea distincta piligera. Mandibulæ parum arcuatæ, acutæ, fulvæ, apice nigro. Palpi nigro-brunnei, articulis ultimis apice compresso pallide testaceo.

Pronotum transversum, subcordatum, antice posticeque emarginatum, angulis anticis rectis, apice rotundato ; margine laterali rotundato postice angustato, angulis posticis obtusis ; impressio antica distincta ; sulcus longitudinalis medius rugosulus, antice abbreviatus ; impressio postica totam latitudinem occupans ; pone angulos posticos foveæ 2 rotundatæ parum profundæ.

Scutellum latum, breve, triangulare, subtilissime punctulatum, in medio depressum.

Elytra oblongo-ovata, basi quadrata, ante medium paullo dilatata, apice emarginato sinuato-truncata ; obscure ænea, striato-punctata ; striæ 1, 2 et 8 tantum apicem attingentes, cæteræ ante apicem terminatæ nec ibi minus profundæ ; stria marginalis foveolis plurimis medium versus et apice ; stria 3 foveola quadrata ante medium, 2 foveola altera majore oblongo-quadrata in quarta elytri

parte impressæ. In singulo elytro maculæ 2 flavæ, 1ª versus humerum transversa, interstitia 5, 6, 7 et 8, quandoque etiam 4 atque 9 occupans; 2ª fasciam anteapicalem dentatam figurans in interstitiis 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Thorax subtus in medio testaceus, femora testacea, tibiæ obscuriores, tarsi brunnei.

Venezuela (Cumana). 4 indiv.

15. *Dromius multiguttatus.*

Long. 4 ¼. — Elytr. 2 ¼. — Latr. 1 ½.

Testaceus, thorace subtus abdomineque fuscis, capite, pronoto scutelloque nigris, elytris nigro-maculatis.

Caput triangulare, capiti *Dromii subfasciati* simile.

Pronotum breve, transversum, antice sinuato-truncatum, postice emarginatum, angulis anticis rectis, deflexis, margine laterali rotundato, postice parum angustato, angulis posticis obtusiusculis; impressio antica distincta; sulcus longitudinalis medius sat profundus, antice abbreviatus, ante basin subfoveolatus, basi ipsa rugis longitudinalibus exaratus; pone angulos posticos, foveolæ 2 latæ obsoletæ, paulo supra medium utriusque pronoti dimidii foveolæ 2 distinctæ.

Scutellum latum, triangulare.

Elytra oblonga, antice truncata, apicem versus latiora, postice sinuato-rotunda, sutura elevata, profunde striato-punctata, striis in fundo obcuris; striæ 1, 2 et 8 tantum apicem attingentes, cæteræ ante apicem terminatæ nec ibi minus profundæ; stria marginalis foveolis plurimis parvis medium versus et apice impressa; in medio striæ 3æ punctum, alterumque in striæ 2æ quarta ultima parte; striæ, præsertim dorsales, sat obscuræ. Elytra fasciis 3 irregularibus; 1ª paullo ante medium, maculis nigris alternatim in interstitiis dispositis (excepto suturali); 2ª arcuata, quæ in interstitio 2 sequenti jungitur; 3ª multo major, anteapicalis, quæ tamen interstitia 1 et 2 non occupat. Interstitia 6 prima basi in tota latitudine, omnia in medio inter facias 1 et 2 fusca; regio circascutellaris tamen obscurior.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

16. *Cryptobatis hexagona.*

Long. corp. 7 ½. — Elytr. 4 ½. — Lat. 3 ½.

Atra, thorace hexagono, elytris cyaneis, violacco micantibus.

Palporum maxillarium articulus 2^us^ arcuatus, 3^us^ brevissimus, fere conicus, latitudine sequenti æqualis, niger, ultimus cylindricus, apice oblique truncatus, pilosus, niger, summo apice rufescens. Palporum labialium articulus ultimus triangulatus, niger, apice rufescens.

Labrum testaceum, bifoveolatum, antice sinuatum, postice paulo angustius, angulis rotundatis, pluri-pilosis. Clypeus punctulatus, emarginatus, angulis anticis rotundatis, secundum marginemem anticum transversim obsolete foveolatum, postice biimpressum. Capitis pars antica foveis 2 fere quadratis, rugoso-strigosis, quæ carina in occipite elevata separantur, et quarum utroque sulcos 2 obliquos postice emittit; sulci interiores in carina supra descripta angulatim conjunguntur; sulci vero exteriores in media capitis parte in foveolas 2 desinunt. Sulcus sat profundus secundum oculum utrumque conspicitur, ultra quem punctum distinguitur; sulci margine pone oculos nigro. Oculi pars postica capitis prolongatione fere ommino tegitur.

Pronotum transversum, nitidum, lævissimum, convexum, antice emarginatum, postice modice prolongatum ibique bisinuatum, angulis anticis obtusis, fere rotundatis, lateribus ante medium angulatis, dein angustius, angulis posticis fere acutis, prominulis; margo anticus reflexus. In medio linea longitudinalis parum distincta quæ neque marginem anticum neque posticum attingit, et ante utrumque in fovea oblonga effunditur.

Scutellum latum, triangulare, obsolete rugatum, transversim impressum, rufum.

Elytra elongato-ovata, ante medium latiora, postice rotundata, apice sinuato-truncata, cyaneo-violaceo micantia, depressionibus pluribus lineisque punctorum impressa; in interstitiis puncta plura sparsa minora. Depressiones præcipue conspiciuntur, 1^a^ elongata in media elytrorum parte inter 1 et 3 interstitia; 2^a^ in primo elytri tertio incipit in interstitio 2 et arcuatim usque ad 5 pervenit; elevatio oblonga ante apicem striæ 4^æ^, alteraque major ovata post medium elytri pone marginem.

Corpus subtus rufum; femora rufa, geniculis nigris; tibiæ tarsique nigri, unguiculis rufis.

Brésil. (Province des Mines.) 1 ind.

Observation.

M. Laporte a décrit (*Études entom.*, p. 49) trois espèces de Lébiites appartenant à son genre *Chelonodema* (*Lia* Esch.) 1° *variabilis*; 2° *affinis*; 3° *scripta*.

M. Sturm, à la suite de son dernier catalogue (pag. 326 et 327.) donne à son tour la description et la figure de trois espèces du même genre : 1° *fasciata*; 2° *multipunctata*; 3° *decempunctata*.

M. Chevrolat (*Rev. zool.* 1844, pag. 197.) croit devoir rectifier la description donnée par M. Laporte de la *L. variabilis*, dont le corselet, ajoute M. Chevrolat, ne porte pas de points noirs, et dont les élytres ont, non pas 6 points noirs, mais seulement 5 dont le 1^er^, isolé, est le plus gros.

Mais il n'a point remarqué que la description, ainsi rectifiée, convient de tous points à la *L. affinis*, Lap. (*decempunctata*, St.) Je possède tant cette dernière espèce que la *L. variabilis*, et je puis affirmer que les descriptions qu'en donne M. Laporte, bien qu'incomplètes, sont cependant exactes en ce qui concerne tous les caractères qu'il indique. Je n'entends, du reste, point préjuger la question de savoir si les *Lebia testacea* Dej., *variabilis* Lap., *affinis* Lap., *scripta* Lap., *notata* Br., *fasciata* St. et *multipunctata* St., ne sont pas des variétés d'un même type.

17. *Lia Comma.*

Long. 11 $\frac{1}{2}$. — Elyt. 8 $\frac{1}{2}$. — Lat. 5 $\frac{1}{4}$.

Testacea, elytrorum maculis decem nigris, quarum duæ suturæ proximæ majores, infra angustiores; antennis apice, geniculis tarsisque nigris.

Cette espèce, qui est de la même taille que la *L. punctata* St., a le corselet et les élytres plus étroits; le dernier article des palpes est noir avec l'extrémité fauve; les 2^e^ et 3^e^ articles des antennes sont tachés de noir; les suivants sont noirs en totalité. Dans la *L. punctata* les trois premiers articles des antennes sont entière-

ment testacés ainsi que la base du quatrième ; les points qui couvrent les élytres sont moins serrés et moins marqués ; la tache supérieure qui est la plus grosse dans la *L. punctata*, est transversale dans la *L. comma ;* la plus grosse est celle qui avoisine la suture ; elle est en forme de virgule ; la plus extérieure des deux taches de l'extrémité est de moitié moindre que l'autre. Le bord externe des élytres, tant en dessus qu'en dessous, n'est pas bordé de noir. Les deux tibias antérieurs sont bruns extérieurement.

Brésil. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

Lia multipunctata. St. variet.

M. Lacordaire possède une variété qui ne porte aucune trace des deux gros points placés près de l'écusson. La troisième bande est composée de quatre points bien marqués ; la quatrième a un troisième point entre le point extérieur et celui qui est près de la suture.

Brésil.

18. *Lia albo-sinuata.*

Long. 13. — Elytr. 8 — Lat. 6.

Dilute brunnea, pronoto bi-maculato, elytris fasciis duabus albis nigro-marginatis, interruptis.

La tête est triangulaire, légèrement rugueuse. Le labre est avancé, presque carré. Les deux derniers articles des palpes sont noirs avec l'extrémité testacée ; les trois premiers articles des antennes sont fauves avec la base du troisième noire ; les autres sont noirs et pubescens. A la base des antennes on remarque deux points noirs et entre les yeux deux impressions assez marquées qui se réunissent en arrière.

Le corselet, qui est transversal, est sinueux et peu prolongé en avant ; les angles antérieurs sont arrondis, les postérieurs sont relevés et presque droits : tout le pourtour du corselet est noir ; il est marqué au milieu de deux points de la même couleur.

Les élytres sont de la même forme que dans les espèces voisines, mais plus larges ; elles sont striées et ponctuées de même ; les points qui les couvrent sont peu nombreux et peu enfoncés. Chaque élytre porte deux bandes irrégulières d'un jaune blanchâtre, marginées de

noir, ayant chacune trois dents en dessus et autant en dessous; elles partent du bord marginal et ne dépassent pas le second intervalle : la première est située un peu en avant le milieu, la seconde au dernier quart des élytres. Le bord extérieur des élytres est rougeâtre, le bord terminal noir, de même que les genoux et les tarses.

Brésil. (Coll. Lacordaire). 1 ind.

Lia fasciata. Sturm. Variet.

Cette variété, qui vient du Brésil et qui fait partie de la collection de M. Lacordaire, a les palpes entièrement ferrugineux; les élytres, sauf la base et la partie postérieure en arrière des quatre petites taches, sont d'un jaune très clair et presque blanchâtre; les deux taches supérieures ne sont point séparées et forment une bande régulière; la bande du milieu, au lieu d'être échancrée à sa partie antérieure, est dilatée sur la suture.

19. *Lebia longipennis.*

Long. 6. — Elyt. 4 $\frac{1}{2}$. — Lat. 2 $\frac{3}{4}$.

Rufa; elytris cyaneis, margine pallide rufescente.

Caput brunneum, ovatum, nitidum, parcius punctulatum, in medio foveolatum, clypeo leviter emarginato, labro in medio concavo.

Pronotum transversum, antice posticeque truncatum, angulis anticis rotundatis, posticis rectis, elevatis; lateribus rotundatis late depressis; in medio convexum, rugulis transversim undatis parum evidentibus impressum, linea media longitudinali marginem anticum non attingente.

Scutellum triangulare, rufum.

Elytra oblonga, humeris rotundatis, apice oblique sinuato-truncatis, striata, interstitiis convexiusculis, interstitio 3 basi foveolato; 3 versus apicem puncto majore impressum : linea punctorum minimorum in 7° intervallo; foveolæ plures secundum marginem.

Abdomen nigrum. Tibiæ canaliculatæ.

Brésil. (Prov. des Mines). 1 indiv.

20. *Lebia nigriventris.*

Long. 7 ½. — Elyt. 5. — Lat. 4.

Ferruginea, elytris viridi-cœruleis, rufo-marginatis.

La tête est triangulaire, un peu obscure, rugueuse; la pointe des mandibules est noire : le labre est avancé, arrondi; il a dans son milieu une ligne longitudinale enfoncée; l'épistôme est échancré et marqué de deux fossettes latérales.

Le corselet est transversal, peu échancré antérieurement, prolongé postérieurement; tous ses angles sont convexes et il est un peu rétréci postérieurement. Il est ferrugineux avec les bords plus clairs.

Ecusson ferrugineux.

Élytres larges, en carré un peu allongé, légèrement élargies postérieurement, tronquées et sinuées à l'extrémité. Elles sont d'un beau vert, étroitement bordées de ferrugineux tant aux bords extérieur et postérieur que sur la suture. Elles portent des stries bien marquées; la troisième a deux points enfoncés, l'un au premier tiers, le second au dernier tiers de l'élytre. La 1re strie porte à sa base extrême un point plus gros. Le bord antérieur est relevé : il est fortement échancré à la hauteur des 2e et 3e stries.

Les pattes, à l'exception des tarses, sont d'un testacé pâle. L'abdomen est couleur de poix.

Cette espèce, qui a quelques rapports avec la *L. chloroptera* Chaud., vient du Mexique.

(Coll. Lacordaire). 2 ind.

21. *Lebia pendula.*

Long. 8 ½. — Elytr. 6. — Lat. 4 ¼.

Testacea, capite, thoracis disco, plagis duabus suturalibus linea connexis, punctulisque quatuor nigris.

D'un jaune testacé. La tête est noire en dessus, sauf le labre, les palpes et les antennes; elle est couverte de rugosités très marquées. Le labre, ferrugineux, est avancé, presque carré, déprimé au milieu; l'épistôme est également ferrugineux; il est aussi échancré et marqué de deux points latéraux. Les yeux sont blancs, très proéminens.

Le corselet est transversal, peu échancré antérieurement. Ses angles antérieurs sont tout-à-fait arrondis, ses côtés parallèles et droits, les angles postérieurs bien marqués et presque droits : il est un peu prolongé en arrière. Tout le disque, qui est d'un noir intense, est chagriné ; la ligne longitudinale est assez marquée ; les impressions postérieures sont peu enfoncées et remontent assez haut. L'écusson est pâle, triangulaire. Les élytres sont ovales et s'élargissent vers l'extrémité ; leurs stries sont très marquées ; les intervalles sont convexes. Autour de l'écusson on voit une tache noire commune à peu près carrée, occupant les 4 premiers intervalles, se terminant en pointe vers l'extrémité, longeant la suture dans le premier intervalle et se joignant au milieu de l'élytre à une seconde tache centrale, ovale, qui ne dépasse pas la troisième strie et se termine un peu après le premier quart de l'élytre où elle est tronquée et n'occupe plus que les deux premiers intervalles. On voit en outre au milieu des 7e et 8e intervalles une tache ronde, puis deux autres plus petites après le milieu des 6e et 7e, et enfin une quatrième au dernier quart du 4e intervalle.

En dessous, la tête est noire inférieurement et le corselet également noir sur les côtés. Les tarses sont ferrugineux.

Brésil. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

22. *Lebia Minarum.*

Long. 3 $\frac{3}{4}$. — Elytr. 2 $\frac{1}{2}$. — Latit. 1 $\frac{1}{2}$.

Cyanea, nitida, pronoti margine late albido ; antennarum, femorum basi tarsisque rufis.

Caput latum, ovatum, undique rugis longitudinalibus æqualibus obtectum. Clypeus emarginatus, in medio elevatus, glabratus, nitidissimus. Labrum parum prolongatum, piceum, antice ferrugineum. Mandibulæ piceæ, apice ferrugineæ. Palpi apice rufi. Antennarum articuli 3 primi fulvi, cæteri nigro-pubescentes.

Pronotum capite vix latius, transversum, antice emarginatum, postice subtruncatum, angulis anticis rotundatis, posticis rectis : lateribus rotundatis, albidis, late marginato-depressis ; leviter canaliculatum, rugis longitudinalibus exaratum.

Scutellum triangulare, piceum.

Elytra thorace plus duplo latiora, late ovata, apicem versus latiora, apiceque ipso oblique sinuato-truncata, leviter punctato-striata.

Pedes nigro-picei, tarsis dilutioribus, femorum basi rufa.

Abdomen nigrum, piloso-punctulatum, ultimo segmento apice rufescente.

Brésil. (Prov. des Mines). 4 ind.

23. *Lebia marginata.*

Long. 6. — Elytr. 4. — Latr. 3 $\frac{1}{2}$.

Caput ovatum, antice deplanatum, rugis undatis longitudinalibus undique impressum, quæ ante verticem triangulariter sunt dispositæ. Clypeus ferrugineus; labrum testaceum. Palpi, antennarum articuli 3 primi pallide testacei, cæteri fulvi, cylindrici, tomentosi, cujusque articuli apice pilis quibusdam ridigis albis munito.

Pronotum transversum, fere hexagonum, antice truncatum, postice prolongatum, bisinuatum, angulis anticis nullis; lateribus rectis, parallelis, angulis posticis recte obtusis, elevatis; in medio viridi-aureum, nitidum, longitudinaliter profunde undato-rugosum, margine toto pallide testaceo atque nisi antice, lævi; in medio sulcus longitudinalis antice profundior; postice carinula elevata.

Scutellum triangulare, testaceum. Elytra brunneo-viridia, elongato-quadrata, pronoto fere duplo latiora, ad humeros rotundata, in medio latiora, postice emarginato-truncata, striis lævibus, antice et versus marginem profundioribus, exarata; striæ 1ª et 7ª tantum apicem attingunt et ibi conjunguntur; stria 3ª punctis 2, 1 ante medium, 2 in quarta elytri parte; stria marginalis pluri-foveolata. Elytrorum basis, margo lateralis, 5ⁱ intervallis basis idem ac 6ⁱ, macula postica 2, 3, 4 et 5 occupans, pallide testacei.

Femora compressa.

Caput subtus, thorax et abdomen obscura. Elytrorum margo inferior femoraque pallidiora.

Variat capite thoraceque atro-brunneis, elytrorumque fascia postica deficiente.

Brésil. (Prov. des Mines).

24. *Lebia Heydenii.*

Long. 5 $\frac{3}{4}$. — Elytr. 4. — Lat. 3.

Testacea, elytrorum macula scutellari, sutura fasciaque postica anchoræformi, nigris.

Caput ovatum, nitidum, lævе, antice impressione triangulari exaratum. Labrum elongatum, angulis anticis rotundatis. Oculi albicantes. Pronotum ut in *Leb. scutellata* sed angustius, lævе, lateribus paulo magis rotundatis.

Elytra oblonga-ovata, postice parum latiora, apice sinuato-truncata, profunde striata, interstitiis convexis; in 3° intervallo puncta 2 cujus anterius plerumque parum est distinctum. Plaga triangularis nigra ab humeris usque ad quartam elytrorum partem ubi ad apicem protendit, 1^um^ cujusque elytri intervallum occupans; in medio elytri jungitur fasciæ anchoræformi antice posticeque acutæ, versus latera angustiori et elevatæ. Sutura fere usque ad apicem nigrescit.

Corpus subtus, femora et tibiæ antennarumque basis pallidiora.

Nouvelle Grenade. 1 ind.

25. *Lebia scutellata.*

Long. 7. — Elytr. 4 ¼. — Lat. 3.

Fulvescens, macula scutellari fasciaque postica nigris.

Caput ovatum, rufum, nitidum, antice concavum, foveolisque 2 impressum, vertice et parte postica rugulis longitudinalibus punctisque parvis impressum. Clypeus elongatus, pallide rufescens. Oculi nigri, prominuli. Antennæ basi dilutiores, apice tomentosæ, pilis longioribus quibusdam albidis erectis.

Pronotum transversum, antice angustius, margine anteriori truncatum, postice utrinque emarginatum et postice rotundatum; angulis anticis rotundatis, marginibus dein rectis et parallelis, angulis posticis rectis, elevatis; margine laterali lato, depresso; sulcus longitudinalis profundus; discus reticulato-rugosus.

Elytra ovata, postice latiora, in tertia parte postica convexiora, apice oblique sinuata, striis punctatis latis atque profundis impressa, interstitiis convexis; stria 3ª punctum gerit ante medium, alterumque majus in tertia parte postica elytri. Macula nigra transversa in elytris circa scutellum conspicitur, quæ 4 prima interstitia complectitur; ultra medium fascia nigra lata antice bidentata, postice unidentata usque ad striam marginalem extenditur, nec marginem ipsum occupat et postice ante apicem desinit.

Femora compressa, pallida; tibiæ canaliculatæ.

Brésil (Prov. des Mines). 1 ind.

26. *Lebia centromaculata.*

Long. 6 $\frac{1}{4}$. — Elytr. 4. — Latr. 3.

Pallide testacea, capite pronotoque rufis; elytrorum sutura anterius maculaque media postica trilobata, nigris.

Caput ovatum, nitidum, lævc, antice deplanatum; oculi prominuli, albidi.

Pronotum transversum, rugulosum, antice late emarginatum, postice sinuatum, angulis anticis rotundatis, posticis obtusis, elevatis; in medio sulco longitudinali basin non attingente impressum.

Elytra oblonga, ultra medium paullo latiora, postice oblique truncata, fortiter striata, interstitiis transversim rugulosis; stria 3a puncto postico alteroque anteriore parum distincto impressa; interstitia convexa; paullo ultra medium macula nigra antice angustior, postice latior trilobata, quæ ultra striam 4am non progreditur, lobo intermedio majore, rotundato; interstitium 1um nigrum a scutello usque ad maculam.

Antennarum articuli ultimi, tibiæ leviter canaliculatæ tarsique fusci.

Mexique (Oaxaca). 1 indiv.

27. *Lebia rugiceps.*

Long. 5 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 3 $\frac{1}{2}$. — Lat. 2 $\frac{1}{2}$.

Testacea, capite, elytrorum macula scutellari triangulata maculisque 2 elongatis lateralibus, fascia tenui undata unitis et apice, nigris.

Caput nigrum, ovato-elongatum, rugis longitudinalibus undique tectum. Labrum testaceum, postice foveolatum. Oculi albi. Antennarum articuli 3 basales testacei, reliqui obscuri.

Pronotum transversum, antice parum emarginatum, postice truncatum, versus angulos anticos rotundatos parum angustius; margo lateralis pallidior; fere glabrum, rugulis parvis sat obsoletis.

Elytra oblonga, paulo post medium nonnihil dilatata, apice oblique sinuato-truncata, profunde striata; in interstitio 3° puncta 2 majora; interstitia lævia, convexa; macula præ-scutellaris nigra, triangularis, 4 prima interstitia occupans; altera apicalis, primæ

juncta linea nigra secundum suturam; ab humeris usque ad quintam marginis partem macula altera primum angusta, in medio dilatata, ubi ramulum angulatum versus suturam emittit ; fascia communis apicalis ultra striam 3^am^ non extenditur. Tibiæ canaliculatæ.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

28. *Lebia C-nigrum.*

Long. 5. — Elytr. 2 ½. — Lat. 2 ½.

Testacea, capite pronotoque fulvis; elytris annulo superiore versus marginem aperto, nigro-brunneo.

Caput ovatum, lævissime rugosum, antice bi-impressum, pone oculos oblique bi-foveolatum, clypeo leviter emarginato, labro porrecto, transverso, testaceo ; oculi albidi.

Pronotum transversum, antice sub-emarginatum, apice sinuatum, angulis anticis rotundatis, posticis obtusis elevatis, lateribus mediis fere rectis ; rugulis obsoletis in medio et antice evidentioribus exaratum ; foveola parva in sulco medio longitudinali ante marginem anticum conspicitur.

Elytra oblonga, ante apicem dilatata, apice ipso sinuato-rotundato; profunde striata, stria 3^a^ bipunctata, interstitia convexa, transversim rugulosa ; in superiore elytrorum parte macula nigro-brunnea littera C quodammodo efformans, cujus pars superiora regione sub-humerali scutellum versus dirigitur, dorsum suturæ adhæret, parsque inferior in fasciam obliquam intus emarginatam, extus tridentata versus marginem extenditur ; quæ fascia latior præsertim versus suturam, dentes emittit in interstitia 1, 3 et 5, dein oblique ascendens, ante marginem desinit; suturæ pars inferior infuscata.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

29. *Lebia Cumanensis.*

Long. 6. — Elytr. 4. — Latr. 2 ½.

Testacea, capite infuscato, pronoto maculis 2 nigris elongatis; elytris striatis, annulo ovato, irregulari nigro in parte superiori notatis.

Elle a quelque ressemblance avec la *L. C-nigrum ;* elle est plus

grande ; son corselet est plus large, ses élytres sont plus allongées ; la tête est un peu obscure au milieu ; le disque du corselet porte de chaque côté une ligne noire, assez large ; la tache noire des élytres se prolonge sur l'épaule, et sur le bord marginal jusqu'au milieu ; de là elle devient beaucoup moins distincte et plus irrégulière ; elle traverse l'élytre et va rejoindre la suture ; sur le 4° intervalle, elle se prolonge angulairement comme dans la *L. angulata*. Dej.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

30. *Lebia annulipennis.*

Long. 5 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 3 $\frac{3}{4}$. — Lat. 2 $\frac{3}{4}$.

Rufa, antennarum basi, pedibus elytrisque testaceis ; his annulo nigro, versus humerum aperto maculatis.

Caput nitidum, lævc, impressionibus anticis 2 postice conniventibus ; labro porrecto, postice depresso ; clypeo levissime emarginato.

Pronotum anguste transversum, antice truncatum, postice parum prolongatum ibique rotundatum, lateribus parallelis, angulis anticis rectis, posticis vero obtusis.

Elytra oblongo-ovata, e medio latiora, postice rotundato-truncata, striata, intertitiis convexis ; macula nigra annularis, quæ in medio baseos incipit et in quinta elytri parte suturam attingit, illam in 1° interstitio prosequitur usque ad mediam elytri partem ; inde usque ad 4^{um} intertitium descendens, interstitio 2' (a margine) jungitur et desinit in humeros, ita ut interstitia 5 atque 6 basi sint immaculata.

Tibiæ leviter canaliculatæ.

Abdomen testaceum, punctatum, parce pilosum, ultimo segmento apice profunde emarginato, quasi bifido.

Brésil (Prov. des Mines). 1 indiv.

31. *Lebia maculicollis.*

Long. 4 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 3. — Lat. 2 $\frac{1}{4}$.

Testacea, capite, thoracisque disco rufis ; elytris brunneo-maculatis.

Caput latum, nitidum, lævc, punctis 2 antice totidemque pone oculos impressum ; mandibulæ apice obscuræ ; oculi albidi.

Pronotum transversum, antice truncatum, postice bisinuatum, lateribus rectis, angulis anticis rotundatis, posticis obtusis; disco rufo, in medio pallidiore, undique transversim rugato, lateribus testaceis.

Elytra ovata, post medium dilatata, apice oblique rotundato-truncata, profunde striata, striis infuscatis, interstitiis convexis; ante mediam elytrorum partem annulum conspicitur brunneum, cujus partes ante-scutellaris atque posterior crassiores sunt : color elytrorum intra annuli margines pallidior. Tarsi rufi.

Venuzela. (Cumana). 2 indiv.

32. *Lebia rotundipennis.*

Long. 3 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 2 $\frac{1}{2}$. — Lat. 2.

Nigro-brunnea, capite thoraceque rufo-brunneis, elytris latis, testaceis, punctis quibusdam fasciaque media dentata, nigris.

La tête est triangulaire ; le labre est avancé et sillonné longitudinalement au milieu ; deux impressions longitudinales assez profondes se remarquent entre les antennes.

Le corselet est à peine plus large que la tête, transversal, rétréci postérieurement ; le bord antérieur est échancré, le bord postérieur prolongé et arrondi. Les angles antérieurs sont droits, mais arrondis à l'extrémité; avant le milieu les côtés sont droits et parallèles ; au tiers de la longueur du corselet, ils se dilatent en un angle très ouvert, mais distinct. Les angles postérieurs sont relevés, saillans et aigus. Le sillon longitudinal du milieu est large et bien marqué; le disque porte des deux côtés, un peu en avant le milieu, deux fossettes arrondies.

Les élytres sont courtes, larges et presque orbiculaires. Leurs stries sont assez profondes et les intervalles convexes. Leur couleur est plus claire que celle de la tête et du corselet. On y remarque un peu après le milieu, une bande noirâtre irrégulière dont la partie supérieure se trouve sur les 4e, 5e et 6e intervalles, la partie supérieure sur les trois premiers. Entre cette bande et la base se trouvent trois points de la même couleur, l'un contre la 2e strie, les deux supérieurs contre 3e. Cinq ou six points semblables occupent toute l'étendue de la strie marginale; plusieurs intervalles, surtout vers la base, sont un peu obscurs.

Le dessous du corps est d'un brun obscur ; les segments abdominaux sont bordés d'une couleur plus claire.

Cayenne. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

33. *Lebia X-nigrum.*

Long. 4. — Elytr. 3. — Latr. 2.

Fulva, capite rufo, pronoto nigro-bilineato ; elytris testaceis, maculis 2 nigris extus emarginatis ; antennarum basi pedibusque, geniculis exceptis, pallide testaceis.

Caput latum, nitidum, lævc, impressionibus 2 antice punctisque 2 pone oculos griseos. Clypeus antice truncatus. Labrum rotundatum, in medio canaliculatum. Mandibulæ apice nigræ.

Pronotum latum, transversum, antice distincte emarginatum, postice paullo angustius, lateribus rotundatis late marginatis, angulis posticis obtusis, elevatis ; in medio lineæ 2 nigræ longitudinales.

Elytra elongato-ovata, post medium latiora, postice rotundato-truncata, striata ; interstitium 3^m^ bi-punctatum ; in utroque elytro macula semilunata quarum connexio litteram X efformare videtur ; macula ista in regione scutellari nascitur ubi major, et interstitia 4 prima occupat ; in medio interstitium 2^m^ non transgreditur ; apice (ubi ramulum emittit in interstitiis 2 et 4 usque ad elytri quartam partem ultimam) desinit in interstitio 5° ; maculæ 3 minus distinctæ adhuc conspiciuntur, 1^a^ elongata in humero (quæ tamen quandoque deficit), altera in medio versus marginem, ultima transversa in apice ipso.

Brésil (Prov. des Mines). 8 indiv.

34. *Lebia nigro-fasciata.*

Leb. X-nigrum simillima, sed minor ; pronotum antice minus emarginatum, postice nullo modo angustius ; elytrorum macula latior, antice humerum attingens, postice crassior et oblique usque ad striam marginalem ascendens.

Brésil (Prov. des Mines). 1 indiv.

35. *Lebia circularis.*

Long. 3 $\frac{1}{2}$. — Elyt. 2 $\frac{1}{4}$. — Lat. 1 $\frac{1}{4}$.

Fulva, capite pronotoque fulvo-ferrugineis, elytris testaceis, an-

nulo antico nigro, apice infuscatis; palpis, labro, antennarum basi pedibusque pallidis.

Caput antice latum, lævc, impressionibus 2 ante verticem postice conniventibus, punctoque pone oculos; clypeus in medio elevatus.

Pronotum transversum, longitudine duplo latius, antice emarginatum, basi sinuatum, angulis anticis rotundatis, lateribus fere rectis; angulis posticis rectis, prominulis, elevatis; lateribus et antice longitudinaliter rugosum; in disco vero lævissime transversim rugulosum; margo lateralis late depressus, testaceus.

Elytra convexa, fere rotundata, postice paullo latiora ibique oblique sinuato-truncata, profunde lævi-striata, striis transversim rugulosis, interstitiis convexis, 3° bi-punctato; macula nigra ut in *Leb. angusticolli*, sed regione scutellari propinquior; deus posterior 4^{um} interstitium tantum occupat.

Brésil (Prov. des Mines). 1 indiv.

36. *Lebia Bonellii.*

Long. 4 $\frac{3}{4}$. — Elyt. 3. — Latr. 2 $\frac{1}{4}$.

Testacea, capite, elytrorum sutura, macula humerali, fascia scutellari abbreviata alteraque tripartita, nigris.

Tête noire, couverte de rugosités transversales, excepté sur le labre et l'épistôme qui sont lisses et d'une couleur ferrugineuse. Antennes d'un brun obscur avec les trois premiers articles et la base du quatrième testacés.

Corselet transversal, échancré en avant, prolongé en arrière; les côtés droits et parallèles, les angles antérieurs très arrondis, les postérieurs presque droits. Il est entièrement chagriné, sauf sur les bords où il est plus pâle.

Ecusson ferrugineux, triangulaire.

Élytres plus larges que le corselet, ovales, élargies postérieurement, tronquées et sinuées à l'extrémité; elles sont striées; la 3° strie porte deux points; les intervalles sont convexes. La région scutellaire est occupée par une tache noire, presque carrée, qui ne dépasse pas le 4° intervalle. Un peu après leur milieu, les élytres portent une large bande formée de trois taches, l'une ovale, placée sur la suture, les deux autres en carré allongé, situées vers le bord externe de chaque élytre.

La suture est noire et les épaules portent l'empreinte d'un petit point noir allongé.

La tête est obscure en dessous ; les cuisses sont d'un testacé pâle.

Mexique. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

37. *Lebia granaria.*

Long. 3 $\frac{3}{4}$. — El. 2 $\frac{3}{4}$. — Lat. 2.

Testacea, pronoto, antennis pedibusque fulvis; elytris nigris, margine maculisque 2 rotundatis apiceque testaceis.

Caput ovatum, lævе, puncto pone oculos. Clypeus transversim impressus. Oculi albicantes.

Pronotum transversum, antice late emarginatum, apice arcuatum, lateribus rotundatum, post angulos posticos profundius emarginatum, angulis anticis rotundatis, posticis vero obtusis; leviter rugosum.

Elytra breviter ovata, post medium paullo dilatata, apice rotundata; profunde striata, interstitiisque convexis; in stria 3ª puncta 2 conspiciuntur, 1^{um} ante, 2^{um} post medium; in tertia cujusque elytri parte macula testacea rotunda, quæ a 2° usque ad 7^{um} intervallum extenditur; apex ipse fascia testacea occupatur quæ in suturam atque in marginem lateralem adscendit.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

38. *Lebia angusticollis.*

Long. 3 $\frac{3}{4}$. — Elytr. 2 $\frac{1}{4}$. — Lat. 1 $\frac{1}{2}$.

Fulva, elytris testaceis, annulo superiore irregulari elongato nigro-brunneo; antennarum basi pedibusque pallide testaceis.

Caput angustum, nitidum, lævе, inter antennas foveolis 2 obliquis impressum. Oculi nigri. Labrum, palpi antennarumque articuli 3 primi testacei.

Pronotum transversum, subquadratum, postice latius, antice truncatum, basi bisinuatum, angulis anticis obtuse rotundatis, lateribus rectis, angulis posticis prominulis, elevatis, summo margine nigrescente; disco convexo, longitudinaliter sulcato, levissime transversim rugato; impressione antica semi-circulari distincte longitudinaliter rugosa.

Elytra oblonga-ovata, post medium paullo latiora, apice rotundato-sinuata, profunde striata; interstitium 3^m^ bipunctatum; in anteriori elytri parte macula nigra ovato-annulata, obliqua, cujus pars superior humerum ipsum occupat, inferior vero interstitia 3 et 4 ubi dentem latum efformat; dens alius in interstitio 6 superius conspicitur; regio scutellaris interstitiumque marginale testacea.

Brésil (Prov. des Mines). 5 indiv.

39. *Lebia apicalis.*

Long. 5. — Elytr. 3. — Lat. 2 $\frac{1}{6}$.

Testacea, capite pronotoque rufis, elytris nigris, maculis 2 *obliquis fasciaque apicali, testaceis.*

Caput ovatum, nitidum, rugis punctisque parum distinctis impressum, ante verticem leviter foveolatum; clypeus leviter emarginatus; labrum elongatum, in medio depressum; mandibulæ apice piceæ; oculi albi; caput post oculos obscurius.

Pronotum transversum, antice truncatum, basi sinuatum, lateribus rotundatis, postice paullo angustius, in medio canaliculatum, undique rugoso-punctatum, angulis anticis rotundatis, posticis vero acutiusculis, prominulis, elevatis.

Elytra oblonga, striata, post medium paullo latiora, apice rotundato-sinuata; nigra, ante medium macula rhomboidalis in singulo elytro, oblique posita, fasciaque postica testaceis.

Venezuela (Cumana). 3 indiv.

40. *Lebia Dupontii.*

Long. 5 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 3 $\frac{1}{2}$. — Lat. 2 $\frac{1}{4}$. — Thor. latit. 1 $\frac{1}{2}$.

Pallida, capite, pronoto, antennis tarsisque rufis; elytris nigris; in utroque macula testacea irregularis, margine apiceque testaceis.

Caput ovatum, nitidum, læve; labrum pallidum, paullo emarginatum; clypeus lateribus bifoveatus; in capitis margine anteriori impressiones plurimæ quarum duæ mediæ postice conjunguntur; punctum pone utrumque oculum. Antennæ basi pallidæ. Oculi nigri, prominuli.

Pronotum capite duplo latius, transversum, lævc, antice truncatum, apice modice prolongatum, bisinuatum, post angulos posticos emarginatum, postice angustius; angulis anticis rotundis, lateribus rotundatis, angulis posticis obtusis; sulcus longitudinalis marginem neque anticum neque posticum attingens; impressio semicircularis antica nigro-punctata.

Elytra oblonga, post medium latiora, apice sinuato-rotundata, obsolete punctato-striata, interstitiis planis, 3^m^ bipunctatum; in utroque elytro macula testacea quæ ab humero incipit in interstitio 3° et arcuatim suturam versus dirigitur quam tamen non attingit; inde fere recte descendit usque ad dimidiam elytri partem ubi interstitia 3, 4 et 5 complectitur; postea iterum ascendit versus marginem quæ etiam ab humero usque ad apicem testaceo colore notatur; elytrorum quinta pars postica omnino testacea.

Abdomen lateribus et apice obscurius.

Terre de van Diemen.

M. Dupont m'a envoyé cet insecte sous le nom de *Lebia scapularis* qui, ayant déjà été imposé à une autre espèce de l'Amérique septentrionale, a dû être changé.

41. *Coptodera bifasciata.*

Long. 6. — Elyt. 3 $\frac{3}{4}$. — Lat. 3 $\frac{1}{6}$.

Testacea, vertice, thoracis disco elytrisque viridi-æneis; his fascia antica obliqua interrupta, alteraque postica dentata, pallidis.

La tête est en carré allongé, rétrécie en avant. Le labre est très avancé, arrondi en avant, un peu déprimé au milieu; l'épistôme est également arrondi en avant; son bord antérieur est un peu relevé; il porte sur les deux côtés deux fossettes peu distinctes. La tête, qui est très finement granuleuse, porte quatre fossettes peu apparentes, deux entre les antennes et deux entre les yeux; son sommet est vert-bronzé. Les yeux sont blancs, très proéminens. Les palpes sont d'un testacé pâle, plus foncé sur les deux derniers articles.

Le corselet est très court, transversal, échancré en avant, arrondi en arrière, un peu rétréci postérieurement; les angles antérieurs sont très arrondis, les côtés droits au milieu, les angles postérieurs également arrondis; les impressions antérieure et postérieure sont

assez marquées; la ligne du milieu est fine et légèrement rugueuse de chaque côté ; tout le disque est d'un vert-bronzé.

Les élytres sont presque en cone allongé, un peu élargies postérieurement, tronquées obliquement à l'extrémité ; elles sont striées-ponctuées ; la 3e strie porte deux points à sa partie supérieure ; la 2e un seul un peu après le milieu; leur couleur générale est d'un vert-bronzé, bordé de testacé ; leur partie supérieure porte une bande testacée, descendant obliquement et interrompue dans le 2e intervalle, plus large extérieurement; dans la seconde moitié de l'élytre, on voit une seconde bande de même couleur, entière, mais très irrégulière ; sa partie la plus basse, occupe les trois premiers intervalles, la plus élevée les 4e et 5e.

Le corselet et la poitrine sont obscurs en dessous. Les cuisses sont d'un testacé assez clair.

Brésil. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

42. *Coptodera elongata.*

Long. 14 ½. — Elytr. 7. — Latr. 4 ¼.

Nigra, capite pronotoque æneis, elytris nigro-cupreo-æneis, maculis 20 *flavis oblongis ; capite utrinque longitudinaliter rugoso, postice lævigato ; pronoto cordato, margine lato elevato, angulis anticis rotundatis, posticis rectis, prominulis; elytris elongatis, antice fere truncatis, humeris rotundatis, lateribus parallelis, apice oblique emarginatis, obsolete striato-punctatis.*

Mandibules rugueuses à leur bord externe. Labre très avancé, plane, un peu deprimé au milieu. Épistôme transversal, convexe, tronqué en avant et en arrière, bi-ponctué. Yeux saillans et blanchâtres. La tête est entièrement lisse, sauf 5 ou 6 rides longitudinales bien marquées de chaque côté, et un petit espace au milieu qui est également rugueux, mais transversalement.

Le corselet est plus allongé, plus étroit que chez la *Copt. depressa ;* il est plus rétréci postérieurement et a ses angles antérieurs moins avancés ; les impressions postérieures sont plus profondes.

Les élytres forment presque un parallélogramme ; leur base est coupée presque droit ; les épaules sont arrondies, les côtés parallèles ; l'extrémité est d'abord échancrée, puis prolongée au milieu ; leur couleur est d'un brun foncé avec un reflet cuivreux ; leurs stries sont faiblement enfoncées, mais bien distinctes ; elles sont ponc-

tuées ; les intervalles sont très planes. Les 1°, 2° et 7° stries atteignent seules l'extrémité ; la 3° porte près de sa base un point bien marqué, la 2° un point semblable vers l'extrémité. Sur chaque élytre on voit deux groupes principaux de taches allongées d'un fauve orangé, le 1er avant, le 2° après le milieu. Dans le 1er groupe on remarque d'abord deux taches dont l'une, la plus rapprochée de la base, est située sur le 4e intervalle ; la 2e qui touche la précédente à sa partie inférieure, sur le 3e intervalle ; un peu plus bas, deux taches sur les 5e et 7e intervalles ; plus bas encore, deux autres sur les 4e et 6e. Les taches du second groupe sont un peu plus allongées ; il y en a une sur chacun des 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, 7e et 8e intervalles.

Le niveau des élytres s'élève un peu aux endroits marqués par ces diverses taches.

Le dernier segment de l'abdomen est presque tronqué à l'extrémité.

Mexique (Cordilière orientale d'Oaxaca). 1 indiv.

43. *Helluo brunneus.*

Long. 13 ½. — Elyt. 8. — Lat. 4 ¼.

Brunneus, flavo-pubescens, capite pronotoque obscurioribus; labro rotundato; pronoto cordato, angulis posticis elevatis, punctato, disco lœvigato; elytris elongatis, fere cylindricis, apice rotundato, profunde striatis, striis punctis a se invicem distantibus impressis.

Cette espèce est une des plus étroites du genre. Elle est d'un brun clair, plus foncé sur les élytres et sur la moitié inférieure des cuisses ; la tête et le corselet sont presque noirs.

La tête est carrée en avant, rétrécie assez fortement derrière les yeux. Le dernier article des palpes maxillaires est plus développé que le même des palpes labiaux. Le labre est brun clair, transversal, arrondi en avant. L'épistôme, qui est à peine échancré, porte quatre points enfoncés. Les antennes ont la base de leur premier article presque noire. Entre les antennes, la tête porte deux impressions profondes ; près des yeux, plusieurs points dont un plus gros que les autres.

Le corselet est très convexe, cordiforme, arrondi en avant,

rétréci avant les angles postérieurs qui sont saillants, relevés et obtus ; les bords antérieur et postérieur sont légèrement échancrés ; les angles antérieurs sont droits, très déprimés ; près des angles postérieurs sont deux impressions profondes et arrondies ; tout le disque du corselet est lisse ; on voit de gros points enfoncés le long de tous les bords, sur la ligne longitudinale du milieu et dans les impressions postérieures.

L'écusson est très aigu, d'un brun assez clair.

Les élytres sont allongées, arrondies à la base et à l'extrémité ; elles sont assez convexes ; leurs côtés sont parallèles. Elles portent des stries profondes sur la partie interne desquelles sont imprimés des points très marqués, distans les uns des autres. Les bords extérieur et apical des élytres portent des points plus gros entremêlés avec d'autres plus petits.

Le corps en dessous est couvert d'une ponctuation assez forte, mais peu serrée ; les cuisses portent également quelques points enfoncés.

Brésil. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

44. Brachinus brunnipennis.

Long. 9. — Elyt. 6 $\frac{1}{2}$. — Latr. 2 $\frac{1}{4}$.

Brunneus, palpis, antennarum articulis duobus primis, capite thoraceque ferrugineis, abdomine pedibusque dilute brunneis, femoribus apice dilutioribus.

Tête avancée, lisse, ferrugineuse, avec une tache au milieu du labre et deux points sur les côtés de l'épistôme, bruns ; extrémité des mandibules noire. L'épistôme porte deux fossettes ; la tête a entre les antennes deux sillons longitudinaux et entre les yeux des rugosités longitudinales.

Le corselet est à peine plus large que la tête, cordiforme, largement échancré en avant, tronqué en arrière ; les angles antérieurs sont obtus, mais saillans et largement relevés ; les côtés sont arrondis, fortement rétrécis après le milieu ; les angles postérieurs sont aigus ; l'impression antérieure est peu marquée et rugueuse ; la ligne longitudinale est bien distincte et n'atteint aucune des deux extrémités ; les impressions postérieures sont peu marquées, mais elles remontent jusqu'au milieu du corselet ; toute la base est un peu rugueuse, et le milieu porte quelques rides ondulées peu distinctes.

L'écusson est ferrugineux.

Les élytres sont d'un brun foncé, lisses, convexes, ovales, un peu dilatées vers l'extrémité, tronquées avec les angles interne et externe arrondis. Elles portent des côtes peu élevées, mais bien distinctes, entre lesquelles on voit quelques très petits points alignés en stries. L'extrémité et le dernier quart de la suture présentent une bordure claire très étroite.

L'abdomen et les pattes sont d'un brun clair et pubescens; l'extrémité des cuisses est obscure; la première moitié des jambes est d'un testacé pâle.

Brésil. (Coll. Lacordaire). 2 indiv.

45. *Brachinus atripes.*

Long. 9. — El. 6 $\frac{1}{4}$. — Lat. 4 $\frac{1}{2}$.

Niger, capite, pronoto, antennis, femoribus tarsisque ferrugineis; elytris cœruleo-atris.

Caput oblongum, latum, inter antennas utrinque longitudinaliter foveolatum atque strigosum. Mandibulæ apice nigræ. Labrum paullo emarginatum, punctisque pluribus secundum marginem impressum. Vertex elevatus, nitidus, occipite transversim multi-strigoso. Antennarum articulo 1° ferrugineo, 2° basi nigro, 3° ac 4° nigris apice ferrugineis, 5° et 6° extus piceis; cæteris ferrugineis, pubescentibus.

Pronotum capite angustius, cordatum, undique transversim rugosum, antice late emarginatum, basi subsinuatum, angulis anticis prominulis, fere rotundatis, lateribus rotundatis, ante medium angustatis, angulis posticis acutis, productis; sulcus longitudinalis antice, postice et in medio foveolatus, marginem neque anticum neque posticum attingit.

Scutellum triangulare, ferrugineum, aliquando nigro-marginatum.

Elytra oblonga, ante medium latiora, postice rotundata, apice oblique versus suturam truncata, parum profunde costata, in costis puncta parum distincta; apice puncta plurima profundiora sparsa; parcius pilosa, maxime in margine et apicem versus.

Abdomen rugoso-punctatum, pubescens, in medio rufescens. Tibiæ nigræ.

Brésil (Prov. des Mines). 1 indiv.

GETA. Gen. nov.

J'établis ce genre sur un insecte du Brésil, qui a beaucoup de rapports avec le genre *Homalomorpha* Brul., mais qui en diffère particulièrement en ce que ses mandibules ne sont pas plus droites ni ses antennes plus courtes que chez les *Morio*. Le menton qui, chez les *Morio*, a ses lobes latéraux arrondis et le lobe intermédiaire court et bifide et qui présente les mêmes caractères que chez les *Homalomorpha*, a, chez les *Geta*, ses lobes latéraux plus prolongés; ils sont presque tronqués obliquement à leur extrémité et portent vers leur bord interne un sillon large et profond; le lobe intermédiaire est plus élevé que chez les genres précités et il se termine en une pointe simple. La languette est à peu près semblable, mais les paraglosses ne la dépassent point comme chez les *Morio*. Les palpes sont semblables à ceux des *Morio*. L'échancrure du labre est presque triangulaire comme dans les *Homalomorpha*. Le corps est très aplati; les élytres ne se rétrécissent point vers l'extrémité; elles sont presque tronquées avec l'extrémité marginale complètement arrondie.

Toutes les stries (sauf les 5e et 6e) se prolongent jusqu'à l'extrémité; chez les *Morio*, les deux premières seules y parviennent. Les élytres n'ont pas d'autre rebord antérieur que celui que l'on remarque chez les *Helluo*.

46. *Geta Lacordairei.*

Long. 14. — Elytr. 7 $\frac{1}{2}$. — Lat. 5.

Picea, elytris dilutioribus; pronoto transverso, postice angustiore, bi-impresso, margine antico emarginato, angulis posticis obtusis; elytris oblongo-quadratis, postice rotundato-truncatis, punctato-striatis.

La tête est lisse, en carré allongé, assez plane. Les mandibules sont lisses, épaisses et triangulaires, recourbées à l'extrémité et plus courtes que chez les *Morio;* leur échancrure latérale porte dans son milieu une carène élevée. Le labre est assez court, échancré en demi-cercle en dessus, en dessous coupé à angle droit; les côtés sont exactement arrondis; les bords antérieur et latéraux por-

tent des poils raides avancés. L'épistôme est échancré en demi-cercle ; on y remarque 4 points enfoncés, un vers chacun des angles antérieurs, les deux autres plus gros au milieu. Les yeux sont assez proéminens, mais le rebord qui en protège la partie postérieure est beaucoup moins saillant et moins prolongé que chez les *Morio*. La tête porte antérieurement deux sillons arqués qui ne dépassent pas le milieu des yeux, et deux impressions assez larges, mais peu profondes.

Le corselet est presque cordiforme, court, rétréci postérieurement, largement et profondément échancré en avant, légèrement à sa base ; ses angles antérieurs sont saillans et arrondis, les postérieurs obtus. La ligne longitudinale est profonde et n'atteint pas tout-à-fait le bord antérieur. On remarque postérieurement deux impressions profondes et arquées, qui n'atteignent pas au tiers de la hauteur du corselet. L'écusson est cordiforme ; il porte une impression longitudinale plus profonde à sa partie supérieure.

Les élytres sont planes, en carré allongé, peu arrondies à l'angle huméral, qui est cependant un peu moins saillant que chez les *Morio;* les côtés sont parallèles, arrondis à l'extrémité ; le bord postérieur, qui n'est point rétréci, est arrondi et un peu sinué. Elles portent huit stries profondes et ponctuées, qui toutes partent de la base et atteignent l'extrémité ; les 5e et 6e seules se réunissent avant de parvenir au bord postérieur ; les 3e et 4e se recourbent à l'extrémité vers la suture.

Le corps est très déprimé. Les tibias et les tarses sont d'un noir de poix.

Brésil. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

47. *Calosoma blaptoide.*

Long. 19. — Elytr. 13. — Lat. 7.

Atrum, haud nitidum, capite angusto, pronoto cordato, elytris elongato-ovatis, substriatis, punctorum triplici serie notatis; tibiis rectis (♀).

Tout l'insecte est d'un noir mat en dessus, plus brillant en dessous.

La tête est assez étroite, marquée de deux impressions en demi-cercle entre les antennes, un peu rugueuse entre les yeux près des

quels on remarque un point enfoncé. Les mandibules sont couvertes de rugosités transversales.

Corselet moins long que large, du double plus large que la tête, cordiforme, échancré en avant et en arrière; ses angles antérieurs déprimés, droits; ses côtés d'abord arrondis, puis se rétrécissant dès avant le milieu; l'impression transversale antérieure peu marquée, rapprochée du bord antérieur; la ligne longitudinale fine, ayant de chaque côté des rugosités transversales peu marquées; vers les angles postérieurs, on voit deux impressions droites qui remontent jusqu'au tiers du corselet.

Écusson large, portant une ligne enfoncée dans son milieu.

Elytres en ovale allongé, rétrécies et presque en pointe à leur extrémité, portant des stries peu profondes et très peu distinctes, et trois rangées de points assez larges, plus serrés vers l'extrémité qu'à la base.

Les segments de l'abdomen sont impressionnés sur les bords et portent vers leur bord interne quelques gros points. Les cuisses et les jambes ont plusieurs rangées de points très marqués.

Mexique. (Coll. Lacordaire). 1 indiv.

48. *Panagæus Mexicanus.*

Long. 13. — Elytr. 7. — Lat. elytr. 5. pronoti 4.

Niger, pubescentia flava hirtus, punctatissimus, elytris 4-ferrugineis.

Caput elongatum, collo parum latius, nitidum, antice lævc, postice punctatum, in antennarum basi profunde foveolatum, sulcis 2 longitudinalibus antice latioribus, postice inter oculos fere conniventibus impressum. Mandibulæ apice rufæ idem ac basis antennarum articuli primi.

Collum angustum, nitidum, lævc.

Pronotum undique multipunctatum, pubescentia rufa parce obtectum, transversim ovatum, postice angustatum, margine antico emarginatum, basi truncatum, lateribus rotundatum, angulis posticis rectis.

Elytra pube flava longiore adspersa, thorace latiora, ovata, humeris obliquis, ante medium paulo latiora, postice sinuato-rotundata, crenato-striata; striarum nulla apicem attingit; in illis puncta rotundata a se invicem separata et æquidistantia; interstitia

rugoso-punctata ; singulo elytro maculis 2 notato ; una majore fere transversa, incipiente in humero ipso, secundum marginem usque ad 3am elytri partem descendente, dein bi-arcuata usque ad striam 1m suturalem directa unde versus angulum humeralem arcuatim porrigitur ; 2a fere rotundata, in quarta elytri parte posteriore, marginem versus protendit, sed striam marginalem non attingit.

Mexique (Oaxaca). 2 indiv.

49. *Coptia brunnea.*

Long. 11. — Elytr. 5 ¾. — Lat. 3 ½.

Brunnea, pubescens, præsertim in pronoto et elytris.

Caput lævissimum, angustum, antice rotundatum, supra convexum, collo breviore. Antennarum articuli 4 primi in medio nigri. Labrum transversum, rotundatum, angulis rotundatis. Clypeus antice truncatus, lateribus obliquis, angulis obtusis, margine antico in medio setas 2 gerente, utroque angulo duas longiores ; foveæ 2 fere triangulares inter antennas. Capitis latera in antennarum basi dilata, ibique foveæ 2 rotundatæ. Oculi prominuli, albidi, in vertice sat approximati. In vertice rimæ 2 (4 aut 5-punctatæ) quæ postice junctæ, versus utrumque oculum diriguntur.

Pronotum transversum, basi laterali profunde excisum, in margine antico emarginatum, basi subemarginatum ; angulis anticis obtusis rotundatis, ultra medium dentibus 2 armatum postice directis, quarum 2a duplo longior et magis acuta ; angulis posticis rectis apice rotundato ; margine anteriore atque laterali nisi in dentibus reflexo ; sulcus longitudinalis medius neque basin neque marginem anticum attingens, antice posticeque vero profundior ; sulci duo latiores ab angulis posticis usque ad mediam pronoti partem ascendentes. Pronotum undique punctis et foveolis quarum plures confluunt impressum ; dentes lævissimæ, dilutiores.

Elytra ovata, postice angustata, in humeris rotundata, apice sinuata, fere emarginata, profunde punctato-striata, ita ut crenata videntur ; interstitia convexa, punctata ; 7um usque ad apicem prolongatum.

Tibiæ anticæ vix emarginatæ.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

On peut considérer comme le type de ce genre le *Panagæus quadridentatus*, décrit par M. Kollar. (*Spec. Ins. col. nov.*, N° 14. Ann. des Wien. Mus. B^d. I. 1836, p. 335).

50. *Euchroa nitidipennis.*

Long. 11 ½. — Elyt. 6. — Lat. 4 ½.

Atra, capite pronotoque chalybeis, elytris cupreis, femoribus cyaneo-micantibus.

Labrum elongatum, antice paullo emarginatum, punctis 6 piliferis impressum, angulis anticis rotundatis. Clypeus transversus, antice angustior et leviter emarginatus, lateribus bifoveolatus. Caput inter oculos rima profunda sinuata utrinque impressum.

Mandibulæ parvæ, validæ, trigonæ, apice acuto, incurvo, interne longitudinaliter rugatæ. Antennarum articuli 4 primi rufi, 1^us crassus, cylindricus, 2^us tertio brevior, 4^us præcedente paulo minor, cæteri latiores, compressi, elongato-quadrati, fusci, pubescentes, lineæ longitudinali nigra supra atque infra notati, ultimus major, ovatus.

Pronotum longitudine paullo brevius, postice angustum, antice posticeque emarginatum; angulis anticis rotundatis, posticis prominulis, acutiusculis; sulco longitudinali margines non attingente; postice foveis 2 profundis elongatis punctoque pone angulos impressum.

Scutellum triangulare.

Elytra oblonga, postice sinuata, fere emarginata, humeris prominulis, striola præscutellari deficiente, striis 7 profundis lævibus, 8^a marginali antice posticeque pluri-foveolata, striæ scutellari adnexa.

Segmenta abdominalia lateribus foveolata, ultima 3 punctis profundis linea dispositis, ultimum foveolis 2 rotundis in medio notatum. Tarsi ferruginei. Tarsorum anticorum articulus 1^us cæteris duplo longior, cylindricus, antice latior; 2^us, 3^us, 4^us cordiformes, nigro-maculati; omnes subtus pilosi, 4^us pilis longioribus, 5^us setis duobus longis lateralibus apicem versus. Tarsorum intermediorum et posticorum articuli tres primi bicanaliculati.

Mexique (Cordilière orientale d'Oaxaca). 1 indiv.

Marsyas. Gen. nov. (1).

Ce nouveau genre a beaucoup d'analogie avec les *Cynthia* Latr. et *Euchroa* Brullé.

La tête est petite, le corselet allongé ; ses côtés sont fortement déprimés en avant ; il est élargi postérieurement, échancré au dessus de l'écusson et a de chaque côté une impression longue et profonde. Les élytres sont allongées, très convexes, sillonnées. De même que dans les genres *Euchroa* et *Cynthia*, il n'existe pas de petite strie à la base près de l'écusson.

Les lobes latéraux du menton sont munis à leur sommet d'une petite dent qui n'est autre que le prolongement du revêtement interne du menton. Une dent large et bifide s'élève au milieu. La languette est très légèrement arquée à son bord supérieur ; les paraglosses ne la dépassent que faiblement. Tous les palpes sont courts et épais ; le 2e article des labiaux est très court, le 3e du double plus long et presque conique ; le 4e de très peu plus long est assez élargi et légèrement tronqué à l'extrémité. Les mâchoires sont arquées, minces et aigues ; les 1er et 2e articles des palpes maxillaires sont d'égale grosseur ; le 2e est un peu plus long, mais moins cependant que le dernier, qui est tronqué, mais moins large que le même des palpes labiaux. Les mandibules sont courtes, triangulaires, presqu'arrondies au bout ; elles portent au milieu une dent arrondie et assez saillante, au dessous de laquelle on en voit une seconde beaucoup plus large ; vers la base, il en existe trois autres plus petites. Le labre est allongé, légèrement échancré au milieu et arrondi vers les angles antérieurs. Les antennes sont courtes, épaisses ; leur premier article est large et cylindrique, le 2e très court et un peu conique ; le 3e est le plus long ; le 4e plus court que le précédent, mais un peu plus long que le suivant, est rétréci à sa base ; les suivants sont en carré allongé ; le dernier est arrondi à l'extrémité. Les trois premiers articles des tarses antérieurs sont dilatés chez les ♂ : le 1er est triangulaire ; les deux suivants sont plus courts et cordiformes ; le quatrième est plus étroit et échancré jusque dans son milieu ; ils sont en dessous munis d'un duvet spongieux. Chez la ♀ ils sont moins élargis et leur premier article surtout est plus allongé.

(1) Voir la planche.

51. *Marsyas æneus.*

Long. 18. — Elyt. 11. — Lat. 6 $\frac{1}{4}$.

Supra æneus (vel viridi-æneus), subtus niger, elytris profunde sulcatis, interstitio tertio tri-punctato.

Tout l'insecte est noir en dessous, bronzé ou d'un vert-bronzé brillant en dessus ; l'extrémité des articles des palpes, les bords du labre, la base et l'extrémité du 1er article des antennes sont bruns ; tous les articles, à l'exception des trois premiers, sont couverts d'une pubescence brune.

Tête petite, un peu rétrécie en arrière, prolongée en avant. Labre transversal, plane, divisé dans son milieu par une ligne longitudinale peu distincte. Épistôme également transversal, quoique plus long, séparé de la tête par une ligne enfoncée bien marquée; il porte de chaque côté un point assez profond. Entre les antennes on aperçoit deux sillons dont le premier, qui longe les yeux, est droit et le plus prolongé ; le second est le plus profond ; il est un peu arqué et se termine à la hauteur des yeux. Ceux-ci sont très peu saillans.

Le corselet est plus du double plus large que la tête ; il est coupé carrément en avant, échancré dans son milieu en arrière, où il est prolongé vers les angles ; les angles antérieurs sont droits et très déprimés ; les côtés vont en se dilatant insensiblement vers la base où les angles postérieurs ressortent en une saillie bien distincte, et forment un angle un peu aigu. Le sillon longitudinal est bien marqué, moins profond en avant ; des deux côtés, au milieu de la base on remarque deux sillons très profonds, un peu obliques, qui remontent jusqu'au tiers du corselet ; ils sont tout à fait lisses.

L'écusson est large ; sa pointe forme un angle droit ; il porte au milieu un petit sillon qui n'atteint ni la base ni l'extrémité.

Les élytres sont très convexes, allongées, de la largeur du corselet à leur base, puis s'élargissant un peu, elles se rétrécissent insensiblement vers l'extrémité où elles sont sinuées. Elles ont à leur base un rebord transversal comme celui qui existe dans plusieurs genres de Féroniens. Elles portent des sillons profonds et lisses ; les intervalles sont très convexes ; le 3^{e}, qui est plus large que le précédent, a extérieurement trois points enfoncés : les deux premiers sont assez rapprochés, avant le milieu, le dernier, près de

l'extrémité ; on voit plusieurs points dans l'intervalle qui précède le bord marginal ; ces points sont plus espacés vers le milieu qu'aux deux extrémités.

Brésil (Province des Mines). 7 ind.

52. *Steropus Lacordairei.*

M. Lacordaire a reçu des Asturies et m'a donné plusieurs individus d'un *Steropus* nouveau et que je lui dédie.

Par la fossette arrondie que l'on remarque près des angles postérieurs du corselet, il se distingue des *Ster. globosus*, *Hoffmannseggii* et espèces voisines, et il se rapproche du *Ster. concinnus.*

Il diffère de celui-ci par sa taille plus grande, son corselet plus allongé, plus carré, dont les bords latéraux sont beaucoup moins arrondis et plus parallèles, avec le bord antérieur moins échancré, les angles antérieurs et postérieurs plus arrondis ; par ses élytres plus étroites dans le ♂, plus carrées dans la ♀, à stries plus profondes et moins distinctement ponctuées et dont les intervalles sont plus convexes dans les deux sexes.

Il se distingue du *Ster. validus* que M. Dejean considère comme une variété du *concinnus*, par le corselet proportionnellement plus allongé, moins élargi postérieurement, moins échancré antérieurement, ayant ses angles postérieurs encore plus marqués, ses fossettes plus profondes, enfin par ses élytres plus carrées, plus convexes, à stries plus enfoncées.

2 ♂, 4 ♀.

Corax. Gen. nov.

Ce nouveau genre doit être placé entre les *Percus* et les *Steropus ;* c'est avec ces derniers qu'il a le plus de rapports ; Il en diffère par la forme générale du corps, qui est large et déprimée ; les palpes sont plus courts, leur dernier article est plus large que le précédent, il s'élargit vers l'extrémité et est tronqué très nettement. Les antennes sont plus courtes, composées d'articles plus épais ; leur 4e article qui, chez les *Steropus*, égale en longueur le 3e, est ici de la longueur du 2e. Le labre et l'épistôme sont échancrés. Le corselet est large, échancré en avant, de sorte que ses angles antérieurs sont saillans ; ses côtés sont finement rebordés, tandis que

chez les *Steropus*, ce rebord est épais et saillant, surtout vers les angles antérieurs. L'abdomen des ♂ dont l'avant-dernier segment porte chez plusieurs espèces de *Steropus* une carène courte et transversale, présente dans le nouveau genre une carène longitudinale allongée, très saillante, qui occupe presque toute la longueur du dernier segment. Les quatre premiers articles des tarses antérieurs des ♂ sont plus courts et plus élargis que chez les *Steropus*.

Ce n'est qu'avec hésitation que je propose une nouvelle coupe dans le groupe des Féroniens qui, aux yeux de beaucoup d'entomologistes, est déjà trop divisé. Cependant, si les divisions proposées jusqu'à ce jour laissent à désirer, il n'est pas moins certain qu'il faut en établir; la difficulté est seulement de tracer des limites bien naturelles entre les genres principaux. En attendant, il faut bien se borner à grouper les espèces d'après leurs caractères les plus saillans, sauf, plus tard, à tirer parti de ces travaux isolés.

53. *Corax Ghilianii.* (Laferté. inéd.)

Long. 14, 17. — Elytr. 7 $\frac{1}{2}$, 9. — Lat. 4 $\frac{1}{4}$, 6 $\frac{1}{2}$.

Apterus, niger, nitidus, depressus; capite subfoveolato, bipunctato; pronoto transverso, postice leviter angustato, antice posticeque emarginato, angulis rotundatis, postice bistriolato; elytris latis, ovalibus, punctato-striatis, stria 3ª bipunctata, 2ª unipunctata, interstitiis planis.

La tête est large, plus étroite chez le ♂, peu allongée et glabre. Le labre, qui est transversal, est échancré en avant; ses angles latéraux sont arrondis. L'épistôme est également échancré; il porte vers chacun de ses angles un point enfoncé bien marqué, et en arrière, plusieurs dépressions assez distinctes. Sur le front on remarque deux impressions longitudinales très peu enfoncées, au milieu desquelles se trouve un point gros et profond; derrière ce point, on en voit un plus petit.

Le corselet est transversal, presque du double plus large au milieu que la tête à sa partie postérieure. Il est fort peu convexe, largement échancré en avant, un peu moins en arrière; ses angles antérieurs sont saillans et arrondis, ses côtés arrondis et se rétrécissent un peu vers la base; les angles postérieurs sont épais et arrondis. La ligne longitudinale n'atteint ni le bord antérieur, ni le bord postérieur; de chaque côté de la base, un peu plus vers l'exté-

rieur que vers le milieu, s'élève obliquement une impression assez profonde, non ponctuée.

Les élytres sont larges, ovales, bien arrondies à la base et à l'extrémité, presque planes, striées un peu plus profondément dans le ♂ que dans la ♀; ces stries sont de la même profondeur dans toute leur étendue; elles sont très distinctement ponctuées; les intervalles sont planes; la 3e strie porte deux gros points enfoncés, (quelquefois un seul), le premier avant le milieu, le second au dernier tiers de l'élytre; à côté de la 3e strie on distingue un point semblable vers l'extrémité; la 8e strie forme une espèce de crochet anguleux un peu avant l'extrémité. Dans les deux seules ♀ que j'aie sous les yeux, la suture se rétrécit brusquement vers l'extrémité de manière à laisser entre les élytres un intervalle notable.

Andalousie.

Au moment où je terminais la description de cet insecte, j'en ai reçu un individu de Mr le Marquis de la Ferté, sous le nom de *Steropus Ghilianii*. Je lui ai conservé ce nom spécifique.

54. *Amblygnathus suturalis.*

Long. 7, 7 $\frac{3}{4}$. — Elyt. 4 $\frac{1}{4}$, 4 $\frac{1}{2}$. — Lat. 3, 3 $\frac{1}{2}$.

Testaceus, capite pronotoque fulvis, sutura lata, abbreviata, abdomineque nigro-irinis.

Caput latum, postice parum angustatum, nitidum, lævc. Mentum emarginatum, edentatum. Ligula angusta, apice truncata. Paraglossæ duplo latiores, longiores, membranaceæ, angulis rotundatis. Palporum labialium articuli longitudine æquales; 1us apice latior, interne pilosus, paullo arcuatus; 2us interne rectus, externe basi apiceque angustatus, apice acuminato-truncatus, interne externeque pilosus. Maxillæ angustæ, acutæ. Palporum maxillarium articulus 1us brevis, rotundatus, 2us apice angustatus, interne subarcuatus; 3us 2° dimidio brevior, fere conicus; 4us præcedenti dimidio longior, interne rectus, externe in medio dilatatus, apice attenuato, subacuminato, truncato, utrinque pilis munito. Mandibulæ crassæ, parum arcuatæ, apice lato, rotundato, obscuro.

Labrum antice angustatum, emarginatum, margine antico punctis piligeris plurimis impressum, obscurum. Clypeus emarginatus, marginatus, utroque latere puncto unico notatus. Antennarum

articuli omnes (duobus primis exceptis) linea duplici nigra longitudinaliter notati. Caput inter antennas obsolete impressum. Oculi parum prominuli, albidi.

Pronotum transversum, antice late emarginatum, basi bisinuatum, angulis anticis prominulis, rotundatis, lateribus rotundatum, ante angulos posticos rotundatos angustatum; foveolæ duæ posticæ latæ, parum profundæ, in medio sulcatæ; basi tota punctata.

Scutellum latum, triangulare, in medio leviter impressum.

Elytra ovata, basi subtruncata, lateribus fere parallela, apice sinuato-rotundata, striis profundis punctatis, apice profundioribus exarata, striolaque præscutellari inter 1^{am} atque 2^{am}; interstitia subconvexa, subtiliter vage punctulata; interstitia 2, 5, 7, serie punctorum majorum impressa; plaga suturalis lata, nigro-irina, usque ad interstitium 4^{um} extensa, postice angustata et in quarta suturæ parte emarginato-abbreviata.

Abdomen nigrum, in medio rufescens. Pedes pallidi; tibiæ spinulis brunneis indutæ, geniculis obscuris; tibiæ anticæ post medium emarginatæ; tarsorum anticorum articuli 3 primi in mare longitudine atque latitudine æquales; 1^{us} et 2^{us} cordati, 3^{us} fere quadratus, 4^{us} paullo minor, cordatus, subemarginatus; omnes supra sulcati. In femina articuli omnes multo angustiores, primus maxime multo longior.

Venezuela (Cumana). 7 indiv.

55. *Lachnophorus pallidipennis.*

Long. 4. — Elytr. 2 $\frac{1}{4}$. — Lat. 1 $\frac{1}{2}$.

Nigro-æneus, elytris testaceis, maculis 4 pallidis, antennis basi pedibusque testaceis.

Caput triangulare, antice deplanatum, viridi-æneum, undique rugosum, post verticem lineola longitudinali impressum. Mandibulæ nigræ. Palpi testacei, articulo ultimo nigrescente. Antennæ brunneæ, articulis 4 primis pallide testaceis, nigro-infuscatis.

Pronotum capitis latitudine, antice truncatum, basi sinuatum, angulis anticis rectis, lateribus ante medium dilatatis, postice angustatis, angulis posticis obtusis, deflexis; undique rugosum, pilis fulvis æneisque mixtis undique tectum, linea longitudinali media antice profundiore impressum.

Scutellum triangulare, elongatum, nigro-æneum.

Elytra ovata, in humeris et apice æqualiter rotundata, lateribus in medio parum dilatatis, striato-punctata, pallida, cruce testacea notata, sive potius testacea, maculis duabus pallidis ornata; prima humerali, semilunata, usque ad 3^{am} elytri partem descendente ibique rotundata et striam 3^{am} attingente; 2^{a} ultra medium, fasciam latam irregulariter arcuatam figurante, interstitium 1^{m} occupante ante apicem, 2^{m} atque 3^{m} paullo superius, 4^{m}, 5^{m} ac 6^{m} adhuc superius, et sequentia inferius; stria 2^{a} puncta 2 gerit, unum ante, alterum post medium, 3^{a} vero foveolam in tertia elytri parte.

Pedes testacei, geniculis, tibiarum apice tarsisque obscuris.

Venezuela (Cumana). 6 indiv.

56. *Trechus ovatus.*

Long. 3 $\frac{1}{4}$. — Elytr. 1 $\frac{3}{4}$. — Lat. 1 $\frac{1}{4}$.

Fulvus, capite abdomineque obscurioribus, palpis pedibusque testaceis; pronoto cordato, angulis posticis subrectis; elytris ovatis, striis 4 profundioribus obsolete punctatis punctisque 3 majoribus.

Caput ut in præcedente, postice paullo angustius, in medio obsolete foveolatum, labro profundius emarginato, vertice impunctato; palpis omnino pallide testaceis; antennæ apice incrassatæ, articulo 2° paullo breviore.

Pronotum nitidum, levissime undulato-rugosum, elongatum, cordatum, basi subsinuatum, angulis anticis obtusis, lateribus rotundatis, postice angustatis, angulis posticis fere rectis; sulcus longitudinalis postice et in medio sat profundus; impressio anterior distincta et obscura; foveolæ 2 posticæ profundæ, punctumque obsoletum in medio utriusque pronoti parte.

Elytra ovata, basi et apice rotundato-truncata, lateribus rotundata, striis 4 profundioribus obsolete punctatis, cæteris vix perspicuis; 1^{a} in quinta elytri partem posticam arcuatim ascendit; post medium 3^{i} interstitii punctum majusculum alterumque inter hunc atque basin in stria 4^{a} ipsa; in apice striæ 2^{æ} punctum 3^{um} minus conspicuum.

Cet insecte est voisin, quoique bien distinct, du *Tr. alpinus* Dej. Il m'a été envoyé par M. le docteur Schaum, comme venant de la Styrie.

57. *Trechus pulchellus.*

Long. 3 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 1 $\frac{1}{3}$. — Lat. 1 $\frac{1}{2}$.

Obscure brunneus, capite, pronoto, sutura margineque dilutioribus, palpis femoribus tarsisque testaceis; pronoto subcordato; elytris ovato-rotundatis, bifoveolatis, striis 2 distinctis.

Caput elongatum, postice vix angustatum, lævigatum. Mandibulæ apice extremo nigræ. Palpi pallide testacei; palporum maxillarium articulus penultimus basi obscuriore. Antennarum articulus 2^{us} tertio vix brevior, sed basi paullo crassior, uterque triangulariter elongatus; 4^{us} secundo brevior sed apice magis dilatatus; cæteri (ultimo excepto) elongato-quadrati, latiores; ultimus cylindricus, apice rotundatus.

Labrum breve, sat profunde emarginatum, secundum marginem 4-punctatum, angulis prominulis.

Clypeus subemarginatus; labrum clypeusque lateribus elevato-marginatis. Oculi albidi, parum prominuli. Caput impressionibus 2 arcuatis profundis exaratum, quæ in clypei angulis incipientes ubi carinula limitantur, post oculos desinunt in parte capitis laterali; inter antennarum basin et impressionem carinula elevata; inter oculum utrumque et impressionem foveola rotundata; vertex in medio punctum unicum gerit.

Pronotum breviter cordatum, antice posticeque truncatum, angulis anticis subprominulis, rotundatis, lateribus rotundatis, basin versus angustatis; anguli postici recti, elevati; sulcus longitudinalis sat profundus, antice abbreviatus; impressio antica vix perspicua; in basi pone utrumque angulum impressio rotundata parum profunda.

Elytra rotundato-ovata, convexa, lævia; stria 1^{a} profunda, apicem attingens et arcuatim in quarta elytri parte media ascendens; 2^{a} obsoletior, attamen distincta; 3^{æ} vix conspicitur vestigium; in media hujus parte foveola alteraque inter hanc et elytri basin.

M. Schaum m'a envoyé cet insecte qui vient des montagnes de la Saxe, près de Dresde. Le nom que je lui ai conservé lui a été donné par M. Kiesenwetter.

58. *Tachys sulcatus.*

Long. 2 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 3 $\frac{1}{2}$. — Lat. 2 $\frac{1}{4}$.

Nigro-brunneus, capite, thorace, elytrorum basi maculaque hu-

merali elongata testaceis, pedibus antennarumque basi pallidioribus.

La tête est assez large, peu rétrécie en arrière, légèrement granuleuse, surtout à son sommet. Palpes d'un testacé très pâle. Mandibules avec l'extrémité d'un brun noirâtre. Antennes grossissant vers l'extrémité; les trois premiers articles presque égaux en longueur; le 1er le plus épais, le 2e cylindrique, le 3e rétréci à la base, le 4e semblable au 2e mais un peu plus court, le 5e et le 6e plus épais et de même longueur, le 7e plus long, le 8e semblable au 6e, le 9e et le 10e encore plus larges et carrés; le dernier de même largeur que le précédent, mais de moitié plus long et terminé en pointe. Labre très court, légèrement échancré, de même que l'épistôme qui porte latéralement deux points. La tête a entre les yeux deux sillons longitudinaux et parallèles, et derrière les yeux, deux impressions transversales qui s'évanouissent avant d'atteindre le vertex

Le corselet est plus large que la tête, aussi long qu'il est large antérieurement, rétréci avant les angles postérieurs; le bord antérieur est légèrement échancré, la base distinctement prolongée au milieu; les angles sont avancés et droits; les postérieurs saillans et aigus. Les côtés sont assez largement rebordés. Toute la surface est ridée transversalement; les rides sont longitudinales aux bords antérieur et postérieur. L'impression transversale antérieure est peu marquée; la postérieure l'est davantage et un peu obscure. La ligne longitudinale est bien marquée. On remarque vers les angles postérieurs deux impressions assez profondes qui remontent en s'affaiblissant jusque vers le milieu.

L'écusson est large et un peu relevé à l'extrémité.

Les élytres sont convexes, ovales, rétrécies postérieurement avec l'extrémité sinuée. Chacune d'elles porte huit sillons (y compris le marginal) profonds et ponctués, dont aucun ne s'affaiblit vers les extrémités marginale ou apicale; les intervalles sont légèrement granulés, planes; ils portent eux-mêmes une ligne enfoncée peu distincte. Antérieurement le 1er sillon se réunit au 3e et le marginal au 4e; postérieurement le 3e et 4e se réunissent avant l'extrémité. Le 3e intervalle porte deux points dont l'antérieur, situé avant le milieu, est le plus distinct. La suture est élevée; la base des 3e et 4e intervalles, la moitié antérieure des 6e, 7e, 8e et 9e et le dernier quart des élytres (sauf la suture) sont testacés; le surplus des élytres est brun bordé de noir.

Les pattes et les quatre premiers articles des antennes sont d'un testacé pâle.

Venezuela (Cumana). 10 indiv.

59. *Bembidium longipenne.*

Long. 2 $\frac{1}{2}$. — Elytr. 1 $\frac{1}{2}$. — Lat. 1 $\frac{3}{4}$.

Pallide testaceum, capite, pronoto, macula scutellari, sutura fasciaque media elytrorum obscure fulvis.

Caput fuscum, latum, læve, inter oculos bifoveolatum. Antennæ fuscæ, apice pallidiores, artº 2º tertio longiore. Labrum transversum, truncatum, angulis rotundatis. Clypeus truncatus, bipunctatus.

Pronotum obcordatum, capite latius, antice emarginatum, basi sinuatum, angulis anticis rotundatis, deflexis; lateribus rotundatis, postice angustatis; angulis posticis rectis, prominulis; impressionibus antica atque postica arcuatis, longitudinali parum perspicua.

Elytra elongata, antice truncata, lateribus parallelis, postice sinuato-rotundata; striis obsoletis, indistincte punctatis, postice et versus latera evanescentibus; sutura elevata; stria 1ª apice prolongata, posticam elytri partem sequitur, ibique in medio usque ad quartam partem ascendit; stria marginalis profunda, sinuata, in medio interrupta; interstitium 3um punctis 2 distinctis impressum quorum 1um paullo ante medium, 2um in quarta elytri parte.

Abdomen obcure rufum.

Venezuela (Cumana). 1 indiv.

60. *Bembidium Dejeanii.*

Long. 4 — Elyt. 2 $\frac{1}{2}$. — Lat. 1 $\frac{3}{4}$.

Nigrum, antennarum basi, palpis, pedibus elytrisque testaceis, his irregulariter nigro-trifasciatis.

Cette espèce remarquable semble appartenir au sous-genre *Notaphus;* le dessin de ses élytres est même presque entièrement semblable à celui du *Not. fumigatus*, Creutz. Cependant la forme des impressions de la tête et la disposition de celles des élytres lui donnent quelques rapports avec le sous-genre *Leja*.

Les palpes sont ferrugineux, avec le pénultième article des

maxillaires obscur en dessus. Les antennes sont couleur de poix ; leur 1er article est entièrement testacé, le 2e testacé à la base et à l'extrémité ; les 3e et 4e le sont seulement à la base. Entre les yeux on voit deux sillons profonds qui se prolongent obliquement jusqu'au labre où ils se réunissent ; l'espace élevé, compris entre eux et qui porte un point enfoncé, est triangulaire et se termine en une pointe aigue ; entre chacun de ces sillons et l'œil, on remarque deux carènes élevées comme dans plusieurs espèces du sous-genre *Leja ;* elles se réunissent un peu avant la partie postérieure de l'œil.

Le corselet est plus large que la tête, mais moins large que dans les autres espèces du genre *Notaphus*, surtout plus rétréci postérieurement. Il est fort peu échancré à la base et moins encore en avant ; ses angles antérieurs sont plus prononcés que dans le *B. fumigatum ;* les angles postérieurs sont droits, même presque aigus ; l'impression transversale antérieure est très marquée, mais interrompue au milieu, qui est un peu relevé ; elle est couverte de points confondus avec des rugosités transversales ; l'impression postérieure est finement ponctuée et un peu rugueuse ; la ligne longitudinale s'étend de l'une à l'autre sans atteindre ni le bord antérieur, ni le bord postérieur ; à la base on distingue une impression profonde et oblique et entre celle-ci et les angles postérieurs deux petites lignes élevées ; toute cette partie est couverte de rugosités peu distinctes, de même qu'une partie du bord extérieur du corselet.

Les élytres sont plus ovales que dans le *Bemb. fumigatum ;* elles sont surtout plus rétrécies à la région humérale et plus dilatées au milieu ; leurs stries sont moins profondes et leurs points plus petits ; dès la 4e, elles commencent à devenir moins distinctes au milieu ; la 7e n'est nullement enfoncée, on ne distingue plus que le commencement d'une ligne de points ; la 1re atteint à peine l'extrémité ; la 3e porte deux points plus gros que les autres, le 1er au quart, le 2e le milieu des élytres.

La coloration générale des élytres se rapproche beaucoup de celle du *B. fumigatum*, mais les taches noires sont plus petites et plus découpées, de sorte que la plus grande partie des élytres paraît marquetée de fauve et de noir.

Les pattes sont testacées avec la partie externe des jambes obscure.

Rive droite de l'Escaut, à Anvers, au premier printems.

61. *Bembidium Reichei.*

Long. 2. — Elytr. 1 $\frac{1}{2}$. — Lat. $\frac{1}{2}$.

Caput ut in *B. tristriato*, sed antennæ piceæ, basi testaceæ.

Pronotum convexum, longitudine vix latius, antice truncatum, basi in medio paullo rotundatum; angulis anticis rectis; lateribus rotundatis, ante angulos posticos angustatis; angulis posticis acutis prominulis, prolongatis, carinula elevata obliqua impressis; sulcus longitudinalis marginem anticum longe non attingens; impressio vero postica basin pronoti inter angulos occupans et rugis parvis regularibus transversim impressa; pone angulos posticos foveola impressa profunda.

Elytra elongato-ovata, humeris prominulis, rotundatis, lateribus rotundatis, apicem versus angustatis, rotundatis, striis 6 (marginali exclusa) fortiter punctatis, quarum 1ª tantum apicem attingit et arcuatim in media elytri latitudine relevatur; stria marginalis profunda, foveolata, integra, in humero prolongata ita ut ibi quartæ jungatur. In singulo elytro maculæ 2 testaceæ, quarum 1ª major, triangularis, margini adnexa, versus suturam angustata, 1ᵘᵐ interstitium non invadit; macula 2ª in postica elytri parte, minor, oblonga, obliqua.

Corpus subtus nigrum.

Venezuela (Cumana). 6 indiv.

62. *Bembidium centroplagiatum.*

Long. 2. — Elytr. 1 $\frac{1}{4}$. — Lat. 2.

Rufum, antennis basi, pedibus elytrisque testaceis, hisce nigro- et brunneo-plagiatis.

Caput ovatum, nitidissimum, lævc, inter oculos albidos foveis duabus oblongis atque profundis impressum, vertice impunctato. Labrum leviter sinuatum. Clypeus bipunctatus.

Pronotum cordatum, nitidissimum, antice truncatum, basi emarginatum, angulis anticis obtusis, deflexis, posticis vero minutis, rectis, prominulis, carinula media elevata; basi inter angulos posticoe rugis parvis longitudinalibus transversim dispositis impressa. In utroque pronoti latere maculæ 2 brunneæ (sive trilobatæ, sive rotundatæ), postice prolongatæ.

Scutellum breve, triangulare.

Elytra convexa, breviter ovata, basi rotundata, postice angustato-sinuata; striæ 7 parum profundæ, fortiter punctatæ; nulla, præter suturalem atque marginalem, basin et apicem attingens; stria marginalis profundior, sinuata. Fere in media elytrorum parte, fascia communis nigra (in centro brunneo-rufa), fere quadrata, quæ striam marginalem non transgreditur, antice ramulum brunneum suturalem usque ad scutellum emittit, postice secundum suturam ramulum alterum piceum, apice dilatatum. In interstitii 5i basi macula altera picea, fere rotundata quæ aliquando usque ad maculam centralem descendit.

Venezuela (Cumana). 3 indiv.

Explication de la planche

I.

a Menton.
b Lèvre inférieure.
c Labre.
d Mandibules.
e Mâchoires et palpes maxillaires. — La ligne ponctuée indique la forme et l'étendue de la frange de cils dont les premières sont garnies au côté interne.
f Tibias antérieurs.

1 *Scarites Pyracmon.*
2 *Pasimachus depressus.*
3 — *sublævis.*
4 *Molobrus rotundipennis.*
5 — *purpuratus.*
6 *Pasimachus marginatus.*

II.

Marsyas æneus.

1 Menton, languette et palpes labiaux.
2 Mâchoires avec leurs palpes.
3 Mandibules.
4 Labre.
5 Tarse antérieur du mâle.
6 Antennes.

LISTE DES ESPÈCES.

Pasimachus	depressus	358.	Lebia	C-nigrum	387.
	subsulcatus	359.		Cumanensis	
	Mexicanus	360.		annulipennis	388.
	marginatus			maculipennis	
	sublævis	361.		rotundipennis	
Molobrus	purpuratus	362.		X-nigrum	390.
	splendidus	363.		nigro-fasciata	
	rotundipennis	364.		circularis	
Cicindela	Claussenii	365.		Bonellii	391.
	ferrugata	366.		granaria	392.
	palliata			angusticollis	
	fulgidiceps	367.		apicalis	393.
	Minarum	369.		Duponti	
Casnonia	Funckii	370.	Coptodera	bifasciata	394.
	marginestriata	371.		elongata	395.
Agra	Klugii	372.	Helluo	brunneus	396.
Calleida	basalis		Brachinus	brunnipennis	397.
	nitida	373.		atripes	398.
	cordicollis		Geta	Lacordairei	399.
Cylindronotum	æneum	374.	Calosoma	Blaptoide	400.
Miscelus	unicolor	375.	Panagæus	Mexicanus	401.
Dromius	subfasciatus	376.	Coptia	brunnea	402.
	multiguttatus	377.	Euchroa	nitidipennis	403.
Cryptobatis	hexagona	378.	Marsyas	æneus	405.
Lia	comma	379.	Steropus	Lacordairei	406.
	albosinuata	380.	Corax	Ghilianii	407.
Lebia	longipennis	381.	Amblygnathus	suturalis	408.
	nigriventris	382.	Lachnophorus	pallidipennis	409.
	pendula		Trechus	ovatus	410.
	Minarum	383.		pulchellus	411.
	marginata	384.	Bembidium	longipenne	413.
	Heydeni			Dejeanii	
	scutellata	385.		Reichei	415.
	centromaculata	386		centroplagiatum	
	rugiceps				

XI. — *Extrait d'un mémoire sur l'architecture en Italie, depuis la décadence de l'art romain jusqu'à nos jours,*

Par J.-P. SCHMIT,

AGRÉGÉ, CHARGÉ DU COURS D'ARCHITECTURE A L'UNIVERSITÉ.

Depuis que la routine et l'autorité de certains maîtres de la renaissance italienne règnent dans les écoles, il s'est commis tant d'erreurs en architecture, que bien des architectes ont cru devoir chercher, dans l'étude de l'histoire de l'art, les vrais principes perdus, et les bases analogiques sur lesquelles on pourrait élever un style à nous, marqué au coin de la civilisation contemporaine.

L'Allemagne et l'Angleterre ont produit, depuis 25 ans, une foule de monuments témoignant de ces études historiques, et révélant une renaissance puissante et féconde qui ne fait encore que germer en Belgique.

Dans ces circonstances, nous pensons que les moindres essais entrepris dans le domaine de l'histoire de l'art, auront du moins le mérite de l'à-propos, et c'est là ce qui nous encourage à livrer à la publicité un résumé succint sur la marche et le développement de l'architecture en Italie, à partir de la décadence de l'art romain. Nous voudrions surtout examiner par quelles transitions l'architecture arriva à cette renaissance qui fut bientôt si mal comprise et dont l'autorité est aujourd'hui si souvent, mais si aveuglement invoquée.

Opposition des caractères de l'architecture græco-romaine et de l'architecture romantique. — Dans quelque moment de son histoire que l'on étudie l'architecture, il est méthodique de l'envisager sous le double rapport de son but et de ses moyens : sous le rapport de son but qui indiquera la nature, la destination, l'étendue des édifices, toutes choses qui découlent immédiatement des manières d'être d'un peuple et d'une époque, et sous le rapport de ses moyens, qui sont un certain nombre de formes élémentaires, constantes pour chaque style, et dont les combinaisons du reste très variables caractérisent chacun d'eux.

Pour ces formes, les influences morales sont moins directes, les origines plus obscures et plus complexes ; mais en revanche, l'art tout entier est en elles et dans son principe, et dans son analyse.

C'est sous ce dernier rapport que nous dirons un mot de l'architecture græco-romaine avant de la laisser derrière nous pour nous occuper de celle du moyen âge.

L'art de Vitruve avait ce caractère positif, fini, terrestre qui émanait déjà de la religion et de la philosophie grecques. Choisir, dans les élévations, les lignes les plus simples, les soumettre à une continuité sévère, les réduire à la construction la plus élémentaire, tel fut constamment le premier soin de l'architecte romain. — Le second, ce fut d'étudier les masses brutes imposées par la construction, de manière à pouvoir les revêtir, aux endroits de leurs jointures et de leurs extrémités, d'une enveloppe esthétique capable d'exprimer le rôle qu'elles jouent, capable aussi d'en dessiner nettement les limites et les articulations. Ce revêtement décoratif se réduisit à quelques éléments pour ainsi dire invariables, et par conséquent fut aussi circonscrit dans ses principes que la construction dans les siens. Ce sont ces deux faits, bien constatés par les monuments, qui me permettent d'appeler le style classique et positif et fini. — Le monde nouveau qui commence après la chute de l'empire, va se mettre, dès le principe, en flagrante opposition avec ce caractère. Absorbé par une réforme religieuse, il va imposer son mysticisme non-seulement aux formes qui imitent la nature et qui sont du ressort de la plastique, mais encore aux formes purement architectoniques des édifices du culte. La pierre qui, jusque là, n'avait que des fonctions statiques, va acquérir une valeur morale, et l'architecture tout entière deviendra un art d'imitation.

L'on conçoit à quel point dès lors ses formes élémentaires, soumises à un ordre d'idées aussi vague et aussi étendu, devront se multiplier et s'éloigner de celles du monde classique ; à quel point leurs combinaisons seront diverses, leur construction variée, et comment les styles résultants acquerront, par leur diversité même, ce caractère pittoresque qui ne se rencontre jamais dans l'architecture antique. Telle sera l'opposition entre les édifices des deux cultes, que les uns, jugés du point de vue des autres, devront également être considérés comme barbares et qu'il faut, pour les apprécier à leur juste valeur, les juger isolément.

Première apparition de l'art romantique dans la basilique chré-

tienne. — L'on sait comment la basilique *romaine* se prêta, mieux que tout autre édifice, aux exigences du nouveau culte, et comment elle devint le type hors duquel devait naître la basilique *chrétienne.* Les nombreuses restaurations que les monuments de cette dernière espèce ont subi en Italie, m'obligent à faire précéder les observations ultérieures sur ce sujet par la description sommaire d'une basilique chrétienne *complète.*

Basilique chrétienne complète. — On entre d'abord dans une cour carrée, entourée de portiques, et au milieu de laquelle s'élève une fontaine pour les ablutions. Vis-à-vis de l'entrée de cette cour se dresse un porche ouvert par des arcades retombant immédiatement sur les colonnes. Ce porche donne accès à un vestibule oblong destiné à recevoir les profanes et les pénitens. On le désigne sous le nom de *nartex.* L'intérieur du monument est, divisé en trois ou en cinq nefs, séparées par des arcades sur colonnes. La nef centrale, plus large, est aussi plus élevée que les deux autres. Elle est éclairée par des fenêtres étroites, plein cintre, dont la naissance est au-dessus des combles des nefs latérales. Celles-ci, à leur tour, sont éclairées par des fenêtres de même style, pratiquées dans les murs d'enceinte. Toutes ces nefs, dans les premiers siècles, sont couvertes par des plafonds en charpente, à caissons plus ou moins riches. Quelquefois ces plafonds n'ont pas été exécutés et les fermes des combles sont restées apparentes.

Au bout de la nef principale, une grande arcade (arc de triomphe) ferme l'espace réservé aux fidèles. Ici, le sol s'élève. Une balustrade, aux deux extrémités de laquelle sont érigés des pupitres pour la lecture des livres saints, ouvre le chœur. Enfin, celui-ci est terminé par le lieu saint qui contient l'autel au centre et les siéges du clergé dans un fond circulaire, couronné par une voûte hémisphérique.

C'est là l'*abside.* — Quant aux collatéraux, ils sont également terminés par des arcades qui donnent accès à des salles carrées ou rondes, existant déjà dans les basiliques payennes.

Sous l'autel s'étend une crypte, en forme de chapelle, et qui renferme les reliques d'un martyr. Enfin, plus tard, par l'influence byzantine, on voit s'élever, au-dessus des nefs latérales, des galeries qui en doublent l'étendue.

Telle est la disposition générale de ces premiers monuments du culte. Quant aux détails d'architecture, on peut concevoir qu'ils étaient peu nombreux. Les colonnes seules pouvaient en présenter.

Tout le reste, n'offrant que d'immenses trumeaux nus, fut décoré de fresques, de mosaïques et de dorures.

Exemples. — Un des plus grands édifices de ce genre était l'ancienne basilique de St.-Pierre, de l'époque de Constantin, et dont une partie s'était conservée jusqu'en 1605. Les galeries de colonnes qui séparaient les nefs, y supportaient encore des entablements, à la manière romaine. — La basilique de St.-Paul hors les murs qui fut détruite en 1823 par un incendie, était sans doute, à en juger par les gigantesques constructions qui s'exécutent en ce moment pour sa réédification, le plus grand édifice de cette espèce. Enfin, St.-Jean de Latran pouvait, avant d'avoir été défigurée par Barromini, être citée comme le 3^{me} exemple d'une basilique complète et principale.

Caractères de ces monuments. — Une chose digne de remarque c'est que, dans cette époque de décadence complète, l'impuissance même de l'art conduisit aux effets pittoresques.

Jusque là, en effet, dans toute série de colonnes, on s'était astreint à répéter rigoureusement le même dessin pour tous les chapitaux. Maintenant le manque d'artistes, le manque de tems, fesant recourir à l'emploi de colonnes arrachées aux monuments romains, il arriva naturellement que ces colonnes étaient de proportions et de dessins différents. L'ignorance même des ouvriers, rendant les imitations toujours de plus en plus incorrectes, finit par laisser les modèles antiques entièrement dans l'oubli, et à créer des formes grossières à la vérité, mais naïves et spontanées, et qui devaient enfin se développer dans un style nouveau.

Ainsi s'établit dans l'architecture chrétienne *la diversité*, un des caractères du romantique. — Du reste, la simplicité du plan, l'étendue des ailes, les fuites qu'elles ménagent et que la perspective allonge, leur jour mystérieux, la majesté de l'arc de triomphe, la vue d'une partie de la crypte sainte, l'enhaussement du sol de l'autel, puis enfin, la voute sombre de l'abside, tout cet ensemble faisait de la basilique un modèle majestueux et sévère, marqué au coin d'un caractère religieux. Il n'y a pas jusqu'à la simplicité du système de toiture, laquelle est souvent apparente et sans plafonds, qui ne contribue à renforcer ce caractère.

Imitation moderne. — On voit maintenant à Munich une heureuse imitation des anciennes basiliques. — L'église de St.-Boniface n'a pas de plafonds; mais au travers des formes richement dorées qui couvent sa nef principale, l'on remarque une toiture métallique peinte en bleu foncé et sur laquelle on a représenté des étoiles.

Horizon chronologique du style des basiliques. — L'époque à laquelle appartient plus particulièrement le style de la basilique est le cinquième siècle et le commencement du sixième. Sans compter celles que nous avons déjà citées, on pourrait en nommer beaucoup d'autres, telles que S. Maria in Transtevere, S. Pietro in vincoli, S. Agata alla Suburra, etc.

Mais les évènements politiques des siècles suivants furent peu favorables aux progrès des beaux arts, du moins à Rome, et ce ne fut que vers le commencement du neuvième siècle qu'il s'y s'opéra une espèce de renaissance, sous la puissante protection des rois Francs.

Naissance du style byzantin. — Entre tems l'art romantique, placé à Byzance dans un milieu plus favorable, préluda à des formations toutes différentes qui finirent par gagner de l'ensemble et à prendre un caractère propre. Ainsi devait naître le premier style byzantin. Le trait dominant de cette architecture fut la voûte en pendentifs. Le plafond fit place à la voûte; la colonne au piédroit. Quant au plan des basiliques, il aurait pû être maintenu, si on s'était borné à voûter en berceau, c'est-à-dire à suivre des modèles romains; mais l'espèce de voûte qu'on préféra, et pour son apparence de légèreté et surtout à cause de sa forme symbolique et majestueuse, la voûte en pendentifs, ne put harmoniser qu'avec des plans circulaires ou carrés; elle ne put s'asseoir que sur des axes égaux et en croix. — La liturgie orientale exigeant d'ailleurs un narthex et un sanctuaire détaché de la grande enceinte, puis des espaces réservés pour les femmes, on grouppa, sur les quatre côtés du carré dans lequel se projette la voûte centrale, des enceintes accessoires que l'on voûta comme le centre, d'abord par des demi-coupoles, puis par des coupoles entières et détachées. Enfin, lorsque ce style vint à se développer, à la suite des siècles, le portique même qui précède le temple fut découpé, dans son plan, en espaces carrés et ceux-ci furent couverts par d'autres petites coupoles en pendentifs.

Ce système de construction anéantit à jamais le dernier souvenir de l'art grec : la colonne comme soutien essentiel. La voûte d'arêtes avait pû, dans les Thermes romains, retomber sur quatre colonnes qu'arc-boutaient du reste les angles des murs des piédroits. Mais la voûte en pendentifs, ayant une poussée plus compliquée, une élévation plus forte, un développement plus considérable, ne put être soutenue que par des piédroits.

Cette circonstance augmenta encore l'étendue de ces larges trumeaux nus que présentaient déjà les voûtes et agrandit le champ de la peinture à fresque et de la mosaïque.

Le type dont nous venons de décrire les masses et l'essence se manifesta d'une manière complète, pour la première fois, sous Justinien, dans l'érection de l'église de S^te^-Sophie à Constantinople.

Style byzantin en Italie. — S'il ne fut jamais, lors même de la conquête de l'Italie sous Bélisaire et Narsès, ni après, sous des influences orientales encore plus directes, à Venise, imité d'une manière bien évidente, cette circonstance tient à des causes complexes qu'il faut chercher dans la différence de la liturgie latine, dans la présence d'un type indigène déjà consacré, celui de la basilique, et enfin, dans la plus grande facilité de construction que présentait ce type sur celui de Byzance.

Néanmoins, on ne peut contester à l'influence byzantine un fait bien essentiel. C'est l'introduction de la voûte comme partie centrale et couronnante dans les églises latines. Que les latins aient pris leurs leçons dans l'art de voûter directement à la source commune, à l'architecture romaine, où qu'ils ne soient que les imitateurs des néo-grecs ; cette circonstance semble peu importante pour l'histoire. Ce qu'il importe de constater, c'est l'implantation de la voûte sur la basilique, et cette combinaison se présente dans tous les monuments du 9^me^ siècle.

Elle se répète et se développe dans tous ceux des siècles suivants et se continue, sans interruption, jusqu'à l'époque où elle atteind la dernière limite du grandiose dans St.-Pierre à Rome.

Remontons à la source de cette formation. Dans les huit premiers siècles de l'ère chrétienne, deux styles se partagent le monde et réagissent l'un sur l'autre. Ils se trouvent pour la première fois en présence à Ravenne. A côté des basiliques à nefs élevées dans cette ville sous Théodore et plus tard sous Théodoric, on voit apparaître des édifices contemporains où la voûte joue un rôle exclusif. Tels sont le Baptistère à côté de S. Giovanni in Fonte, la petite église de S. Nazario e Celso, (en forme de croix dont les branches sont voûtées en berceau, tandis que le centre est surmonté d'une coupole élevée), le mausolé de Théodoric (aujourd'hui S. Maria della rotonda) et plusieurs autres monuments également importants.

Jusque là, toute fois, on peut considérer l'emploi de la voûte en Italie, comme local, accidentel, pris spontanément dans l'architecture romaine.

Il n'est pas nécessaire d'en chercher l'origine à Byzance, tandis que les modèles en étaient à Rome. On peut même accorder aux latins la gloire d'avoir fait des progrès dans l'art de plier la voûte à des combinaisons nouvelles.

Mais alors, vers le milieu du 6me siècle, Ravenne devint grecque. Sous cette nouvelle domination, St.-Vitale s'éleva dans un caractère purement byzantin. Les éléments décoratifs qui s'étaient formés à Byzance furent transplantés en Italie. Les mosaïcistes y arrivèrent de l'orient et insensiblement l'élément oriental se fixa plus intimement sur l'architecture latine. Par l'influence et l'exemple byzantins, la voûte au centre de la nef devint symbolique et nécessaire. Un ciel fictif dût s'ouvrir au-dessus de l'autel, trône de la divinité. Le plafond de la basilique latine dut s'écarter devant ce symbole majestueux, désormais caractéristique et nécessaire.

D'ailleurs, la réputation de Ste-Sophie devint européenne. Elle fut longtems l'église par excellence. Or, quel monument exprimait mieux que Ste-Sophie cette pensée religieuse de faire du temple une image du monde, et d'élever l'autel comme en face de Dieu, sous l'image du ciel où il règne? Certes, si l'art de voûter était connu et pratiqué avant l'influence byzantine en Italie, la nature symbolique de la voûte, et partant son emploi mystique dans l'architecture religieuse ne furent rendus sensibles que sous la main des néo-grecs; et quoique le style latin ne reproduise pas, dans ses coupoles, le dôme byzantin, on ne peut contester que ces coupoles dérivent de celle de Ste-Sophie, à laquelle elles sont attachées par une pensée originaire commune et par des symbolismes identiques.

Exemples. — De tous les monuments de l'Italie, celui qui donne l'image la plus riche et la plus parfaite du style byzantin, est sans contredit St.-Marc, à Venise. Commencée en 976, cette église fut achevée dans son plan primitif en 1071. Elle est un des premiers indices de la renaissance des arts italiens et présente une telle profusion de détails, qu'elle offrirait à elle seule une étude longue et riche. Comme sa description se trouve partout, je me bornerai à dire que son aspect oriental n'a rien de commun avec tout ce que j'ai vû ailleurs, qu'il fait une singulière mais profonde impression, provenant plutôt de l'étonnement que d'un sentiment religieux; que ses dorures et ses mosaïques, ses colonnettes bigarrées, de dessins différents, son ornementation diverse, tantôt byzantine, tantôt moresque, tantôt gothique; que le morcellement de son espace intérieur, la présence même de l'iconostasis qui coupe la vue du

sanctuaire, la bigarrure universelle qui couvre son sol, ses voûtes et ses trumeaux, ne sont pas de nature à inspirer le recueillement, mais plutôt la gaieté et l'admiration qu'on éprouve dans un séjour riche et luxueux.

Imitation moderne. — Je puis comparer à cette impression celle que j'éprouvais en entrant dans la nouvelle chapelle de la cour à Munich. Du reste, je crois que, sur ce dernier édifice, on a prodigué les fresques et les dorures dans la vue de ménager des effets nocturnes à la lumière d'une riche illumination, et je pense que St.-Marc, placée dans de telles circonstances, doit gagner infiniment en grandeur et en majesté.

Style lombard, résultant du mélange des styles précédents. — Du mélange insensible des styles latins et byzantins se forma bientôt un mode d'architecture mixte présentant le plan de la basilique chrétienne, la coupole d'origine orientale, mais modifiée ; des absides couvertes par des voûtes hémisphériques et garnies à l'extérieur de galeries de colonnettes, un style de fenêtres et d'ornementation frisant le byzantin, des arcadures en briques aux cordons et aux corniches, etc. — On en voit un exemple frappant à Milan, dans l'église de St.-Ambroise. Elle est précédée par une cour rectangulaire, avec arcades reposant sur pilastres. Des sommets de ces pilastres, à la retombée de ces arcades, des colonnettes attachées au mur jaillissent jusqu'à la naissance des arcadures qui terminent la corniche. Au fond de la cour, on voit un porche à trois arcades plein cintre et présentant, au-dessus de la hauteur du portique, cinq fenêtres également plein cintres, mais qui diminuent de hauteur parallèlement avec les lignes du toit ; — à l'intérieur, la disposition d'une basilique, une galerie pour les femmes, une coupole octogone, une crypte profonde.

Développement de ce style au 11^e^ *siècle.* — Mais la Toscane devait l'emporter bientôt sur tout le reste de l'Italie par la grandeur et la perfection de ses monuments. Florence et Lucques produisent, dès le commencement du 11^me^ siècle, des églises remarquables par l'étude de leurs proportions et par le progrès de leurs sculptures. Pise les suit de près. Buschetto et Rainaldo y élèvent ce fameux dôme (1063) qui offre le premier exemple d'une grande coupole romane et qui, par la simplicité de l'ordonnance et la pureté du travail, surpasse tellement les monuments contemporains, qu'on serait tenté d'en placer la construction à une époque beaucoup plus avancée. Le plan de l'église est celui d'une croix latine. Elle a cinq

nefs. Celle du centre, séparée des autres par deux douzaines de colonnes corinthiennes, est couverte par un plafond à caissons dorés. Les autres sont voutées. Les colonnes de ces nefs sont réunies par des arcades et surmontées de colonnes plus petites et plus nombreuses qui forment une galerie circulant autour de l'église. Pour donner une idée de l'importance de cet édifice, il suffira de dire qu'il a 450 colonnes qui appartiennent pour la plupart à l'antiquité. Je regrette que les limites de ce travail m'obligent à passer sous silence et la belle ordonnance de l'extérieur dont des entablements continus et les arcades sont presque romains, et surtout le travail magnifique des portes de bronze qui, à elles seules, sont des merveilles en fait d'art. — Je profiterai de cette occasion pour dire un mot de tout ce groupe de monuments que Pise présente à l'admiration du voyageur. Sur une même place publique en effet s'élèvent, à côté du dôme dont nous venons de parler, le baptistère, (1152), la tour penchée (1173) et le Campo Santo, terminé en 1283,

Quoique ces monuments appartiennent à des époques et à des écoles différentes, on y remarque un air de famille qu'augmente encore une perfection commune et la disposition zébrée des matériaux et des marbres. L'admiration du spectateur s'y partage avec incertitude et s'arrête tantôt sur la construction si hardie et la richesse du baptistère, ou sur l'effet pittoresques des zones de colonnettes blanches de la tour penchée, tantôt sur l'imposante gravité du Campo Santo.

Progrès dans l'art de voûter. — Pour l'époque où le baptistère a été commencé (1152), ce fut sans doute une entreprise hardie que celle d'élever, sur des arcades superposées extrêmement sveltes, et fermant, comme le ferait un treillage, une enceinte circulaire, d'élever, dis-je, une immense coupole conique, jusque là sans exemple dans l'architecture, et de transporter, par une double voûte d'arêtes en tour ronde, couvrant deux galeries circulaires superposées, la poussée de ce cône sur une enceinte massive en marbre.

Architecture funéraire. Campo-Santo de Pise. Quant à la tour penchée, elle est si connue, que je la passerai sous silence. Mais le Campo-Santo mérite une mention particulière. Quoiqu'il ne se compose que d'une cour rectangulaire oblongue entourée d'un large portique, ce monument est, à mes yeux, le cimetière le plus imposant que je connaisse.

L'art moderne n'a rien produit d'égal pour la gravité du carac-

tère et l'unité de l'ensemble, ni dans le somptueux Campo-Santo de Bologne, ni dans celui de Francfort. Le portique qui forme la partie architecturale de cet édifice est fermé au dehors par un mur qui n'a d'autres ouvertures que quelques portes nécessaires. Cette nudité symbolique et silencieuse contraste avec la galerie d'arcades sur pilastres qui ouvre le portique à l'intérieur. Ces arcades présentent, dans leur timpan circulaire, une ornementation qui est probablement postérieure au reste. Ce sont des ramifications gothiques, composées de trefles, de quatre feuilles et de petites rosaces, et supportées par trois colonnettes. — La toiture est apparente et laisse voir une longue série de fermes comme celle des anciennes basiliques.

Tout a été calculé ici pour remplir l'âme de recueillement. La longueur immense de ces portiques, l'ombre et le mystère de cette longue toiture apparente, les fresques des murs, les urnes et les sarcophages antiques épars, l'ombre fantastique des arcades projetée sur les dalles et jusqu'à la vue extérieure du dôme, de la tour qui penche et des montagnes lointaines, tout parle, tout a un langage grave et vibrant.

Les monuments de Pise viennent de m'entraîner jusqu'à une époque fort avancée, car le Campo-Santo n'a été achevé qu'en 1283, et j'ai laissé derrière moi ce grand nombre de monuments lombards que les deux précédents virent éclore de toute part. Côme, Bergame, Brescia, Vérone, Padoue, Venise, Ferrare, Mantoue, Plaisance, Parme, Modène et Bologne possèdent des dômes, des baptistères, des tours et des cloîtres dont la construction et le style sont semblables et contemporains.

Derniers progrès du style lombard. — Dans tous ces monuments, le modèle qu'a pû nous offrir St.-Ambroise à Milan fut considérablement agrandi et développé. On acquit avec l'expérience, une hardiesse croissante dans la jetée des voûtes et des coupoles, des ressources plus étendues dans l'ornementation, un goût plus pur dans l'exécution des détails.

L'échelle des édifices s'agrandit et avec les masses on vit s'accroître les richesses décoratives. On cessa de faire des emprunts à l'art antique, on créa des motifs propres. L'architecture ne fut plus une mosaïque des styles précédents, elle conquit une physionomie à elle, et une importance qui s'étendit bien au-delà de l'Italie. En effet, lorsque des circonstances politiques et des relations commerciales eurent implanté ce style nouveau au-delà des Alpes, il y

gagna une vie nouvelle, et y préluda, par une filiation de formes non interrompue, à la naissance du gothique.

Apparition de l'architecture ogivale en Italie. — Mais il n'en fut pas ainsi en Italie, et la marche des choses y fut inverse. Le style ogival du nord n'y prit racine qu'accidentellement, tandisque le style lombard, après avoir atteint une importance universelle, fit soudain un retour vers le passé et vit sortir de son sein cette renaissance classique qui pointait déjà dans le crayon de Buschetto.

Avant de suivre, dans son développement, cette renaissance si puissante, si absolue, si générale dans le monde artistique, examinons la physionomie que prit le style ogival dans la peninsule italique et indiquons le degré d'importance qu'il parvint à y atteindre. — En général, le principe ascendant, (le caractère d'élan, la tendance verticale) du style ogival, se trouvant en opposition directe avec les éléments antiques qui étaient toujours sous les yeux des architectes italiens, ce principe ne put s'épanouir avec la même liberté et avec une égale inspiration dans leurs monuments.

La verticale du nord fut toujours en lutte avec l'horizontale du midi, et c'est à peine si l'enveloppe extérieure du style ogival, composée de l'arc en lancette, de gables, d'aiguilles, de ramifications à jour dans les fenêtres, fut saisie et rendue. La voûte garda sa lourdeur et sa nudité lombarde, les arcs doubleaux et les nervures furent toujours profilés sans profondeur, les faces des piliers gardèrent leurs pilastres et ne purent jamais s'effacer et fuir comme les piliers gothiques; les contreforts restèrent lourds et plats; les fenêtres, et cette circonstance doit être attribuée au climat, s'ouvrirent à peine, et les murs gardèrent, comme soutien, leurs fonctions premières; des cordons, des entablements horizontaux ne cessèrent d'attirer le regard loin du ciel et de contraster du reste avec des détails réellement ogivaux, exprimant une tendance opposée. Ces détails mêmes furent généralement manqués, d'abord dans les profils qui n'avaient ni le refouillement ni la grâce des profils gothiques, ensuite dans la composition qui ne présentait ni l'unité ni l'homogénéité des dessins du nord. Les colonnettes et les nervures se détachaient à peine, leurs chapitaux étaient informes, leurs feuillages sans ombre et sans transparence; les crochets des gables restaient collés dans la masse, les ramifications des tympans reproduisaient bien l'ensemble allemand, mais les roses ne se profilaient pas avec la même élégance; l'élément convexe et lourd n'y cédait jamais la

place à l'élément creux et à vive arête, enfin, tout le style germano-italien, si on peut l'appeler ainsi, ne présentait qu'un système bâtard sans entente, une juxta-position sans liaison, une combinaison sans principe de l'architecture du nord avec celle du midi, et qui ne mérite d'être citée que parcequ'elle est venue interrompre le développement des styles indigènes.

Monuments ogivaux en Italie. — Parmi les monuments qui sont empreints de ce caractère, dans toutes ou dans certaines de leurs parties, nous citerons le Campo-Santo de Pise, pour les ramifications de ces arcades; le baptistère, pour sa décoration extérieure de gables et d'aiguilles, la cathédrale de Florence, plutôt pour le style de ses fenêtres que pour la construction de ses nefs; St.-Maria in Strata et le dôme à Monza pour leurs façades; le dôme de Côme; St.-Maria Glorieuse à Venise; St.-Pétronio à Bologne; St.-Antoine à Padoue; St.-François à Assisi, etc.

Dôme de Milan. — Comme je place la cathédrale de Florence plutôt dans les premiers monuments de la renaissance, je la passerai ici sous silence; mais je m'arrêterai au dôme de Milan qui fait exception à tout ce qu'on vient de dire, et laisse tellement loin derrière lui tous les monuments plus ou moins gothiques de l'Italie, qu'il dépasse même, pour la richesse des matériaux et l'effet religieux de ses nefs, tous les édifices ogivaux du Rhin et de la France.

Commencé en 1386, ce dôme fut achevé dans ses masses vers la fin du 15e siècle. On y travaille encore aujourd'hui. Il n'y a au monde que deux églises qui soient plus étendues, dans la longueur, et une seule qui soit plus large. C'est le seul édifice gothique de cette importance qui soit entièrement construit en marbre blanc. Il s'élève, comme les temples antiques, sur un soubassement en marbre. Le portail, que Pellegrini a gâté avec ses portes renaissance, élève d'une manière imposante sa masse triangulaire et blanche, chargée de pilastres à niches et hérissée d'aiguilles, de statues et d'une bordure de petits gables.

Au centre, une restauration récente et de bon goût a mis à la place d'une fenêtre de Pellegrini une de ces grandes fenêtres de portail gothique, pour lesquelles la puissante imagination des architectes du moyen âge a épuisé ses richesses et ses ressources.

Mais entrons dans la basilique. Quelle immensité! quel mystère! quelle grandeur! Non, jamais ni la voûte gigantesque de St.-Pierre à Rome, ni la nef aérienne d'Ulm, ni le chœur du dôme de Cologne, ne m'ont paru aussi imposant et aussi merveilleux. Cinquante-

deux énormes piliers dont les plans, en profil d'étoile, sont rangés sur cinq nefs et dessinent une croix latine, élèvent chacun huit gerbes blanches vers le ciel. Ces gerbes, avant de recevoir les nervures correspondantes de la voûte, vont se perdre dans l'ombre des tabernacles qui couronnent les piliers et qui leur forment des chapitaux de six mètres de hauteur. La voûte elle-même, quoiqu'elle ne soit que peinte dans les champs qui séparent les nervures, est d'un effet magique. On dirait un réseau de flammes, de la légèreté d'une dentelle, au travers duquel percerait l'azur du ciel.

Des voûtes, mes regards descendent sur les murs. On n'y voit pas ces énormes fenêtres du nord qui dévorent les trumeaux; mais la lumière qu'elles donnent aux travers de leurs vitraux peints n'en est que plus mystérieuse et plus brûlante; elle tombe et se brise partout sur les galbes blancs du marbre et y dessine des couleurs d'une pureté extrême. Ce sont surtout les fenêtres du chœur, éclairées par un soleil couchant, qui sont remplies de magie, et le spectateur le plus indifférent s'y arrête avec délice.

L'extérieur du dôme n'est pas moins admirable. Une forêt de pinacles surmontés de statues, le tout en marbre blanc, découpe l'air autour de vous. De longues chaînes d'arcs-boutants descendent, des deux côtés du faîte, en passant sur les combles dallés des nefs latérales. L'égoût qu'ils portent est caché entre deux bordures d'arcadures trilobées renversées, fleuronnées à leurs naissances, et sous lesquelles s'étend une frise de quatre-feuilles encadrées. L'ensemble de ces arcs-boutants, de leurs couronnements, des aiguilles qui en dessinent le milieu et les extrémités, est tel, qu'il surpasse en richesse tout ce que le Nord peut offrir d'analogue. Les profils architectoniques, les feuillages décoratifs, les statues sont d'une pureté modèle, que la blancheur du marbre relève encore. Au lieu de ces gargouilles informes que le moyen âge plaçait comme des caricatures aux bouts des éperons, j'ai vû ici des anges aux aîles étendues, tenant une urne en main et versant l'eau du ciel loin de la maison du Seigneur.

Le dôme de Milan est de tous les monuments religieux de l'Italie, celui qui fait l'impression religieuse la plus profonde. Il a, dans sa disposition, la sévérité de la basilique, dans son style, l'élan du gothique, dans ses matériaux qui sont uniformes, une richesse à lui seul. Il est placé là, au nord de l'Italie, comme une protestation éloquente que l'ogive fait contre la renaissance italienne, et comme une émule toujours victorieuse des basiliques antiques et modernes.

L'ogive dans l'architecture civile en Italie. — Jusqu'à présent nous n'avons examiné que les monuments du culte. L'ogive cependant, pendant son règne en Italie, s'est aussi appliquée à l'architecture domestique, et cela surtout à Venise.

Les palais vénitiens ont ordinairement, sur la façade, des galeries superposées sur lesquelles donnent toutes les salles intérieures. Cette disposition a permis d'imprimer à l'aspect de ces palais une physionomie pleine d'élégance et de romantisme. Tandis que les ogives de la galerie du rez-de-chaussée sont en général lourdes et reposent sur pilastres, celles des galeries supérieures sont trilobées, dentelées, reposent sur des colonnettes légères et supportent quelquefois un réseau à jour de quatre-feuilles ou de trefles. On y reconnait pourtant un mélange de formes orientales, peut-être aussi des souvenirs de l'architecture lombarde. Ces palais sont rangés pour la plupart sur le grand canal, et dans le nombre, je citerai la *Casa Doro*. Le palais du doge, sur la place St.-Marc, est d'un style beaucoup plus lourd. On rencontre encore l'ogive dans d'autres palais d'Italie, comme au *palazzo vecchio* et à la *loggia dei lanzi* à Florence, ainsi qu'à d'autres édifices civils de Milan, de Bologne, de Come, etc., mais c'est plus plutôt comme forme accidentelle et non comme élément systématique.

Après avoir fait cette digression, que le passage du style ogival avait rendu nécessaire, poursuivons le développement de l'architecture italienne proprement dite dans cette époque où elle parvint à revivre de ses propres forces.

Première renaissance. — Brunelleschi donne le signal de la renaissance italienne en construisant la coupole de S^te^-Marie des Fleurs à Florence. La partie déjà achevée de cette église avait été conçue dans un gout moitié gothique, moitié lombard, auquel l'emploi de panneaux de marbres de différentes couleurs, de contreforts massifs et d'une garniture de consoles avec arcadures, en guise de couronnement et de corniche, imprimait un cachet étrange de bigarrure de marquetterie et de lourdeur. Brunelleschi qui avait étudié, pendant son séjour à Rome, le système classique, appliqua ce système aux circonstances imposées. Il avait trouvé à Rome des voûtes qui se soutenaient directement sur leurs points d'appui ; des voûtes qui, présentant partout la même courbure et la même épaisseur, repartissaient également leur poids et leur poussée sur leur retombée et n'offraient plus, comme dans le système gothique, cette décomposition en nervures par laquelle on transportait la poussée sur des points résistants indirects et extérieurs.

Première coupole. — Fort de cette étude de l'antique, il parvint à jeter, sur un espace de 130 pieds de diamètre, les huit fuseaux d'une voûte ellipsoïdale double, qu'il éleva de 330 pieds au-dessus du sol. Ces fuseaux ne reçurent que des nervures extérieures, placées aux arêtes de jointures, et se continuant dans les pilastres qui fortifient les angles du tambour.

Cette construction immense effaça, par sa hardiesse, tout ce que l'école romantique avait produit jusque là, et prouva qu'il y avait pour l'art un avenir inattendu dans une direction meilleure ; qu'il y avait un développement indigène à espérer. Dès lors encouragées, poussées par la renaissance des lettres et le retour vers l'antiquité, l'on vit éclore à Florence et à Venise deux écoles travaillant dans ce sens, mais reproduisant les formes antiques avec des ententes différentes.

École Florentine. — Les Florentins, parmi lesquels il faut citer Brunelleschi, son élève Michelozzo-Michelozzi, Simone Cronaca, Bernardo Rosselini, et surtout le savant Leo Baptista Alberti, avaient plutôt saisi, dans le caractère de l'architecture romaine, cette apparence de grandeur et de durée, cette continuité sévère des grandes lignes, cette imposante énormité des matériaux (Colysée) qui frappe au premier aspect et forme réellement l'élément caractéristique de cette architecture.

École Vénitienne. — Les Vénitiens, au contraire, ou, si l'on aime mieux citer des noms, Fra Giocondo, Martino et Pietro Lombardo, et Bartolomeo Buono, étant constamment en face de monuments d'une richesse et d'une gaieté toute byzantines, n'éprouvant pas, au milieu de leurs lagunes, le même besoin de sûreté et de défense, s'abattirent de préférence sur la partie décorative et brillante du style romain et se l'approprièrent avec toute la vigueur d'une imagination orientale.

C'est surtout sur les édifices civils que les nuances distinctives de ces deux écoles sont marquées d'une manière tranchante. A Florence, on voit d'abord naître un caractère de massivité outrée. Les avant-corps du palais Pitti semblent reposer sur des quartiers de rochers entassés plutôt que sur des assises réglées.

Plus tard, le bossage, cet élément favori de l'école toscane, est soumis à des limites et mis en harmonie avec des éléments décoratifs moins graves.

Quelques profils font distinguer le socle du reste du mur. Des cordons ou plinthes, séparant les étages, interrompent, par leurs

denticules, la monotomie des assises; le bossage lui-même, d'abord énorme dans sa saillie au rez-de-chaussée, se fond en montant, diminue d'étage en étage, et se perd enfin dans les assises qui avoisinent le sommet de l'édifice. Celui-ci est dessiné par une corniche corinthienne très riche et très saillante.

Les fenêtres des étages principaux, au lieu de se terminer dans un plein cintre nu, comme au palais Pitti, sont divisées en deux parties par une colonnette supportant deux petits cintres au-dessus desquels s'élève une rosace. Un chambranle biais, à profils renfoncés, presque gothiques, entoure l'ouverture des fenêtres sans être interrompu par un imposte.

Enfin un plein-cintre en bossage enveloppe la partie circulaire de ce chambranle, comme une archivolte, et sert de transition entre les moulures de la fenêtre et le bossage du mur. Souvent, comme les voussoirs du cintre augmentent de longueur en s'approchant de la clef, la courbe extérieure qu'ils dessinent est ogivale. — On ferait les mêmes observations sur les portes. Quant aux fenêtres du rez-de-chaussée ou soubassement, elles sont un peu plus hautes que larges, rectangulaires, sans chambranle, et ne figurent que de simples vides laissés entre les assises.

Tous ces caractères se reconnaissent entr'autres dans les palais Ricardi et Strozzi à Florence, au palais Viccolomini à Sienne, et au palais Vénitien, à Rome.

Quant aux églises, elles conservent encore en général, à l'intérieur, la disposition et le style lombards, quoique les détails s'exécutent dans un goût plus pur. Mais l'extérieur perd toutes les broderies romantiques, et les ordres grecs et les arcades romaines en occupent la place.

St.-Agostino, S. Maria del popolo, et la chapelle Sixtine à Rome, le chœur de S. Annunziata à Florence, l'église de St.-François à Rimini, remontent à cette époque. Ces derniers monuments, dûs à L. B. Alberti, sont tellement remarquables, sous le rapport du caractère classique, qu'on les rangerait volontiers dans ceux de la plus brillante époque de la renaissance, au 16^{me} siècle.

Nous venons d'analyser la manière de l'école Florentine. Celle de Venise, un peu plus tardive, trouva d'abord, dans les palais ogivo-byzantins du siècle précédent, sinon des ornements, du moins des dispositions imposées par l'habitude. Aussi se borna-t-elle, en maintenant les loges d'arcades extérieures, d'en modifier la décoration. L'ogive fit place au plein cintre archivolté, la colonnette à la

colonne et au pilastre romain, et les ramifications gothiques à des mosaïques en marbre précieux.

Parmi les palais de Venise qui appartiennent à cette manière, on compte le palais Manzoni, le palais Dario, le palais dei Camerlinghii près du pont Rialto; le palais Vendramin Calergi, ouvrage de Pietro Lombardo, etc. Dans ce premier feu de la Renaissance, pendant ce retour précipité vers l'architecture romaine, l'essence intime de cette architecture n'avait pû encore être saisie que sous son enveloppe; le crayon inexpérimenté n'en dessinait encore que l'esquisse et n'en rendait à peine que les caractères extérieurs.

Ici, l'on était encore lourd, pour vouloir être grand, là, on restait encore byzantin, pour vouloir être riche.

Brillante époque de la renaissance. — Il était donné au 16^{me} siècle seulement de réaliser l'alliance classique de la grandeur et de la richesse, de la solidité et de la grâce, et de faire revivre, d'une vie nouvelle, les principes de l'architecture romaine. — On commença, dès les premières années de ce siècle, à employer les formes antiques avec plus de sévérité, à suivre l'impulsion donnée par Alberti. Vitruve fut observé à la lettre, les monuments romains furent mesurés et étudiés avec soin et des traités didactiques ne tardèrent pas de régler, peut-être aussi d'engourdir l'élan des architectes. — Rome, centre du monde antique, redevint aussi le centre du monde nouveau, et les anciennes écoles lombarde et toscane vinrent se fondre dans l'école romaine.

Bramante, Veruzzi, Serlio, Raphael et son élève G. Romano, Sangallo, Pirro Ligorio, Michelangelo, Barozio Vignola et Fontana sont autant de grands maîtres qui vont fixer l'histoire de l'architecture à leurs individualités, et élever une Rome nouvelle à l'ombre et sous les auspices de la Rome d'Auguste.

En même temps Gènes se décore de palais magnifiques, par la main de Galeazzo Alessi; Vérone est fortifiée suivant les conceptions de Michele Sanmicheli, et Venise voit naître à côté de ses palais antiques, des palais nouveaux d'un goût plus pur. Sansovino, Scamozzi, Longhena, et, plus grand qu'eux tous, le fameux Palladio, couvrent les lagunes et toute la Lombardie de monuments qui restèrent longtemps rivaux de ceux de Rome, et demeurent aujourd'hui encore des modèles dans l'architecture domestique. Aucun siècle peut-être ne fut plus fécond, aucun ne fut plus puissant dans les arts, que celui-ci.

L'architecture des palais acquiert une élégance jusque-là inconnue.

Les bossages sont adoucis. On ne les étend plus au delà du soubassement ; on les réserve pour les chaînes de pierre aux angles des édifices. Des porches surmontés de balcons à balustres et flanqués de pilastres ou de colonnes, ornent l'entrée principale. Des entablements complets, à frises ornées, séparent les étages. La nudité des trumeaux lisses est masquée par d'élégantes galeries de pilastres ; les fenêtres réduites au système horizontal, malgré le cintre intérieur qui les recouvre, portent d'élégantes corniches supportées par des consoles. Souvent leurs entablements, soutenus par des pilastres ou des demi-colonnes corinthiennes, sont couronnés par des frontons triangulaires ou courbes. Nulle part on ne voit reparaître les deux arcs inscrits et la colonnette du milieu.

La corniche principale qui couronne la façade n'a plus cette énorme saillie des corniches florentines, permise dans les façades à bossages qui ne présentaient aucun élément d'ordonnance comme terme de comparaison ; mais cette saillie est modérée et réglée selon les ordres employés dans la décoration. Enfin, l'intérieur des palais est conçu dans un style plus ouvert et plus gai. Au lieu des sombres et lourdes arcades d'une cour intérieure étroite, on voit régner, tout autour du cortile élargi, au rez-de-chaussée, au premier et souvent même au second étage, des galeries ouvertes par des arcades sur colonnes et garnies de balustrades.

Les voûtes de ces galeries sont décorées de fresques. Des statues, des fontaines animent ces cours, et souvent, comme à Gènes, l'inégalité du terrain y donne occasion à des effets très pittoresques.

C'est alors qu'on crée les dispositions les plus imposantes pour les vestibules à colonnes et pour les escaliers à rampes décorées de sculptures ; c'est alors qu'on cherche à ménager des points de vue au fond des cours où des terrasses, des niches, des jets d'eau inattendus, s'élèvent en amphithéâtre dans un ensemble harmonieux.

Tels sont les palais de Gènes. Ils présentent encore, comme une particularité qui leur est propre, des ailes formées de portiques sur colonnes et couvertes de terrasses. Ces portiques s'élèvent quelquefois au sommet des édifices, et leur donnent une légèreté et un charme tout particuliers. C'est ce qu'on peut reconnaître au palais Doria et au palais Balbi.

L'architecture militaire se développe en même temps dans un caractère plus grave. Le style dorique à bossages paraît convenir plus particulièrement à rendre ce caractère. C'est ainsi qu'on bâtit une porte de Vérone et certaines parties du château de Caprarola.

— Cette malheureuse alliance du bossage avec les ordres est du reste employée pour l'achèvement du palais Pitti, dans la cour intérieure, et ne saurait être excusée que par la nécessité, toute locale, qu'éprouvait Ammanati de mettre les constructions nouvelles en harmonie avec celles de Brunelleschi. — En opposition avec ces derniers souvenirs du 15^{me} siècle, auxquels touche le palais du T, de G. Romano, nous pouvons placer les élégantes villas du même maître et surtout celles de Palladio. Sous la main de ce dernier l'architecture romaine descend pour la première fois des hauteurs monumentales pour se plier aux besoins plus modestes de la vie privée ordinaire. Palladio a l'art de mettre les ordres à la portée des constructions les plus simples et les moins étendues. Il sait trouver à la fois des distributions si simples et si commodes, des groupes si pittoresques, des élévations dans lesquelles toute la décoration est tellement inhérente à la construction même, et partant devient non seulement agréable, mais en quelque sorte nécessaire, qu'il obtient comme le monopole des constructions de villas, dont il peuple les états Venitiens.

Les palais les plus fameux de cette époque sont : le palais de la Cancellaria, le palais Giraud, une partie du Vatican, de Bramante ; le palais Farnesina, le palais Massimi, par Peruzzi ; la casa Berti, le palais Vidoni, à Rome et le palais Nancini à Florence, par Raphael ; le palais de St.-Jean de Latran à Rome, par D. Fontana ; la Villa Madame et la Villa Lante par G. Romano ; les palais Farnèse et Corsini par Antonio da Sangallo ; la Villa Pia, par Pirro Ligorio, le Capitole avec ses ailes latérales par Michelangelo, le chateau de Caprarola par Vignola ; les palais Grimaldi, Sauli, Brignola, Giustiniani par Galeazzo Alessi, à Gènes ; les palais Grimani et Cornaro par Michele Sanmicheli, à Venise ; la bibliothèque, par Sansovino, à Venise.

Si jusqu'à présent, dans cette longue série de monuments qui décorent le 16^{me} siècle, je me suis abstenu de ranger les monuments religieux, ce n'a pas été sans intention. C'est qu'il s'élève ici, à l'horizon architectonique, un monument qui les résume tous, qui les couvre tous de son ombre et absorbe en lui seul toute l'histoire de la renaissance.

Église de St.-Pierre. — St.-Pierre à Rome est la plus colossale église du monde. Les plans, sa décoration, son histoire et ses critiques sont entre les mains de tout le monde, mais il y a peu de personnes qui aient eu le bonheur de constater par leurs yeux tout

ce qu'ils ont appris sur cette merveille. Je m'abstiendrai donc de prendre des mesures, là où tout dépasse l'échelle vulgaire, et je me bornerai à communiquer des impressions, échelle morale d'après laquelle on juge mieux d'un monument religieux.

L'ancienne cour sainte des basiliques s'ouvre d'abord devant moi dans un plan elliptique dont les foyers et le centre sont occupés par deux fontaines colossales et par l'obélisque de Néron ; tandisque l'enceinte est dessinée par les portiques de Bernini. Je me dispenserai de faire la critique de cet ouvrage, d'autant plus que Bernini est du 17^{me} siècle ; je ne dirai pas que j'ai cherché en vain l'effet de perspective résultant de la disposition trapazoïdale des galeries qui conduisent de ces portiques dans le vestibule — dans lequel j'ai trop hâte d'arriver. — Ce vestibule est, à lui seul, une église. C'est le narthex le plus imposant du monde, et il laisse bien loin derrière lui ceux de St.-Jean de Latran et de Ste.-Marie-Majeure. Si la façade extérieure mérite de justes reproches, on ne peut nier, à l'intérieur de cette œuvre de Maderne, cet imposant aspect qui tient à la grandeur des masses et à la richesse de la décoration. On serait même tenté de croire, à en juger par les vices des détails d'un côté et de l'autre par l'impression profonde de l'ensemble, qu'il existe en architecture des échelles pour lesquelles les détails sont impuissants et sans effet, et où les masses seules ont de l'action. Du reste, la grandeur de l'échelle n'est pas la seule circonstance qui absorbe, au premier aspect, l'action des détails. Je citerais des monuments où la richesse de la décoration, d'autres où la profusion des détails, d'autres enfin où une heureuse exposition occasionnent la même erreur. Ainsi, dans les églises ogivales, va-t-on d'abord, avant de s'abandonner à l'impression religieuse dont on est saisi, examiner si les détails sont d'un dessin correct, d'une exécution pure ; — demande-t-on à notre église St.-Jacques à Liége, si les nervures et les statuettes d'ange de ses voûtes sont d'un galbe irréprochable ; enfin, dans les villas de Portici et de Gènes, pourrait-on avoir le sang-froid de critiquer un chapiteau ou un entablement, quand la distribution de ces délicieux séjours vous ménage à chaque pas des surprises et des points de vue nouveaux, là où vous ne demandez autre chose à l'architecture qu'un peu d'ombre et un siège pour admirer les beautés de la nature ?

Eh bien, la basilique de St.-Pierre à Rome réunit, en elle seule, toutes ces illusions.

Enormité des masses, richesse inouie des décorations, profusion

des détails, exposition imposante, elle a en elle seule tout ce qui peut égarer le regard et tromper le jugement. On entre, et les piliers des voûtes, et la voûte elle-même, sont tellement éloignés de l'entrée, que la perspective les rappétit d'abord à des proportions ordinaires. Les anges des bénitiers, les pilastres des piédroits, le baldaquin de Bernini, le cintre des voûtes, tout est presque ordinaire, tout trompe nos prévisions et nos espérances. Mais pour peu qu'on s'approche, tout grandit soudain comme par enchantement, les anges des bénitiers vous font peur, les pilastres s'élargissent et montent aux nues, la voûte devient effrayante et le baldaquin de Bernini monte à 90 pieds au-dessus du sol. — Alors, on élève le regard vers la coupole. Nouvelle erreur! Le baldaquin vous sert d'échelle verticale; mais comme on est au pied même de la hauteur à mesurer, et que cette hauteur est de 616 palmes, la comparaison devient illusoire. C'est à peine si l'on juge pouvoir superposer trois de ces baldaquins pour arriver à la lanterne. Qu'on monte alors à la galerie de cette lanterne, et le baldaquin de 90 pieds de hauteur paraîtra à son tour n'en avoir qu'une vingtaine. Ce n'est plus qu'un petit centre sur le fond du sol. L'autel du pape n'est plus qu'un de ces dais qu'on porte dans les cérémonies religieuses; et l'homme lui-même, vu de ce point, se présente au premier aspect, dans tout son néant; mais bientôt à la pensée, il apparait dans toute sa puissance, lorsqu'on songe que c'est sa main qui a élevé lentement cet abîme sous ses pieds.

Lorsqu'on compare cette gigantesque construction de coupole à tout ce que l'antiquité et la renaissance avaient fourni jusque là de semblable, on doit y voir une véritable création. Elle est aussi différente, en effet, de la voûte du Panthéon que des coupoles de St.-Marc. Elle aurait peut-être une parenté plus rapprochée avec la coupole de St.-Marie des Fleurs à Florence; mais encore, dans ce parallèle, il y aurait à peine à trouver de commun quelques principes de construction, quelques artifices purement techniques. L'emploi des pilastres, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, la décoration des fuseaux, celle des pendentifs, tout le revêtement architectural en un mot, est une création de Michelangelo; création qui certainement n'est pas à l'abri d'une critique faite avec des arguments classiques, mais qui a pour elle le pittoresque de l'aspect, l'unité de l'ensemble, et surtout la grandeur de l'échelle.

Si l'on compare, à cet œuvre de Michelangelo, les projets de Sangallo et de Bramante, on ne peut méconnaître la supériorité de

la coupole existante, car en architecture comme en tout, l'élan du génie doit l'emporter sur la correction vulgaire du talent, et une création obtenir la préférence sur une simple imitation.

Si un seul architecte avait pû achever tout l'édifice, on n'aurait pas à y déplorer ce manque d'homogénéité et de continuité dans les formes qu'on y reconnait de toute part, mais depuis Bramante, une douzaine d'architectes s'y succédèrent en se corrigeant et se modifiant l'un l'autre, et souvent les erreurs de l'un d'entr'eux entraînèrent celles de ses successeurs. Michelangelo dût suivre les errements de Bramante et de Sangallo. Maderne dut dessiner sa nef et sa façade dans le style à pilastres de Michelangelo, et le Bernin, qui les suivit, emporté par une imagination sans règle, renchérit encore sur leurs erreurs.

Lorsqu'on commence à revenir de la première impression qui saisit le spectateur dès l'entrée dans l'édifice, et que l'on passe en revue les détails d'architecture, l'on est frappé des barbarismes qu'on y rencontre. Ce ne sont partout que frontons et corniches courbes, interrompus, inutiles; des balcons dans les niches, des entablements et des pilastres n'ayant d'autre objet que de servir de tapisserie et cent autres éléments d'une architecture détestable.

Aussi le regard quitte-t-il volontiers des lignes aussi peu correctes pour s'arrêter sur des formes plus directement significatives, moins vagues dans leur langage, et qui s'attachent à un ordre de faits et d'idées plus intéressants. Je parle des sculptures, des tableaux en mosaïques, et des mausolées qui font de la basilique de St.-Pierre un véritable musée.

Mais ces chefs d'œuvres étant éloignés de l'objet de ce travail, je résumerai mes observations sur la basilique de St.-Pierre et sur le style de la renaissance en général, par un dernier mot sur Michelangelo.

Ce grand homme, malgré tout son génie, n'avait pas saisi aussi bien que Palladio, par exemple, la nature intime de l'architecture classique; il n'avait pas compris que cet art repose avant tout sur la construction, qu'il est matériel dans sa grandeur, positif dans son élan, rigoureux jusque dans ses détails. — D'un autre côté, l'exemple de ses prédécesseurs n'était pas de nature à imprimer à son génie la direction convenable. Jusque là, en effet, sauf quelques exceptions, la renaissance n'avait guère profité de l'exemple du Panthéon; elle n'avait pas saisi le secret de la grandeur dans les édifices du culte.

A son premier réveil, elle s'était montrée grave et naïve, mais froide; plus tard, à Venise surtout, elle se fit pittoresque et brillante; puis enfin, à Rome et à Gènes, elle devint riche et légère. Tous ces caractères convenaient parfaitement à l'architecture civile, où ils s'appliquaient sans beaucoup de difficultés. Mais autre chose fut d'un monument dont les masses colossales, dépassant toutes les échelles antiques et modernes, demandaient une application plus large des lignes romaines, une sévérité plus grande et surtout une assurance que la conviction seule et l'aplomb, qui manquaient peut-être au grand artiste, pouvaient donner à ses conceptions.

La coupole, sous le point de vue religieux, est une forme significative et sublime. Ce caractère seul devait déjà exclure de sa base des fenêtres vulgaires, bannir de ses fuseaux des ornements insignifiants, éloigner de ses attiques toutes ces découpures de marquetterie dont le caractère remuant et sans but interrompt la sévérité des grandes lignes.

Il fallait avoir le courage de braver la nudité; il fallait abandonner sans crainte, des champs où l'architecture n'avait rien à faire, à la peinture qui les eut mieux occupés; il fallait enfin, quand on avait compris comme Michelangelo qu'un ordre unique est plus grand que deux ordres superposés, poursuivre cette idée heureuse dans tout le monument, l'étendre aux lignes horizontales, et en bannir tout ressaut; l'étendre aux trumeaux mêmes et en exclure tout placage; alors vous eussiez vû disparaître les frontons intérieurs, les corniches inutiles, les fenêtres à oreilles, les socles et les attiques superposés; et désormais aucune ligne oiseuse ne venant distraire le regard, vous eussiez saisi la grandeur toute entière et joui de l'intuition la plus complète du plus gigantesque monument du monde. — En somme, que fallait-il à Michelangelo? Rester logique et conséquent avec lui-même, régler son essor... mais, on l'a dit quelque part, la règle semble ennemie du génie et la réflexion incompatible avec l'inspiration.

Malheureusement la réputation de ce grand artiste imposa son exemple comme modèle à tout le monde chrétien. St.-Pierre à Rome devint le type de l'architecture chrétienne du 17^e^ siècle et du 18^e^.

Décadence au 17^me^ *siècle.*— Nous avons déjà vu comment Maderne fut entraîné par cet exemple dans sa malheureuse façade de St.-Pierre. Bernini, qui le suivit, renchérit sur cette *manière* dans le dessin des colonnes torses du fameux baldaquin et de la Scala Regia; mais il se releva et fit un retour vers une meilleure époque dans la cons-

truction du palais Barberini, où l'on trouve un escalier d'une coupe des pierres remarquable et d'un style gracieux.

Mais bientôt Dominichino, Berettini, et Alessandro Algardi, et surtout Borromini et ses élèves Sardi et Guarini, emportés par les errements des grands maîtres, leurs prédécesseurs, atteignirent, dans cette fausse direction, la dernière limite humainement possible. Les trois derniers surtout méritent d'être cités pour leurs extravagances et leur mauvais goût. C'est alors qu'on vit naître les formes monstrueuses des frontons interrompus et enroulés, des entablements onduleux, des colonnes tournantes, des cartouches et des médaillons; formes vertigineuses, dont tous les éléments, après avoir été contournés, amaigris, défigurés, furent ajustés à rebours, dans une espèce de menuiserie architectonique.

Est-il nécessaire de dépeindre la fureur avec laquelle ce style, malgré son excentricité et peut-être bien à cause d'elle, fut adopté dans toute l'Europe, où il reçut plus tard, quand le bon sens revint au monde, la réprobation la plus insultante et les saubriquets les plus grossiers. Si le style rococo (Zopfstil, en Allemagne — style de courtisane en Angleterre) mérite une mention dans ce tableau historique de l'architecture en Italie, c'est par son énormité même, c'est parcequ'il présente l'exemple le plus frappant des erreurs dans lesquelles on peut tomber en copiant, en s'attachant aux grands noms et non aux grands principes, en s'abandonnant au caprice et non au bon sens.

Ainsi, par un vertige étrange, cette brillante renaissance des arts qui avait produit tant de merveilles en peinture et en sculpture, qui avait répandu sa lumière et sa chaleur dans tout l'occident, et avait été si longtemps progressive dans les arts d'imitation, dut enfin venir échouer contre le colosse de la basilique de St.-Pierre.

Chose inouïe! ni l'état avancé de la sculpture et de la plastique, ni l'étude de l'antiquité littéraire ne purent relever l'architecture de l'abîme où son naufrage venait de l'engloutir! Il fallut deux siècles pour faire comprendre aux architectes italiens que la colonne n'est pas un ornement, mais un soutien; que la colonnade n'est pas un élément décoratif qu'on peut approcher du mur aussi près qu'on le veut et même l'y coller comme un placage, mais qu'elle n'est autre chose qu'un mur évidé, à jour, dont la distance à d'autres murs parallèles ne peut former qu'une galerie utile, un passage nécessaire; que les frontons, les chambranles, les impostes et tous les détails architectoniques ont une signification, une fonction utile,

inhérente à la construction ; que la décoration ne doit chercher ses motifs, sa place, son caractère, que dans des nécessités toutes positives, et que, loin d'être un masque pour voiler ces nécessités, elle n'est autre chose que l'élément expressif destiné à les faire valoir. Enfin, il a fallu que la Grèce redevint libre et que ses monuments fussent exhumés, pour que des vérités aussi vives reparussent au grand jour, et c'est à peine si l'autorité du Parthénon a pû vaincre celle de la basilique de St.-Pierre.

De cette profonde chûte, l'Italie ne s'est relevée que lentement.

Architecture moderne. — Sa renaissance, au 18e siècle, fut partielle et languissante. Ce ne furent plus les modèles romains, mais ceux des bons maîtres de la 1re renaissance qui servirent de guide. On soumit plus que jamais l'architecture à des règles étroites, à un mécanisme servile. Aussi, loin de développer les formes classiques, on se borna à les imiter avec une correction minutieuse. L'architecture devint un métier, et toutes ses productions semblèrent sortir du même moule.

Du reste, les monuments de ce siècle sont loin d'être aussi nombreux et aussi importants que ceux des siècles précédents. Rome, Florence et Venise, berceaux des grandes écoles, ne produisent plus guère que des restaurations. C'est à peine si l'on cite à Rome le palais de la Consulte par Fuga, et le palais Braschi, par Morelli.

Mais Milan, Naples, Trieste, Turin montrent, pendant le 18e siècle, une activité plus grande, un retour plus fervent vers la bonne école.

Piermarini élève à Milan le théâtre de la Scala et le palais de la Cour. Pollack marche sur ses traces dans la construction de la villa Impériale. Vanvitelli et Fuga rivalisent de bon goût, l'un dans son église de St.-Anmuziata et l'autre dans son hôtel royal des pauvres à Naples.

— Nous voici arrivés, ou peu s'en faut, au point où nous avions laissé l'architecture avec Michelangelo. Nous avons derrière nous plus d'un siècle en pure perte, mais le tems, les idées d'art, les circonstances politiques qui en favorisent le développement, tout cela est bien différent aujourd'hui de la civilisation du 16me siècle.

Le 19me siècle est appelé à parcourir une voie nouvelle — et ce n'est plus l'Italie qui doit y guider le monde. Au contraire, elle suit, et suit de loin, le Nord qui marcha si longtemps sur ses traces, et l'époque n'est pas éloignée, où elle enverra ses architectes aux leçons des Klentze et des Pugin.

Les monuments que l'Italie a produits depuis le commencement de notre siècle sont en général d'une importance secondaire.

C'est St.-François de Paul, à Naples, élevé par Bianchi sur le modèle du Panthéon et flanqué de deux aîles de portiques, d'un bon effet.

C'est l'amphithéâtre de l'Arène, à Milan, dessiné par Canonica sur les modèles romains; trois portes par Vanvitelli, Moraglia et Zanoja, et l'arc de la paix de Cagnola, le tout à Milan. Cet arc de triomphe est digne du siècle d'Auguste.

Puis enfin le théâtre de St.-Charles à Naples, par Niccolini, — le fameux café Pédrocchi, par Japelli, à Padoue, le cloître de la Superga par Ph. Ivara à Turin, et enfin le palais de Caserte, près de Naples, dans la construction duquel Vanvitelli a dépassé son siècle.

Parmi les monuments les plus modernes, je dois citer encore le cimetière de Bologne qui n'est pas encore achevé. Cet édifice est unique dans son genre.

L'idée de construire un cimetière où toutes les classes de la société aient leurs places particulières, où les hommes célèbres de la cité possèdent, au milieu des tombes vulgaires, un Panthéon; où, à côté des dépouilles des grands artistes, leurs chefs-d'œuvres trouvent un musée; ou enfin l'achat des tombes de famille, placées sous de beaux portiques, soit mis à la portée des fortunes les plus ordinaires; cette grande et généreuse idée appartient à Bologne, qui l'a dignement réalisée.

Rien ne prouve plus en faveur d'une civilisation que le culte des morts. Lorsque déjà ce culte, entretenu par un citoyen isolé, dénote chez lui et la religion du devoir et celle du cœur, à combien plus forte raison une entreprise aussi générale que celle de ce Campo-Santo, où toute une cité s'est levée en masse en manifestant les mêmes sentiments, ne doit-elle pas prouver en faveur de sa haute moralité?..

Des réflexions sur ce sujet pourraient me mener à des considérations toutes locales, et me faire faire un triste retour vers notre pays; mais ma mission finit ici et ne passe pas les Alpes.

XII. — *Suite du Mémoire sur la résolution des équations numériques,*

Par J. MARTYNOWSKI,

TOME PREMIER, P. 290.

§ V. *Méthode de Newton.*

46. On connaît la règle donnée dans tous les traités élémentaires d'algèbre, pour abréger l'extraction de la racine m d'un nombre, par laquelle connaissant les $n+1$ chiffres, on trouve les n suivants, en divisant le reste de la racine par m fois la puissance $m-1$ de la partie trouvée de la racine. Cette règle, qui n'est autre chose d'ailleurs que la méthode donnée, en premier lieu, par Newton, pour le calcul des racines d'une équation numérique, s'applique indistinctement à toutes les fonctions et fournit, dans leur évaluation numérique, le même degré d'approximation que dans l'extraction des racines.

L'extension dont cette règle est susceptible, les caractères qui la rendent propre au calcul des racines d'une équation et le rapprochement qu'elle fournit avec le théorème de Paoli, constituent l'objet des considérations actuelles.

47. Soit a la valeur approchée d'une fonction d'une seule variable, telle que $v=\varphi x$; et soit z la correction, dont il faut augmenter a, pour avoir

$$v=\varphi x=a+z \quad \ldots \qquad (1).$$

Désignons par ψ la fonction inverse de φ, savoir :

$$x=\psi v=\psi(a+z) \quad \ldots \qquad (2),$$

et développons cette dernière, par la formule de Taylor, en prenant z pour accroissement; nous aurons :

$$x=\psi a+\psi' a.z+\tfrac{1}{2}.\psi'' a.z^2+ \quad \ldots \qquad (3);$$

ou bien

$$\frac{x-\psi a}{\psi' a}=z+\tfrac{1}{2}.\frac{\psi'' a}{\psi' a}.z^2+\frac{1}{2.3}.\frac{\psi''' a}{\psi' a}.z^3+ \quad \ldots \qquad (4),$$

$\psi' a, \psi'' a, \psi''' a, \ldots$ désignant les dérivées successives de ψa. Cela posé, si z est une quantité assez petite pour pouvoir négliger les

termes suivants : on aura

$$z=\frac{x-\psi a}{\psi' a}\ldots \qquad (5);$$

partant

$$v=\phi x=a+\frac{x-\psi a}{\psi' a}=\frac{x+\mu.\psi a}{\psi' a}=\frac{r}{s}=a' \ \ldots \ (6),$$

r et s désignant, au besoin, les deux termes de la fraction ci-contre, et a' la fraction elle-même, dans laquelle on a, pour abréger

$$\mu=\frac{\psi' a}{\psi a}.a-1 \ \ldots \qquad (7).$$

Cela posé, la génération de la fonction $v=\phi x$ suit des expressions déjà posées; car, si z' est une nouvelle correction, dont il faut augmenter a', pour avoir v, on aura par les formules (1) et (2)

$$v=\phi x=a'+z',$$
$$x=\psi v=\psi(a'+z');$$

par la formule (5)

$$z'=\frac{x-\psi a'}{\psi' a'};$$

enfin, par les formules (6) et (7)

$$v=\phi x=a'+\frac{x-\psi a'}{\psi' a'}=\frac{x+\mu'.\psi a'}{\psi' a'}=\frac{r'}{s'}=a'',$$
$$\mu=\frac{\psi' a'}{\psi a'}.a'-1.$$

En opérant de la même manière sur a'' et en continuant de la sorte, on exprimera la fonction $v=\phi x$, comme il suit :

$$v=\phi x=a+\frac{x-\psi a}{\psi' a}+\frac{x-\psi a'}{\psi' a'}+\frac{x-\psi a''}{\psi' a''}+\ \ldots \ (A),$$

$a, a', a'', \ldots$ étant les réduites ou les sommes de un, deux, trois, ... termes de cette série. Voici d'ailleurs la formation de ces réduites :

$$\left.\begin{array}{l} a=a\ ; \\ a'=\dfrac{x+\mu.\psi a}{\psi' a},\ \mu=\dfrac{\psi' a}{\psi a}.a-1\ ; \\ a''=\dfrac{x+\mu'.\psi a'}{\psi' a'},\ \mu=\dfrac{\psi' a'}{\psi a'}.a'-1\ ; \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ (B)$$

Remarque I. Puisque v est la racine de l'équation $v-\phi x=0$ ou $\phi v-x=0$, lorsque x prend une valeur particulière; la série (A) donne la génération de cette racine v, pourvu que a soit sa valeur suffisamment approchée.

II. Newton n'a appliqué sa méthode qu'au calcul des racines d'une équation numérique. Présentée, sous la forme de la série (A), elle offre une véritable extension, dont nous avons parlé, N° 46. En effet, quelle que soit l'équation $\psi v - x = 0$, algébrique ou transcendante; le fait est que la série (A) donne la génération de la quantité v en fonction de sa valeur approchée a et de la constante x.

III. En examinant la série (A), on voit que les numérateurs des fractions, suivant lesquelles elle procède, ne sont autre chose que la proposée $x - \psi v = 0$, pour v égal successivement à a, a', a'',... Donc, si $x - \psi a$, $x - \psi a'$, $x - \psi a''$,.... diminuent de plus en plus, la série (A) est convergente. Cette circonstance a fait dire aux Analystes que la méthode de Newton est toujours applicable au calcul des racines d'une équation, pourvu que la valeur approchée de l'une d'elles soit suffisamment constatée. Mais si on prend, au hasard, un nombre a, pour le substituer dans la série (A); il se peut, qu'au lieu de converger, on diverge plutôt de la véritable valeur qu'on cherche à assigner. Le fait est que la méthode de Newton donne la génération d'une quantité auxiliaire, différente, quant à sa nature, de celle qu'on cherche; de sorte que, selon les circonstances, ou la direction donnée au calcul, l'on approche de cette dernière ou l'on s'en écarte. En un mot, la méthode de Newton donne ce dont elle est susceptible et non ce qu'on lui demande la plupart du temps. C'est donc à saisir l'esprit de la méthode que nous devons, avant tout, nous attacher.

48. Posons, pour abréger,

$$\frac{x - \psi a}{\psi' a} = u,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\psi'' a}{\psi' a} = a_1, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\psi''' a}{\psi' a} = a_2, \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\psi^{\text{IV}} a}{\psi' a} = a_3, \ \ldots$$

et l'équation (4) du N° précédent deviendra

$$u = z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4 + \ \ldots\ . \quad (1)$$

C'est de cette équation que Newton déduit la correction z en posant $z = u$, en admettant que les termes qui suivent z sont assez petits pour être négligés. On voit que, pour cela même l'équation Newtonienne $z = u$ ne donne que la quantité auxiliaire de celle qu'on cherche, et qu'on trouverait en résolvant l'équation (1) par rapport à z. Bien que cette résolution soit impossible, sous le point de vue théorique, elle peut néanmoins s'effectuer en série. En effet, si u est une fonction de z; réciproquement z est une fonction de u, et comme telle, elle peut se développer suivant les puissances ascen-

dantes de cette dernière. Donc, on peut poser

$$z = u + c_1 u^2 + c_2 u^3 + c_3 u^4 + \ldots \quad (2);$$

$c_1, c_2, c_3, \ldots$ étant des coëfficients à déterminer.

Tel est, en dernier lieu, le développement de la correction z, différente de celle que Newton emploie, à moins que l'on ne suppose u très petit.

Arrêtons-nous sur le développement (2).

Lorsque u est donné en série qui procède suivant les puissances de z et que, réciproquement, on cherche à développer u suivant les puissances de z, comme il est posé, sous la marque (2) : ce dernier développement est ce qu'on nomme *série en retour*. Bien que déjà Newton ait donné le moyen élémentaire de former cette série (2) ; néanmoins elle n'est connue que sous le nom du *théorème de Paoli*, parce que le dernier savant en a fait connaître la génération.

Nous commencerons par exposer d'abord le procédé de Newton, pour trouver la série (2).

Après avoir formé les puissances 1, 2, 3, ... de z, comme il est posé, sous la marque (2), substituons les expressions résultantes dans la série (1) et nous aurons l'identité suivante :

$$\left.\begin{array}{r} u = u + c_1 \\ + a_1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} u^2 + c_2 \\ + 2a_1 c_1 \\ + a_2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} u^3 + c_3 \\ + a_1 (c_1^2 + 2c_2) \\ + 3a_2 c_1 \end{array}\right\} u^4 + \ldots$$

En comparant les coëfficients de mêmes puissances de u, dans les deux membres de cette équation, il viendra

$$\begin{aligned} &c_1 + a_1 = 0, \\ &c_2 + 2a_1 c_1 + a_2 = 0, \\ &c_3 + (c_1^2 + 2c_2) a_1 + 3a_2 c_1 = 0, \\ &\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Telles sont les équations, données en premier lieu par Newton, au moyen desquelles, on peut calculer les coëfficients $c_1, c_2, c_3, \ldots$ de la série en retour (2). Le progrès que la science a fait, dans le dernier siècle, en employant les lettres numérotées, pour désigner les coëfficients successifs d'une série, et en répartissant ces coëfficients en groupes de un, deux, trois, ... facteurs, permet aisément de donner la loi de formation des coëfficients $c_1, c_2, c_3, \ldots$ qui nous occupent actuellement. Ainsi, en se rappelant les opérations que nous avons, à l'article du développement de la puissance quelconque d'un polynome indéfini, désignées par $a_n c_1, a_n c_2, a_n c_3, \ldots$; il sera aisé en les employant de faire ressortir la loi de formation des

coëfficients c_1, c_2, c_3, ..., comme il suit :

$$c_1 = -a_1,$$

$$c_2 = -a_2 + 4\left(\frac{a_1^2}{1\cdot 2}\right),$$

$$c_3 = -a_3 + 5(a_1 a_2) - 5\cdot 6\left(\frac{a_1^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right),$$

etc. etc.

généralement

$$c_m = -a_m c1 + (m+2)\cdot a_m c2 - (m+2)(m+3)\cdot a_m c3 + \\ + (m+2)(m+3)(m+4)\cdot a_m c4 - \text{etc.}$$

Telle est la loi du coëfficient général de la série en retour. Il me suffit, pour le moment, de faire connaître cette loi, démontrée par induction ; en renvoyant, pour plus amples détails, sur ce sujet, à une note supplémentaire, qu'on trouvera à la fin de ce mémoire.

Cette formation si simple des coëfficients c_1, c_2, c_3, ... a pourtant coûté des efforts inouis au géomètre italien, Philippe Rubiani, qui après avoir calculé ces coëfficients, jusqu'au neuvième rang inclusivement, était obligé, pour s'assurer de son travail, de recourir à des nombreuses épreuves.

La série en retour, dont nous venons de donner le développement final, n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général, qui consiste à developper une fonction, suivant les puissances de toute autre fonction donnée : théorème communément connu sous le nom de Paoli, parce que ce géomètre s'en était occupé le premier. Paoli a été pourtant loin d'atteindre la perfection signalée par la déduction des coëfficients de la série en retour, que nous venons d'exposer ; mais étant parvenu à donner, au théorème en question, le cachet qui lui est propre, il est en plein droit de le revendiquer en sa faveur.

Voici en quoi consiste la déduction de Paoli.

Soit une fonction de x, tel que $u = Fx$ et supposons que x soit lié à z par l'équation $z = \phi x$; il s'agit de développer u suivant les puissances ascendantes de z. En éliminant x entre les deux équations $u = Fx$, $z = \phi x$; il est évident qu'on parviendra à exprimer u en fonction de z et l'on aura, par exemple, $u = \psi z$. Si cette élimination, était toujours possible, on aurait le développement de u en z, par le théorème de Maclaurin, comme il suit

$$u = u_0 + u'_0 \cdot \frac{z}{1} + u_0'' \cdot \frac{z^2}{1\cdot 2} + u_0''' \cdot \frac{z^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

u_0, u_0, u_0'', ... étant la fonction u et ses dérivées successives, dans lesquelles, on pose $z=0$.

Or, que cette élimination soit possible, ou non, on peut toujours s'en passer et déduire u_0, u_0'. u_0'', ... par le procédé suivant.

Supposons que $x=a$ fasse évanouir z, dans l'équation $z=\varphi x$; on aura

$$u_0=\mathrm{F}\dot{x},$$

le point placé sur x désignant que, dans la fonction $\mathrm{F}x$, on met a à la place de x.

Des équations $u=\mathrm{F}x$, $z=\varphi x$, on tire

$$\frac{du}{dx}=\mathrm{F}'x, \quad \frac{dz}{dx}=\varphi' x;$$

et en divisant ces deux résultats,

$$\frac{du}{dz}=u'=\frac{\mathrm{F}'x}{\varphi' x}=\frac{1}{\varphi' x}.\mathrm{F}'x=\frac{1}{\varphi' x}.\frac{d}{dx}[\mathrm{F}x].$$

Donc, en posant $x=a$, et en désignant cette circonstance par un point placé sur x, on aura

$$u_0'=\frac{\mathrm{F}'\dot{x}}{\varphi'\dot{x}}=\frac{1}{\varphi'\dot{x}}.\mathrm{F}'\dot{x}=\frac{1}{\varphi'\dot{x}}.\frac{d}{dx}.[\mathrm{F}\dot{x}]$$

Si dans l'expression de $\frac{du}{dz}$, qui est en quelque sorte le schéma des opérations à faire, on met u' à la place de $u=\mathrm{F}x$, on trouve

$$\frac{du'}{dz}=\frac{d^2u}{dz^2}=u''=\frac{1}{\varphi' x}.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varphi' x}.\frac{d}{dx}[\mathrm{F}x]\right].$$

En posant $x=a$, et en désignant cette circonstance, comme nous l'avons fait précédemment par un point placé sur x, on aura

$$u_0''=\frac{1}{\varphi'\dot{x}}.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varphi'\dot{x}}.\frac{d}{dx}[\mathrm{F}\dot{x}]\right].$$

De même, mettons u'' à la place de u, dans l'expression de $\frac{du}{dz}$, et nous aurons

$$\frac{du''}{dz}=\frac{d^3u}{dz^3}=u'''=\frac{1}{\varphi' x}.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varphi' x}.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varphi' x}.\frac{d}{dx}[\mathrm{F}x]\right]\right].$$

En posant $x=a$, il vient

$$u_0'''=\frac{1}{\varphi'\dot{x}}.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varphi'\dot{x}}.\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varphi'\dot{x}}.\frac{d}{dx}[\mathrm{F}\dot{x}]\right]\right].$$

Ainsi des autres. En rassemblant ces résultats, on a

$$u_0 = F\dot{x},$$

$$u'_0 = \frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}[F\dot{x}],$$

$$u_0'' = \frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}[F\dot{x}]\right],$$

$$u_0''' = \frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}[F\dot{x}]\right]\right]$$

etc. etc.

Telle est la déduction, donnée par Paoli lui-même, du théorème qui porte son nom.

Appliquons les expressions précédentes à la série en retour.

Le point de départ, pour le théorème de Paoli, étaient les équations $u = Fx$, $z = \phi x$.

Or, si au lieu de Fx, on prend simplement x, les équations précédentes devenant $u = x$, $z = \phi x$; on voit qu'il n'est question ici d'autre chose que de développer x en fonction de z, lorsque celle-ci est donnée en fonction directe de celle-là. Ainsi, rien ne change dans les expressions précédentes de u_0, u_0', u_0'', ... si ce n'est que la fonction Fx devient proprement x. Par suite de cette dernière circonstance, les expressions u_0, u_0', u_0'', ... deviennent

$$u_0 = \dot{x}$$

$$u_0' = \frac{1}{\phi'\dot{x}}$$

$$u_0'' = \frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\phi'\dot{x}}\right]$$

$$u_0''' = \frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\phi'\dot{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\phi'\dot{x}}\right]\right]$$

etc. etc.

En effectuant les opérations indiquées, au moins pour quelques premiers termes, on aura

$$u_0 = \dot{x},$$

$$u_0' = (\phi'\dot{x})^{-1},$$

$$u_0'' = -(\phi'\dot{x})^{-3} \cdot \phi''\dot{x},$$

$$u_0''' = -(\phi'\dot{x})^{-4} \cdot \phi''\dot{x} + 3 \cdot (\phi'\dot{x})^{-5} \cdot (\phi''\dot{x})^2,$$

$$u_0^{IV} = -(\phi'\dot{x})^{-5} \cdot \phi^{IV}\dot{x} + 10 \cdot (\phi'\dot{x})^{-6} \cdot \phi''\dot{x} \cdot \phi'''\dot{x} + -15 \cdot (\phi'\dot{x})^{-7} \cdot (\phi''\dot{x})^3,$$

etc. etc.

Soit maintenant, comme sous la marque (1),

$$z=\phi x=x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+\ldots;$$

et réciproquement, comme sous la marque (2)

$$u=x=z+c_1z^2+c_2z^3+c_3z^4+\ldots. \quad (3)$$

Si on désigne la première de ces fonctions par $z=\phi x$, on aura évidemment

$$\phi'x=1$$
$$\phi''x=1.2.a_1,$$
$$\phi'''x=1.2.3.a_2,$$
$$\phi^{IV}x=1.2.3.4.a_3,$$
etc. etc.

En remettant ces expressions, pour u_0', u_0'', u_0''', ... on aura (4)... $u_0'=(1).1$

$$u_0''=(-a_1).1.2,$$
$$u_0'''=(-a_2+2a_1^2).1.2.3,$$
$$u_0^{IV}=(-a_3+5a_1a_2-5a_1^3).1.2.3.4,$$
etc. etc.

Or, si l'on a $z=\phi x$; en employant le théorème de Maclaurin, pour développer $x=u$, suivant les puissances de z, il vient :

$$u=x=u_0+\frac{u_0'}{1}\cdot z+\frac{u_0''}{1.2}\cdot z^2+\ldots$$

Cette équation, identique avec celle donnée sous la marque (3), fournit, en ayant égard aux relations (4), les expressions suivantes :

$$u_0=0,$$
$$\frac{u_0'}{1}=c_1=1,$$
$$\frac{u_0''}{1.2}=c_2=-a_1,$$
$$\frac{u_0'''}{1.2.3}=c_3=-a_2+2a_1^2,$$
$$\frac{u_0^{IV}}{1.2.3.4}=c_3=-a_3+5a_1a_2-5a_1^3,$$
etc. etc.

expressions, qui sont absolument les mêmes que celles données par Newton, pour la série en retour.

Résumons maintenant les faits que nous venons d'établir.

Nous avons vu, au commencement de ce même N°, que la

correction $z=u$, donnée par Newton, est, à proprement dire, une quantité auxiliaire pour obtenir celle qu'on cherche, et qu'on trouve effectivement, en retournant la série (1), c'est-à-dire en résolvant cette série (1) par rapport à z. Cette distinction, entre la correction de Newton, et cette même correction, fournie par la série en retour, se laisse encore mieux sentir, en employant les constructions géométriques, qui ont l'avantage de préciser, en quelque sorte, la nature des équations.

49. Posons

$$y=\psi v-x, \ldots (1)$$

équation, dans laquelle y est une fonction de v et x une constante; et, supposons qu'on prenne v pour les abscisses et y ponr les ordonnées d'un système de points, l'équation (1) donnera lieu à une courbe.

Cela étant, voici les particularités, les plus remarquables, qui se rattachent à la construction de cette courbe.

1°. Si une valeur particulière de v, rend y zéro, dans l'équation (1); la courbe, que cette équation représente, coupe l'axe des x, ou lui est tangente. Cela posé, les distances de l'origine aux points ou cette courbe coupe l'axe des x, ou lui est tangente, ne sont autre chose, sous le rapport numérique, que les racines de l'équation $\psi v-x=0$.

2°. Comme y est du premier degré, dans l'équation (1), il s'ensuit qu'à chaque valeur de v, prise depuis 0 jusqu'à $+\infty$ et depuis 0 jusqu'à $-\infty$, il n'y a qu'une valeur correspondante de y. La courbe, représentée par l'équation (1), ne peut se composer que d'une ou de plusieurs branches qui se suivent sans se couper. Les seuls points singuliers, qu'on pourra rencontrer, dans la courbe (1), seront : les intersections avec l'axe des x, dont nous avons déjà parlées, les points d'inflexions et les points limites, dont nous avons encore à nous occuper.

3°. L'office de $\psi' v$ ou de la dérivée première de $\psi v-x$ est de donner la direction ou la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe, dans le cas des axes rectangulaires, fait avec l'axe des x. Ainsi, a et $\psi a-x$ étant les coordonnées de la courbe (1); x', y' les coordonnées courantes de la tangente au point mentionné de cette courbe; on aura

$$y'-(\psi a-x)=\psi' a(x'-a)$$

pour équation de la tangente.

4°. On nomme *point limite* d'une courbe, le point pour lequel

l'ordonnée est maximum ou minimum. Comme telle, cette ordonnée doit nécessairement être plus grande ou plus petite que toutes celles qui précèdent ou qui suivent dans la courbe, quelque petite que soit la distance qui sépare ces dernières de la première. Ainsi, soit $\psi a - x$ l'ordonnée maximum ou minimum de la courbe (1), correspondante à l'abscisse $v = a$. Les points qui précèdent et qui suivent, dans la même courbe, celui qui est point limite, auront pour abscisses $a-h$ et $a+h$ et pour coordonnées correspondantes $\psi(a-h)-x$ et $\psi(a+h)-x$. Par conséquent, quelque petit que soit h, on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} \psi a - x &> \psi(a-h) - x, \\ \psi a - x &> \psi(a+h) - x; \end{aligned}\right\} \text{ pour maximum ;}$$

et,

$$\left.\begin{aligned} \psi a - x &< \psi(a-h) - x, \\ \psi a - x &< \psi(a+h) - x, \end{aligned}\right\} \text{ pour minimum.}$$

Cela posé, on sait que la dérivée première ou $\psi' a$, est

$$\psi' a = \lim. \frac{\psi(a+h) - x - [\psi a - x]}{h};$$

ou bien, en changeant h en $-h$

$$\psi' a = \lim. \frac{\psi(a-h) - x - [\psi a - x]}{-h}.$$

S'il y a maximum, les fonctions variées sont plus petites que la primitive, désignée ici par $\psi a - x$. Par conséquent, pour h très petit, $\psi' a$ est négatif dans le premier et positif dans le dernier de ces deux cas. Donc, dans le cas du maximum la dérivée première passe du positif au négatif. On démontrera de la même manière que, lorsqu'il y a minimum, la dérivée première passe du négatif au positif.

Ainsi, quel que soit le cas, du maximum ou du minimum, la dérivée première doit s'évanouir ; mais ce caractère seul ne suffit pas : il faut encore, dans le cas du maximum, que la dérivée première passe du positif au négatif ; et dans celui du minimum, du négatif au positif.

5°. Considérons maintenant la dérivée seconde, ou

$$\psi'' a = \lim. \frac{\psi'(a+h) - \psi' a}{h}.$$

Si la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x, les ordonnées vont en croissant, et les tangentes aux points successifs font, avec l'axe des x, des angles aigus, de plus en plus petits. Les tangentes

trigonométriques de ces angles, désignées par φ', diminuent aussi. Donc, la simple inspection de l'expression précédente de $\varphi''a$ fait voir que, dans le cas où la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x, l'ordonnée de la courbe et la seconde dérivée sont de signes contraires. On démontrera de la même manière que, dans le cas où la courbe tourne sa convexité vers l'axe des x, l'ordonnée et la seconde dérivée sont de même signe.

De là il résulte aussi que, selon le cas du maximum ou du minimum, l'ordonnée et la seconde dérivée sont de signes contraires ou de mêmes signes.

Au point où la courbe passe du concave au convexe et réciproquement, la seconde dérivée s'évanouit. Ce point de la courbe, appelé point d'inflexion, est encore caractérisé par ce que la tangente en ce point est en même sécante à la courbe.

Ces préliminaires posés, il nous sera facile de rendre compte de ce qu'est la méthode de Newton en elle-même et quel est son emploi dans l'évaluation des racines d'une équation.

Pour cet effet, par le point de la courbe (1) correspondant à l'abscisse a, savoir, par le point dont les coordonnées sont a, $\varphi a - x$, menons la tangente à cette courbe. L'équation de cette tangente sera, comme nous l'avons fait sous la marque 3°,

$$y' - (\varphi a - x) = \varphi' a (x' - a).$$

Au point où cette tangente coupe l'axe des x, on a $y' = 0$. Donc, en posant $y' = 0$ et en représentant la valeur correspondante de x' par x_0', on aura la distance de l'origine au point où la tangente coupe l'axe des x, savoir :

$$x_0' = a + \frac{x - \varphi a}{\varphi' a}$$

On voit que cette expression n'est autre chose que la réduite a' de la série (A), N° 47. Il résulte aussi de là que la correction, désignée dans cette même série (A), par z', n'est autre chose que la soutangente proprement dite.

En poursuivant la même marche, il sera aisé de démontrer que la réduite désignée, dans la série (A), par a'', n'est autre chose que la distance de l'origine au point, où la tangente à la courbe (1), menée par le point correspondant à l'abscisse a', coupe l'axe des x. De cette considération il est aisé de conclure que, si cette nouvelle tangente coupe l'axe des x, entre la première tangente et la courbe, il y a avantage d'employer la méthode de Newton. Ainsi, en sup-

posant que les équations $\psi v - x = 0$ et $\psi'' v = 0$ n'ont pas de racine commune, et en désignant les racines différentes de ces équations par v_1 et v_2 ; si une valeur, telle que a, tombe entre v_1 et v_2 et si la courbe proposée est toujours concave ou toujours convexe dans l'étendue de v_1 à v_2 ; il est évident que la réduite a' est plus rapproché de la racine de $\psi v - x = 0$ que ne l'était d'abord a ; de même a'' plus rapproché que a', et ainsi de suite : ces valeurs a, a', a'', ... étant sans discontinuer décroissantes ou croissantes et convergentes vers la racine en question.

Ces considérations donnent nécessairement lieu au théorème suivant :

Toutes les fois que la valeur approchée a de la racine de l'équation $\psi v - x = 0$, tombe entre cette dernière et la racine immédiatement plus grande ou plus petite de $\psi'' v = 0$, pourvu que dans l'étendue de a à v il n'y ait point de racine de $\psi' v = 0$, il y a avantage d'appliquer la méthode de Newton. Je démontrerai encore ce théorème dans le N° suivant, abstraction faite de toute construction géométrique ; et je ferai ici quelques remarques curieuses, pour compléter les considérations précédentes.

Puisque la méthode de Newton consiste à mener la tangente à la courbe (1), au point correspondant à l'abscisse a et à chercher la distance de l'origine au point où cette tangente coupe l'axe des x ; si cette tangente est proche de celle qui passe par l'un des points limites, il est aisé de voir qu'elle peut couper l'axe des x, en dehors de toutes les intersections de la courbe avec ce même axe des x. Dans ce cas, la méthode de Newton est fautive, parce qu'elle n'offre aucun rapport avec la racine qu'on cherche à évaluer.

Puisque, à chaque réduite trouvée, il faut mener une nouvelle tangente à la courbe ; en joignant les points de contacts par des lignes droites, il en résulte un polygone inscrit dans la courbe : et, en joignant les points d'intersection des tangentes elles-mêmes, dans l'ordre de leur succession, deux à deux, un polygone circonscrit. Cela posé, si les réduites a, a', a'', ... convergent en croissant ou en décroissant vers la racine v de $\psi v - x = 0$; les deux polygones en question suivent le cours de la courbe, jusqu'à ce que les derniers éléments de ces polygones se confondent avec l'élément de la courbe, au point où cette dernière coupe l'axe des x. C'est le cas le plus avantageux de la méthode de Newton.

Dans tout autre cas, les deux polygones en question peuvent osciller soit autour de l'un des points limites, soit autour de l'in-

tersection de l'axe des x avec la courbe ; je dis osciller, car les points de contact, qu'on obtient par la méthode de Newton, tombent alternativement en deça ou au delà du point limite ou du point d'intersection de l'axe des x avec la courbe.

Loin de dire que la méthode de Newton est seulement avantageuse dans le cas ou la première réduite de la série (A) tombe entre les racines de $\psi v - x = 0$ et $\psi' v = 0$, immédiatement les plus proches ; il se peut qu'elle offre encore quelque avantage, si les points des contacts des deux polygones, dont nous avons parlé, viennent se poser alternativement en deça et au delà du point d'intersection de l'axe des x et de la courbe.

50. Cherchons maintenant à établir le criterium de la méthode de Newton par des considérations purement analytiques.

En arrêtant la série (3) du N° 47 à deux termes seulement, on peut la rendre complète, au moyen du terme complémentaire N° 7, savoir :

$$x - \psi a = \psi'(a + \theta z).z.$$

Si dans cette équation, on pose successivement $\theta = 0$ et $= 1$, on a les limites du premier membre ; et par suite

$$\frac{x - \psi a}{\psi' a} \gtrless z \lessgtr \frac{x - \psi a}{\psi'(a + z)} \qquad (1).$$

Examinons maintenant les conditions d'existence de cette inégalité.

I. D'abord, pour qu'il y ait quelque rapport entre les limites et la quantité qu'elles limitent, il faut qu'elles soient toutes trois de même signe. En observant que les termes extrêmes de l'inégalité (1) sont des fractions, ayant $x - \psi a$ pour numérateur ; on voit que ces termes ne peuvent être de même signe que lorsque $\psi' a$ et $\psi'(a + z)$ le sont ; ou bien encore, l'orsque $\psi' v = 0$ n'admet pas de racine dans l'étendue de a à $v = a + z$.

II. Mais cette condition seule ne suffit pas. Il faut encore que $\psi'' v = 0$ n'ait pas de racine de a à v. Car, si cela avait lieu, $\psi' v$ passerait par un maximum ou par un minimum ; et l'inégalité (1) ne pourrait toujours conserver le même sens.

Au moyen de ces considérations on démontre le théorème, dont l'existence a été entrevue n° 49, par des considérations géométriques.

51. Occupons-nous maintenant de la convergence de la méthode de Newton.

Soit $\psi v - x = 0$, équation dont la racine v est comprise entre les

limites immédiates a et b, a étant $< b$. Soient z et z' les corrections respectives des limites a et b, de sorte que

$$v = a + z = b - z' \quad \ldots \quad (1).$$

En employant le terme complémentaire de la série de Taylor, on a

$$\psi(a+z) - x = \psi a - x + z.\psi'(a+\theta z),$$
$$\psi(b-z') - x = \psi b - x - z'.\psi'(b-\theta z').$$

A cause de la relation (1), on a $\psi(a+z) - x = 0$, $\psi(b-z') - x = 0$: c'est ce qui réduit les équations précédentes à celles-ci

$$0 = \psi a - x + z.\psi'(a+\theta z),$$
$$0 = \psi b - x - z'.\psi'(b-\theta z').$$

Si l'on veut que ces expressions donnent les limites des corrections z et z', il faut, N° 7, poser successivement $\theta = 0$, $\theta = 1$. Comme le sens de ces limites n'est pas déterminé, on aura l'un des quatre cas suivants à considérer :

$$\frac{x-\psi a}{\psi' a} < z = v - a < \frac{x-\psi a}{\psi' v}, \qquad (2)$$

$$\frac{x-\psi a}{\psi' a} > z = v - a > \frac{x-\psi a}{\psi' v}, \qquad (3)$$

$$\frac{\psi b - x}{\psi' b} < z' = b - v < \frac{\psi b - x}{\psi' v}, \qquad (4)$$

$$\frac{\psi b - x}{\psi' b} > z' = b - v > \frac{\psi b - x}{\psi' v}. \qquad (5)$$

Examinons chaque cas en particulier.

Lemme I. a et b étant des limites immédiates de v, dans $\psi v - x = 0$, on sait que $\psi a - x$ et $\psi b - x$ sont de signes contraires.

II. Si $\psi v - x = 0$ et $\psi' v = 0$ n'ont pas de racine commune et que a et b soient des limites immédiates et très peu différentes de v, dans $\psi v - x = 0$; $\psi' a$ et $\psi a - x$ sont de signes contraires, mais $\psi' b$ et $\psi b - x$ de même signe. En effet, le théorème de Taylor, pour h très petit, donne

$$\psi(v-h) - x = \psi v - x - h.\psi'(v-\theta h),$$
$$\psi(v+h) - x = \psi v - x + h.\psi'(v+\theta h) :$$

d'où, à cause de $\psi v - x = 0$,

$$\psi(v-h) - x = -h.\psi'(v-\theta h),$$
$$\psi(v+h) - x = +h.\psi'(v+\theta h).$$

Comme $\psi(v-h) - x$ et $\psi(v+h) - x$ sont de signes contraires, pour h très petit ; on voit que $\psi(v-h) - x$ et $\psi'(v-\theta h)$ doivent être de signes contraires, $\psi(v+h) - x$ et $\psi'(v+\theta h)$ de même signe.

Donc, $\psi' v$ est de même signe que $\psi(v+h)-x$, dans toute l'étendue de $v-\theta h$ à $v+\theta h$; donc aussi $\psi'(v)$ est de même signe que $\psi(v+\theta h)-x$, dans toute l'étendue de $v-\theta h$ à $v+\theta h$.

III. Nous avons vu, N° 50, que les inégalités (2), (3), (4) et (5) ne peuvent être admises pour le calcul des corrections qu'à condition que $\psi' v$ et $\psi'' v$ n'aient point de racine dans l'étendue de a à b.

Cela posé, ajoutons a aux deux membres de l'inégalité (2) et nous aurons

$$a+\frac{x-\psi a}{\psi' a}<v<a+\frac{x-\psi a}{\psi' v} \ldots\ (6)$$

Ainsi, on suppose que la réduite a est $<v$ et qu'une autre a' qui s'en déduit tombe encore entre a et v. Cela posé, voyons ce que deviennent les réduites suivantes, ou a', a'', a''', ... On a, N° 47,

$$a'-a=\frac{x-\psi a}{\psi' a},$$

$$a''-a'=\frac{x-\psi a'}{\psi' a'},$$

$$a'''-a''=\frac{x-\psi a''}{\psi' a''},$$

etc. etc.

et on suppose déjà $a<a'<v$. Puisque $a'<v$, $\psi' a'$ et $x-\psi a'$ sont de même signe, d'après le Lemme II : donc, $a''-a'>0$ et par conséquent $a''>a'$. Or, l'inégalité (6) qui a lieu pour $a<v$ doit nécessairement subsister pour toutes les valeurs comprises entre a et v : donc elle doit aussi subsister pour a', tel que $a<a'<v$. On a ainsi

$$a'+\frac{x-\psi a'}{\psi' a'}<v<a'+\frac{x-\psi a'}{\psi' v};$$

et par conséquent $a''<v$. De la même manière on démontrera que $a''<a'''<v$. Ainsi, dès qu'on a deux nombres a et b qui comprennent la racine v de l'équation $\psi v-x=0$ et que, partant de la réduite a, on tombe sur une autre $a'<v$; toutes les autres réduites $a^{\text{r}}, a^{\text{v}}, a^{\text{iv}}, \ldots$ continuées à l'infini, se conforment à la relation

$$a<a'<a''<a'''<\ldots<v.$$

IV. Examinons maintenant l'inégalité (3).

On a

$$a+\frac{x-\psi a}{\psi' a}>v>a+\frac{x-\psi a}{\psi' v} \ldots (7)$$

Ainsi, on suppose que la réduite a est $<v$ et que celle qui s'en déduit, savoir a', est $>v$. Cela posé, on veut s'assurer de ce que deviennent toutes les autres a'', a''', ... Il est d'abord évident que l'inégalité (7) conservera toujours le même sens, pour toutes les valeurs possibles, comprises entre a et v; car, pour des valeurs successives, prises entre a et v, $x-\psi a$ converge vers $x-\psi v=0$, et $\psi' a$ vers $\psi' v$, ces deux fonctions ne pouvant passer, ni par zéro, ni par maximum ou minimum. Or, comme au lemme III, on a

$$a''-a'=\frac{x-\psi a'}{\psi' a'}.$$

Comme a' est déjà $>v$, $x-\psi a'$ et $\psi' a'$, d'après le lemme II, sont de signes contraires : donc, $a''-a'<0$ et par suite $a''<a'$. Or, de ce qu'on a : $a'>a''$ et $a'>v$, on ne peut pas conclure $a'>a''>v$.

La méthode de Newton n'offre pas de certitude dans ce cas.

V. Supposons qu'on est dans le cas de l'inégalité (4), savoir :

$$\frac{\psi b-x}{\psi' b}<b-v<\frac{\psi b-x}{\psi' b} \quad \ldots (8)$$

On suppose que b est $>v$ et on tombe sur une autre réduite $b'>v$ et telle que $b>b'>v$. Cela posé, on se demande ce que deviennent toutes les autres réduites b'', b''', ... qui se déduisent de b'.

On a, comme au lemme III,

$$b'-b=-\frac{\psi b-x}{\psi' b},$$

$$b''-b'=-\frac{\psi b'-x}{\psi' b'}$$

$$b'''-b''=-\frac{\psi b''-x}{\psi' b''},$$

etc. etc.

De ce que $b'>v$, on conclut, d'après le lemme II, que $\psi b'-x$ et $\psi' b'$ sont de même signe : donc $b''-b'<0$, et par suite $b''<b'$. Or, l'inégalité (8) doit toujours conserver le même sens, pour toutes les valeurs de b, comprises entre b et v : donc, on doit aussi avoir

$$\frac{\psi b'-x}{\psi' b'}<b'-v<\frac{\psi b'-x}{\psi' b};$$

relation de laquelle on déduit cette autre $-(b''-b')<b'-b$. En ajoutant d'une et d'autre part $+b''-b'$, on trouve $0<b''-v$, c'est-à-dire $b''>v$.

De là on conclut que si, de la réduite $b>v$, on tombe sur une autre $b'>v$ et telle qu'on ait $b>b'>v$; toutes les autres b'', b''', ...

continuées à l'infini, se conforment à la relation

$$b>b'>b''>b'''>\ldots>v.$$

VI. Si l'on est dans le cas de l'inégalité (5), savoir :

$$\frac{\psi b-x}{\psi' b}>b-v>\frac{\psi b-x}{\psi' v};$$

on suppose $b>v$ et l'on tombe sur une autre $b'<v$. Cela posé, on veut savoir ce que deviennent les autres réduites $b'', b''', \ldots$

On a, comme au lemme V,

$$b''-b'=-\frac{\psi b'-x}{\psi' b'}.$$

Comme $b'<v$, on conclut par le lemme II, que $\psi b'-x$ et $\psi' b'$ sont de signes contraires : donc $b''-b'>0$ et par suite $b''>b'$. Or, de ce qu'on a $b'<v$ et $b''>b'$, on ne peut pas conclure que $b'<b''<v$. La méthode de Newton n'offre pas de certitude dans ce cas.

Scholie. En résumant les quatre derniers lemmes, on voit que la méthode de Newton ne présente que deux cas de génération distincte :

1° On partant de la réduite $a<v$, on en trouve une autre a', telle que $a<a'<v$: alors toutes les autres réduites a'', a''', ... continuées à l'infini, présentent la relation

$$a<a'<a''<a'''<\ldots<v;$$

2° ou bien, partant de la réduite $b>v$, on en trouve une autre b', telle que $b>b'>v$: alors toutes les autres réduites $b'', b''', \ldots$ continuées à l'infini, présentent la relation

$$b>b'>b''>b'''>\ldots>v.$$

Ainsi, dès qu'on tombe sur deux nombres a et b, ne comprennant qu'une seule racine v, dans $\psi v-x=0$; on cherche à s'assurer que ces deux nombres a et b ne comprennent pas les racines de $\psi' v$ et $\psi'' v$, qui pourraient se trouver aux environs de la racine v de $\psi v-x=0$. Cette première condition remplie, il faut essayer l'un ou l'autre des nombres a et b, pour ramener la méthode de Newton à se trouver dans l'un des deux cas, signalés dans cette scholie.

Cela posé, selon qu'on est dans le cas : $a<a'<v$; ou bien $b>b'>v$; la série (A) du N° 47 donne la génération de la quantité v, qu'on cherche à évaluer, comme il suit :

$$v=a+\frac{x-\psi a}{\psi' a}+\frac{x-\psi a'}{\psi' a'}+\frac{x-\psi a''}{\psi a''}+\ldots \text{(A)}$$

$$v=b-\frac{\psi b-x}{\psi' b}-\frac{\psi b'-x}{\psi' b'}-\frac{\psi b''-x}{\psi' b''}-\ldots \text{(B)}$$

L'une ou l'autre de ces générations est propre exclusivement à la méthode de Newton. En d'autres termes, chaque racine de l'équation $\psi v - x = 0$, ne peut être donnée que par un seul mode de génération (A) ou (B); jamais par tous les deux. Lorsqu'on est dans le cas de la série (A), toutes les réduites sont plus petites que v : et la convergence de chaque réduite est à moins du terme qui suit celui auquel on arrête la série (A). Si, au contraire, la racine v de l'équation $\psi v - x = 0$, ne peut être donnée que par la série (B) : chaque réduite est plus grande que la racine à calculer. La convergence, dans ce cas, est comme dans le précédent, à moins du terme qui suit celui auquel on arrête la série (B).

Remarque I. La génération des séries (A) et (B) ne peut être comparée qu'à celle d'une fraction continue ordinaire, arrêtée successivement à un nombre impair de termes. C'est pourquoi j'ai donné le nom de *réduites* aux expressions a, a', a''... N° 47.

II. Les termes successifs de la série (A) ou (B), lorsque la première correction est infiniment petite, ne sont autre chose que les termes correspondants de la série de Paoli. On peut aisément prouver cette coïncidence. Posons

$$\frac{x-\psi a}{\psi' a} = z \qquad (a)$$

et supposons z infiniment petit ; nous aurons

$$a' = a + z. \qquad (b)$$

Partant,

$$\frac{x-\psi a'}{\psi' a'} = \frac{1}{\psi'(a+z)} \cdot \{x - \psi(a+z)\}.$$

Puisque z est un infiniment petit, $\psi'(a+z)$ se réduit simplement à $\psi' a$; et, en employant la série de Taylor, pour $x-\psi(a+z)$, on aura

$$\frac{x-\psi a}{\psi' a'} = \frac{1}{\psi' a}\left(x - \psi a - \psi' a \cdot z - \frac{\psi'' a}{1\cdot 2} \cdot z^2 - \ldots\right)$$

$$= \frac{x-\psi a}{\psi' a} - z - \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{\psi'' a}{\psi' a} \cdot z^2 - \ldots$$

En observant que les deux premiers termes du second membre se détruisent, à cause de la relation (a) ; et que, z étant un infiniment petit, on n'a le droit de conserver que les termes affectés des moindres puissances de z ; il vient

$$\frac{x-\psi a'}{\psi' a'} = -\frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{\psi'' a}{\psi' a} \cdot z^2 \qquad (c)$$

C'est le terme en z^2 de la série de Paoli et la seconde correction de la série (A). En ajoutant cette dernière correction à a', on a

$$a''=a+z-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^2 \quad (d)$$

De même, on aura

$$\frac{x-\psi a''}{\psi' a''}=\frac{1}{\psi' a}\cdot\left\{x-\psi(a+z-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^2)\right\};$$

et, en employant la série de Taylor,

$$\frac{x-a''}{\psi' a''}=\frac{1}{\psi' a}\cdot\left\{x-\psi a-\psi' a\cdot(z-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^2)+\right.$$
$$-\frac{\psi''a}{1.2}\cdot(z-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^2)^2+$$
$$\frac{\psi'''a}{1.2.3}(z-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^3)+$$
$$\left.\ldots\ldots\right\}$$

En développant et réduisant, puis en arrêtant le second membre aux seuls termes en z^3, on trouvera

$$\frac{x-\psi a''}{\psi' a''}=-\frac{\psi' a\cdot\psi'''a-3(\psi''a)^2}{1.2.3\cdot(\psi' a)^2}\cdot z^3. \quad (e)$$

C'est le terme en z^3 de la série de Paoli et la troisième correction de la série (A). Partant, on a

$$a'''=a+z-\frac{\psi''a}{\psi' a}\cdot\frac{z^2}{1.2}-\frac{\psi' a\cdot\psi'''a-3(\psi''a)^2}{(\psi' a)^2}\cdot\frac{z^3}{1.2.3}.$$

Ainsi des autres. Ce rapprochement des séries de Newton et de Paoli n'est pas sans quelque utilité. On a vu, lemme II du même numéro, que si a est la limite immédiatement moindre et très peu différente de v, dans $\psi v-x=0$; les résultats de substitution de a, dans $\psi v-x$ et $\psi' v$ sont de signes contraires. Et voici plusieurs autres propositions qui ont la même origine que celle que nous venons d'énoncer. Puisque les corrections (a), (c), (e) trouvées ci-dessus, sont dans le même cas que les corrections correspondantes de la série (A) de Newton; elles sont nécessairement du même signe que celles dont elles tirent l'origine. Comme il a été démontré que toutes les corrections de la série (A) sont positives, il en est de même de celles en (a), (c), (e).... Ainsi, lorsque a est la limite immédiatement moindre et très peu différente de r, dans $\psi v-x=0$, on doit avoir 1°

$$z=\frac{x-\psi a}{\psi' a}>0$$

en d'autres termes $\psi a - x$ et $\psi' a$ de signes contraires ; 2°

$$-\frac{\psi'' a}{\psi' a} > 0,$$

en d'autres termes $\psi'' a$ et $\psi' a$ de signes contraires ;

$$-\psi' a \cdot \psi''' a + 3 \cdot (\psi'' a)^2 > 0,$$

en d'autres termes $3 \cdot (\psi'' a)^2 > \psi' a \cdot \psi''' a$. Ainsi des autres. Pour faciliter l'énoncé de cette proposition, posons, comme au N° 48,

$$\frac{x - \psi a}{\psi' a} = z, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi'' a}{\psi' a} = a_1, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\psi''' a}{\psi' a} = a_2, \ldots$$

et la série de Paoli deviendra

$$v = a + z - a_1 \cdot z^2 - (a_2 - 4 \cdot a_2 c2) \cdot z^3 + \\ - (a_3 - 5 \cdot a_2 c2 + 5 \cdot 6 \cdot a_3 c3) z^4 - \text{etc.}$$

Cela posé, si a est la limite immédiatement moindre et très peu différente de v, tous les termes de cette série sont positifs ; si, au contraire, a est la limite immédiatement plus grande et très peu différente de v, tous les termes, à partir du second, sont négatifs. Ainsi, en renversant les propositions précédentes, on doit avoir, pour ce dernier cas :

$$z = \frac{x - \psi a}{\psi' a} < 0, \quad -\frac{\psi'' a}{\psi' a} < 0, \text{ etc.}$$

52. Il existe encore deux autres moyens de constater la convergence de la méthode de Newton : l'un est dû à *Fourier*, géomètre français ; l'autre est la règle de l'extraction des racines, dont nous avons parlé, 46.

Rapportons ici ces moyens.

I. *Moyen dû à Fourier.* En partant des principes, qui ont été discutés, N° 51, Fourier admet que la méthode de Newton ne peut être efficace, au calcul proposé, que lorsque deux nombres a et b, comprenant la racine v de l'équation $\psi v - x = 0$, ne comprennent point de racine de $\psi' v = 0$ et $\psi'' v = 0$. On suppose ici, comme au N° 51, que a est $< b$.

Si l'on substitue les nombres a et b, dans chacune des trois fonctions $\psi v - x$, $\psi' v$ et $\psi'' v$; les résultats des substitutions dans $\psi v - x$ seront de signes contraires, mais de mêmes signes dans $\psi' v$ et $\psi'' v$. Cela posé, si l'on observe que les substitutions de a à la place de v, dans $\psi v - x$ et $\psi' v$, sont de signes contraires ; les fonctions $\psi v - x$, $\psi' v$ et $\psi'' v$, par le changement successif de v en a et b ne pourront offrir que l'une des quatre combinaisons de signes apportées dans le tableau ci-dessous.

$$\begin{array}{llccc} & & \psi v - x, & \psi' v, & \psi'' v \\ (1) & (a) & - & + & + \ , \\ & (b) & + & + & + \ , \\ (2) & (a) & - & + & - \ , \\ & (b) & + & + & - \ , \\ (3) & (a) & + & - & + \ , \\ & (b) & - & - & + \ , \\ (4) & (a) & + & - & - \ , \\ & (b) & - & - & - \ , \end{array}$$

Considérons le cas de la première combinaison.

Soit z' la correction qu'il faut retrancher de la plus grande limite b, pour avoir la valeur exacte de v. En employant le terme complémentaire de la série de Taylor, il viendra

$$\psi(b-z')-x=\psi b-x-z'.\psi'(b-\theta z').$$

Donc, à cause de $\psi(b-z')-x=0$, on aura

$$z'=\frac{\psi b-x}{\psi'(b-\theta z')} \ldots \quad (5)$$

La fonction $\psi'' v$ qui est la première dérivée de $\psi' v$, étant constamment positive entre a et b, il s'ensuit que $\psi' v$ est constamment croissante entre ces limites. Donc $\psi'(b-z')<\psi' b$; et par suite

$$b-z' \text{ ou } v<b-\frac{\psi b-x}{\psi' b}.$$

On déduit ainsi de la limite b, qui est plus grande que v, une autre limite, qui est plus approchée de v, puisqu'elle tombe entre v et b.

En procédant de la même manière, pour la plus petite limite a, on trouvera qu'une autre limite plus approchée de v et qui tombe entre a et v, ne peut être donnée que par l'expression

$$a-\frac{\psi a-x}{\psi' b}. \qquad (6)$$

Il est essentiel de remarquer ici, qu'on ne peut appliquer avec certitude, à la moindre limite a, la méthode de Newton : c'est-à-dire que si l'on prenait, pour la nouvelle correction de la racine v, la quantité $a-\frac{\psi a-x}{\psi' a}$, la correction pourrait être fautive. En effet, il est aisé de reconnaître que $v-a$ est moindre que $-\frac{\psi a-x}{\psi' a}$; et par conséquent on n'est pas certain de l'issue du calcul.

On verra, par des raisonnements analogues à ceux que nous venons d'exposer, que lorsque les signes de $\psi v - x$, $\psi' v$ et $\psi'' v$ offrent la combinaison (4), les nouvelles limites de la racine, déduites de a et b, sont, comme dans le cas précédent,

$$a - \frac{\psi a - x}{\psi' a}, \quad b - \frac{\psi b - x}{\psi' b}.$$

Lorsque ces signes offrent une des combinaisons (2) et (3), on trouve par les mêmes raisonnements qu'il faut prendre pour les limites de la racine

$$a - \frac{\psi a - x}{\psi' a}, \quad b - \frac{\psi b - x}{\psi' b}.$$

Toutes ces considérations sont dues à Fourier. Ainsi dès qu'on tombe sur deux nombres a et b, qui comprennent la racine v de l'équation $\psi v - x = 0$ et qui n'interceptent point de racine de $\psi' v = 0$ et $\psi'' v = 0$; on peut toujours assigner deux autres limites, l'une en plus et l'autre en moins, qui tombent entre a et b et qui comprennent la racine à calculer.

Tout en reconnaissant l'utilité de ces déductions de Fourier, pour reserrer les limites de la racine d'une équation ; je suis loin d'attribuer la même valeur au moyen qu'il propose pour calculer la convergence des réduites successives auxquelles conduit la méthode de Newton. Car tout se réduit à reconnaître que la méthode de Newton, lorsque l'approximation est suffisante, ne peut donner lieu qu'à la série (A) ou (B) du N° 51, et que la convergence est à moins du terme qui suit celui auquel on arrête l'une ou l'autre de ces séries.

Ainsi la limite de convergence de la réduite a' est la troisième correction de la série (A), savoir :

$$\frac{x - \psi a'}{\psi' a'} = \frac{x - \psi(a+z)}{\psi'(a+z)},$$

à cause de

$$a' = a + z = a + \frac{x - \psi a}{\psi' a}.$$

On peut encore, en employant le terme complémentaire de la série de Taylor, assigner le rapport qui existe entre la seconde et la troisième correction, savoir :

$$x - \psi(a+z) = -\frac{z^2}{1 \cdot 2} \cdot \psi''(a + \theta z)$$

et par suite

$$\frac{x-\psi a'}{\psi' a'} = -\frac{z^2}{1\cdot 2}\,\frac{\psi''(a+\theta z)}{\psi' a'};$$

ou bien encore

$$\frac{x-\psi a'}{\psi' a'} = -\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x-\psi a}{\psi' a}\right)\cdot\frac{\psi''(a+\theta z)}{\psi' a'}$$

Cette expression de la convergence de la réduite a', montre ce qu'on peut attendre de la méthode de Newton. En effet, supposons que la première correction employée soit une fraction moindre qu'un dixième : il est évident qu'elle fournira l'approximation à moins d'un centième, si dans l'expression de son erreur, rapportée en dernier lieu, la plus grande valeur du rapport $\frac{\psi''(a+\theta z)}{\psi' a'}$ ne dépasse pas 2. Cette erreur serait évidemment à moins d'un millième, si le rapport $\frac{\psi''(a+\theta z)}{\psi' a'}$ ne pouvait dépasser $\frac{1}{5}$.

II. Le second moyen de constater la convergence de la méthode de Newton, dans lequel est comprise la règle d'extraction des racines, dont nous avons parlé, N° 46, consiste dans le procédé suivant.

La première correction de la série (A) est donnée par l'expression (4) du N° 47, savoir :

$$\frac{x-\psi a}{\psi' a} = z + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi'' a}{\psi' a}\cdot z^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{\psi''' a}{\psi' a}\cdot z^3 + \dots \quad (1)$$

Supposons que z soit un nombre composé de i chiffres significatifs et a un nombre, composé de $i+1$ chiffres significatifs, suivi de i zéros, de sorte que $a+z$ soit proprement un nombre composé de $2i+1$ chiffres; la série, que nous venons de poser, sera convergente, si l'on a les rapports suivants

$$\frac{\psi'' a}{\psi' a} < \frac{1}{a},\quad \frac{\psi''' a}{\psi' a} < \frac{1}{a^2},\quad \frac{\psi^{\mathrm{IV}} a}{\psi' a} < \frac{1}{a^3},\ \dots \quad (2)$$

En effet, il est aisé de démontrer que, dans ce cas, les second, troisième, ... termes de la série (1) ont pour limites supérieures les inverses des nombres 1, 1(i)0 ou 1 suivi de i zéros, 1($2i$)0 ou 1 suivi de $2i$ zéros, 1($4i$)0 ou 1 suivi de $4i$ zéros; et ainsi de suite. Cela posé, il est aisé de voir que la limite inférieure de la série (1) étant z; celle en plus est

$$z + \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots\right)\frac{\psi'' a}{\psi' a}\cdot z^2,$$

ou bien

$$z+(e-2)\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^2,$$

e étant la base des logarithmes népériens. Ainsi les trois quantités

$$z,\quad \frac{x-\psi a}{\psi'a},\quad z+(e-2)\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^2$$

sont en même temps croissantes. Par conséquent, l'erreur que l'on commet en prenant

$$\frac{x-\psi a}{\psi'a}\quad \text{pour } z, \quad (3)$$

est moindre que

$$(e-2)\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot z^2, \ldots \qquad (4)$$

et à plus forte raison que

$$(e-2)\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}\cdot\left(\frac{x-\psi a}{\psi'a}\right)^2 \cdot \ldots \quad (5)$$

C'est donc la limite de la réduite a'. D'après l'expression (4), cette limite est moindre que *un;* par conséquent la réduite a' fournit $2i+1$ chiffres exacts. De la même manière on démontrera que les réduites suivantes a'', a''', ... fournissent déjà $4i+1$, $8i+1$, ... chiffres exacts. Telle est la convergence de la méthode de Newton, dans le cas où a étant un nombre suffisamment approché de la racine v de $\psi v-x=0$, les conditions ci-dessus (2) se trouvent remplies.

En est-il de même dans tous les cas possibles de la fonction $\psi v-x$? La réponse est aisée à faire, d'après le rapprochement que nous avons donné, N° 51, remarque II, entre la série de Newton et celle de Paoli. En effet, si on suppose z très petit dans l'équation ci-dessus (1), et qu'on retourne cette équation, la série de Paoli donne

$$v-a=z-a_1\cdot z^2-(a_2-4\cdot a_2C2)\cdot z^3+ \\ -(a_3-5\cdot a_3C2+5\cdot 6\cdot a_3C3)\cdot z^4-\text{etc.}$$

série dans laquelle on a

$$\frac{x-\psi a}{\psi'a}=z,\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\psi''a}{\psi'a}=a_1,\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\psi'''a}{\psi'a}=a_2,\ \ldots$$

et a_2C2, a_3C2, ... les combinaisons particulières. Nous avons démontré que tous les termes de la série de Paoli sont positifs, dans le cas $a<v$. Cela posé, on voit que tous ces termes sont des quantités très petites, si z est très petit. Et comme les coëfficients des puissances successives de z sont des expressions qui tendent vers

une limite fixe et assignable, tandis que z est aussi petit qu'on veut; il est aisé d'en conclure que la convergence de la méthode de Newton peut aller jusqu'à fournir le double des chiffres du résultat déjà obtenu.

53. Appliquons la méthode de Newton à l'évaluation numérique de quelques fonctions.

Soit $\phi x = x^{\frac{1}{m}} = a+z$, $x = \psi(a+z) = (a+z)^m$.

La série (A) pour $x^{\frac{1}{m}}$ sera

$$\sqrt[m]{x} = a + \frac{x-a^m}{ma^{m-1}} + \frac{x-a'^m}{ma'^{m-1}} + \frac{x-a''^m}{ma''^{m-1}} + \ldots$$

a, a', a''... étant les réduites ou les sommes de un, deux, trois,... termes de cette série et dont la formation, N° 47, est la suivante

$$a = a,$$

$$a' = \frac{x+(m-1)a^m}{ma^{m-1}} = \frac{r}{s},$$

$$a'' = \frac{xs^m+(m-1)r^m}{ms\cdot r^{m-1}} = \frac{r'}{s'},$$

$$a''' = \frac{xs'^m+(m-1)r'^m}{ms'\cdot r'^{m-1}} = \frac{r''}{s''},$$

etc. etc.

La condition du N° 52 étant ici remplie, les réduites a, a', a'', ... fourniront, pour $\sqrt[m]{x}$, $i+1$, $2i+1$, $4i+1$, $8i+1$, ... chiffres exacts. D'ailleurs, si l'on veut, on constatera la convergence des réduites a, a', a'', ... au moyen des expressions suivantes

$$\frac{x-a^m}{ma^{m-1}}, \quad \frac{x\cdot s^{m-1}-r^{m-1}}{ms\cdot r^{m-1}}, \quad \frac{x\cdot s'^{m-1}-r'^{m-1}}{ms'\cdot r'^{m-1}}, \text{ etc.}$$

On remarquera ici, quelle que soit la réduite a, que toutes celles a', a'', a''', ... qui s'en déduisent sont déjà plus grandes que $\sqrt[m]{x}$.

Ainsi, pour $\sqrt{2}$, en prenant $a=1$, on a

$$\frac{r}{s} = \frac{2+1\cdot 1^2}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{r'}{s'} = \frac{2\cdot 2^2+1\cdot 3^2}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{17}{12},$$

$$\frac{r''}{s''} = \frac{2\cdot 12^2+1\cdot 17^2}{2\cdot 12\cdot 17} = \frac{577}{408},$$

$$\frac{r'''}{s'''} = \frac{2\cdot 408^2+1\cdot 577^2}{2\cdot 408\cdot 577} = \frac{665857}{470834}, \text{ etc.}$$

Toutes ces réduites sont plus grandes que $\sqrt{2}$. La première donne un chiffre décimal, la seconde et les suivantes $3, 5, 9, 17, \ldots. 2i-1$, chiffres décimaux exacts.

Les réduites de $\sqrt{2}$, que nous venons de poser ici, ne sont autre chose que les réduites de la fraction continue de $\sqrt{2}$, arrêtée successivement aux $2, 4, 8, 16, \ldots.$ termes. Il est aisé de vérifier cette circonstance en rappelant que $\sqrt{2}$, résolue en fraction continue, est

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}.$$

54. Les expressions des réduites successives de $\sqrt[m]{x}$ conduisent à une expression particulière et très remarquable du logarithme népérien du nombre x.

On sait, d'après la théorie des logarithmes, que l'expression théorique du logarithme népérien du nombre x, est

$$lx=m(\sqrt[m]{x}-1) :$$

m étant un nombre infiniment grand. En prenant les réduites de $\sqrt[m]{x}$, dans lesquelles nous poserons $a=1$, il viendra

$$(\sqrt[m]{x}-1)=\frac{x+m}{1}-m=x.$$

Partant, la seconde réduite donnera

$$m(\sqrt[m]{x}-1)=\frac{x\cdot m^m+m(x+m)^m}{m(x+m)^{m-1}}-m=$$

$$=\frac{x\cdot m^m+m\cdot m^m\left(1+\frac{x}{m}\right)^m}{m\cdot m^{m-1}\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m-1}}-m=$$

$$=\frac{xm^{m-1}+m^m\cdot e^x}{m^{m-1}\cdot e^x}-m=$$

$$=\frac{x}{e^x},$$

en se rappelant que l'expression théorique de l'exponentielle e^x est

$$e^x=\left(1+\frac{x}{m}\right)^m :$$

m étant un infiniment grand. Dans la réduction de la seconde réduite de lx, nous avons eu égard aux divers ordres des infini-

ment grands ; de sorte que si l'on considère les expressions $m-1$, m, $m+1$ ... comme équivalentes, on fera distinction entre m^m, m^{m+1}, m^{m+2}, ... qui sont des infiniment grands de divers ordres. Il est pourtant inutile de poursuivre ces réduites ; car la troisième se comporte avec la seconde de la même manière que celle-ci avec la première. Ainsi on trouvera la troisième réduite, en divisant x par le nombre e, affecté de la seconde réduite, comme exposant, savoir :

$$m(\sqrt[m]{x}-1)=\cfrac{x}{\cfrac{x}{\cfrac{x}{e}}}$$
$$e$$

Ainsi des autres. En observant qu'une réduite quelconque se change en exposant du nombre e au dénominateur de la réduite suivante et que les numérateurs de toutes ces réduites sont constamment égaux à x ; on pourra écrire les réduites successives de lx, comme il suit

$$a=x,\ \left(\frac{x}{e^x}=a_1\right),\ \left(\frac{x}{e^{a_1}}=a_2\right),\ \ldots$$

Nous donnerons, dans le N° suivant, un moyen de calculer les expressions e^x, e^{a_1}, ...

55. Soit $\phi x=n^x=a+z$, $x=\mathrm{L}(a+z)$, L désignant le logarithme pris dans le système n.

Cela posé, la série (A) pour n^x sera

$$n^x=a+\frac{x-\mathrm{L}a}{\mathrm{L}'a}+\frac{x-\mathrm{L}a'}{\mathrm{L}'a'}+\ldots,$$

L' désignant la dérivée de L. Comme on a

$$\mathrm{L}'a=\mathrm{M}.a^{-1}=\frac{1}{ln}\cdot a^{-1},$$

M étant le module ou 1 divisé par le logarithme népérien du nombre n ; la série précédente peut s'écrire, comme il suit :

$$n^x=a+\frac{a(x-\mathrm{L}a)}{ln}+\frac{a'(x-\mathrm{L}a')}{ln}+\ldots$$

Les réduites successives de n^x, sont

$$a=a,$$
$$a'=\frac{x+\mu\cdot\mathrm{L}a}{\mathrm{L}'a},\quad \mu=\frac{\mathrm{L}'a}{\mathrm{L}a}\cdot a-1,$$
$$a''=\frac{x+\mu'\cdot\mathrm{L}a'}{\mathrm{L}'a'},\quad \mu'=\frac{\mathrm{L}'a'}{\mathrm{L}a'}\cdot a'-1,$$

etc. etc.

Comme la fonction inverse de φx est ici $\varphi x = \mathrm{L}'a + z$), on aura

$$\psi' a = \mathrm{M}\cdot a^{-1}, \quad \psi'' a = -\mathrm{M}\cdot a^{-2}, \quad \psi''' a = 2\mathrm{M}\cdot a^{-3}, \ldots$$

partant

$$\frac{\psi'' a}{\psi' a} = -\frac{1}{a}, \quad \frac{\psi''' a}{\psi' a} = \frac{2}{a^2}, \quad \frac{\psi^{\mathrm{IV}} a}{\psi' a} = -\frac{2\cdot 3}{a^3}, \ldots.$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (1) du N° 51, on trouve pour la première réduite de n^x,

$$\frac{x - \mathrm{L}a}{\mathrm{L}'a} = \left(z - \frac{z^2}{2a} + \frac{z^3}{3a^2} - \frac{z^4}{4a^3} + \ldots. \right)$$

Donc, en observant que le logarithme népérien du nombre $1 + \frac{z}{a}$, est

$$l\left(1 + \frac{z}{a}\right) = \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \text{etc.};$$

il viendra

$$\frac{x - \mathrm{L}a}{\mathrm{L}'a} = a\cdot l\left(1 + \frac{z}{a}\right). \quad \ldots. \quad (a)$$

Si z est à a comme un nombre de i chiffres est à celui $2i+1$ chiffres, les limites de la première réduite seront nécessairement $a\cdot l1$ et $a\cdot l\left(1 + \frac{1}{10^{i+1}}\right)$; en d'autres termes, elles seront

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{a}{10^{i+1}}. \qquad (b)$$

Comme a est un nombre composé de $2i+1$ chiffres significatifs, la convergence ne paraît pas ici être aussi forte que dans le cas le plus général de la méthode de Newton ; mais ce défaut n'est qu'apparent. En effet si, dans la série de n^x, on prend a en facteur, il viendra

$$n^x = a\left\{ 1 + \frac{x - \mathrm{L}a}{ln} + \frac{a'}{a}\cdot\frac{x - \mathrm{L}a'}{ln} + \ldots \right\}.$$

Les rapports $\frac{a'}{a}, \frac{a''}{a}, \ldots$ ont, pour dernière raison, l'unité ; tandis que $x - \mathrm{L}a$, $x - \mathrm{L}a'$, ... sont aussi proches de zéro qu'on le veut. Donc, au lieu des limites (b) de la réduite première, on a plutôt 0 et $1 : 10^{i+1}$. En posant $n = e$, on trouve :

$$e^x = a\left\{ 1 + x - la + \frac{a'}{a}(x - la') + \ldots \right\}$$

Les limites de la première réduite sont ici 0 et 10^{i+1}.

56. Disposer deux circonférences données de manière que la lunule, formées dans l'une d'elles, ait une aire voulue.

Soient r et r' les rayons des deux circonférences ; 2θ et $2\theta'$ les longueurs des arcs intérieurs, compris entre les points d'intersection des deux courbes. La lunule, formée dans le cercle dont le rayon est r', se trouve comme on sait, en retranchant de l'aire de ce cercle la somme des segments intérieurs, correspondants aux arcs 2θ et $2\theta'$. Cela posé, on demande que la lunule ainsi décrite ait l'aire donnée c'. Le segment correspondant à l'arc 2θ se trouve en retranchant de l'aire du secteur correspondant le triangle compris entre les deux rayons r et la corde qui soutend l'arc 2θ. Donc, ce segment sera

$$\tfrac{1}{2}r\cdot 2\theta - \tfrac{1}{2}r^2\cdot\sin\left(\frac{2\theta}{r}\right).$$

Pareillement, le segment correspondant à l'arc $2\theta'$, sera

$$\tfrac{1}{2}r'\cdot 2\theta' - \tfrac{1}{2}r'^2\cdot\sin\left(\frac{2\theta'}{r'}\right).$$

Par conséquent, la lunule cherchée sera exprimée comme il suit

$$\pi r'^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{2\theta}{r} - \sin\frac{2\theta}{r}\right) - \frac{r'^2}{2}\left(\frac{2\theta'}{r'} - \sin\frac{2\theta'}{r'}\right) = c'.$$

Or, si les deux cercles se coupent, la distance de leurs centres et les rayons forment un triangle dans lequel on a

$$r : r' = \sin\frac{\theta'}{r'} : \sin\frac{\theta}{r} ;$$

d'où

$$\sin\frac{\theta'}{r'} = \frac{r}{r'}\cdot\sin\frac{\theta}{r}$$

et

$$\frac{\theta'}{r'} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{r}{r'}\sin\frac{\theta}{r}\right).$$

Cela posé, on a encore

$$\sin\frac{2\theta'}{r'} = 2\sin\frac{\theta'}{r'}\cdot\cos\frac{\theta'}{r'} ;$$

ou bien

$$\sin\frac{2\theta'}{r'} = 2\frac{r}{r'}\sin\frac{\theta'}{r'}\sqrt{1-\frac{r^2}{r'^2}\cdot\sin^2\frac{\theta'}{r'}}$$

Donc la lunule demandée sera exprimée comme il suit :

$$\pi r'^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{2\theta}{r} - \sin\frac{2\theta}{r}\right) - \frac{r'^2}{2}\left[2\arc\left(\sin = \frac{r}{r'}\cdot\sin\frac{\theta}{r}\right) + \right.$$

$$\left. - 2\frac{r}{r'}\cdot\sin\frac{\theta}{r}\cdot\sqrt{1 - \frac{r^2}{r'^2}\cdot\sin^2\frac{\theta}{r}}\right] = c'.$$

Comme c' est une fraction de $\pi r'^2$, on peut poser $\pi r'^2 - c' = \frac{1}{2}cr'^2$. De plus, si on fait $\frac{2\theta}{r} = v$, l'équation précédente deviendra

$$cr'^2 - r^2(2v - \sin 2v) - r'^2\left[2\cdot\arc\left(\sin = \frac{r}{r'}\cdot\sin v\right) + \right.$$

$$\left. - 2\frac{r}{r'}\cdot\sin v\cdot\sqrt{1 - \frac{r^2}{r'^2}\cdot\sin^2 v}\right] = 0.$$

Telle est l'équation, dont la racine v donne la solution du problème énoncé.

Prenons le cas où la lunule résulte de l'intersection des deux cercles égaux. On a dans ce cas $r = r'$: c'est ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$c - 2(2v - \sin 2v) = 0.$$

Si $c = \pi$, la lunule est la moitié du cercle dont le rayon est r ; et l'on a, en posant $2v = z$,

$$z - \sin z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

En mettant cette équation sous la forme

$$-\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = 0$$

et en observant que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right);$$

on a, en posant

$$u = z - \frac{\pi}{2},$$

l'équation

$$u - \cos u = 0.$$

Rien n'est plus facile que de résoudre cette équation. En ouvrant d'une part la Table de Callet qui donne les rapports des degrés au rayon pris pour unité et d'autre part la Table d'Ozanam des cosinus

naturels, on arrive aisément à ces résultats

$$42^\circ\,20' = 0{,}7388561\,, \quad \cos(42^\circ\,20') = 0{,}7392394,$$
$$42^\circ\,21' = 0{,}7391470\,, \quad \cos(42^\circ\,21') = 0{,}7390435.$$

D'où il est aisé de conclure que u est un arc compris entre $42^\circ\,20'$ et $42^\circ\,21'$. Comme on a aussi $z = \frac{\pi}{2} + u$, il s'ensuit que l'arc intérieur de la lunule demandée est compris entre $132^\circ\,20'$ et $132^\circ\,21'$.

Appliquons maintenant la méthode de Newton à l'équation

$$z - \sin z - \frac{\pi}{2} = 0 = u$$

En fesant successivement $z = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π; les résultats de substitution sont $-\frac{\pi}{2}$, -1, $\frac{\pi}{2}$. D'où il est facile de conclure que la racine de z, dans notre équation est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π. Les dérivées première et seconde de notre proposée étant $1 - \cos z$ et $\sin z$; on voit que $\frac{\pi}{2}$ et π ne comprennent pas de racines de ces dérivées. Cela posé, on peut prendre $\frac{\pi}{2}$ pour la première réduite de la racine z. En désignant, comme au N° 47, les réduites successives de z, par a, a', a'', a''', ... on aura

$$a = \frac{\pi}{2},$$

$$a' = \frac{\pi}{2} + 1 = 2{,}5707963,$$

$$a'' = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1 - \cos 1}{1 + \sin 1} = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)},$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\sin^2(0{,}5)}{\cos^2(0{,}2853982)},$$

$$= 2{,}5707963 - 0{,}2496328,$$

$$= 2{,}3211635.$$

$$a''' = 2{,}3099098,$$

$$a^{IV} = 2{,}3098838,$$

$$a^{V} = 2{,}3098644, \text{ etc.}$$

Toutes ces réduites, à partir de a', sont plus grandes que z ; et chacune d'elles montre le degré d'approximation fourni par la précédente. Ainsi a' fournit un chiffre exact, a'' deux, a''' quatre, etc. Si a^{V} fait voir que a^{IV} ne donne que cinq chiffres exacts : cela provient de ce que le calcul n'a été étendu qu'à sept décimales et que l'erreur résultante de la septième décimale a altéré déjà les deux derniers décimaux.

Note. La suite du Mémoire sera inséré dans un des N^os^ prochain de ce Recueil.

Les N^os^, depuis 29 jusqu'à 46 inclusivement, de ce Mémoire sur la Résolution des équations numériques, seront remplis par la Partition des nombres, que l'auteur n'a pas jugé nécessaire de donner, afin de se tenir le plus près possible du but principal du Mémoire lui-même.

Les fautes essentielles à corriger seront données à la fin du Mémoire.

XIII.— *Mémoire sur la réfraction*,

Par M. GLOESENER,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

1. *Objet du Mémoire.* Je me propose de donner dans ce mémoire 1° une démonstration nouvelle et très simple de la formule générale, pour la réfraction astronomique, qui se trouve dans la mécanique céleste, vol. 4, p. 281 et 282; 2° de déduire des réfractions observées et non des observations barométriques le terme qui dépend du produit de la densité et de la hauteur de l'atmosphère; 3° de comparer les résultats que donne la formule, et dont les coefficients numériques diffèrent un peu de ceux de la formule de Laplace, aux résultats déduits des tables données par Bessel, réputées comme les plus exactes, et 4° de faire voir que le premier terme de la formule proposée suffit pour déterminer les réfractions dans toutes les distances zénithales z depuis $z=0$ jusqu'à $z=45°$.

2. *Remarques sur la réfraction astronomique.*

1) Les densités des couches concentriques, parallèles et infiniment minces de l'atmosphère, décroissent à mesure qu'on s'élève au-dessus du niveau des mers : elles décroîtraient suivant une progression géométrique, si la température de différentes couches était la même; mais comme celle-ci décroit, lorsque la hauteur des couches croit, les couches se refroidissent, se condensent, et leurs densités décroissent moins rapidement que dans une progression géométrique, lorsque la hauteur croit en progression arithmétique. Ne connaissant pas la loi suivant laquelle les densités décroissent quand les distances des couches augmentent par rapport au niveau de la mer, nous ne pouvons exprimer ces densités en fonction de leurs distances au centre de la terre; or l'expression différentielle de la réfraction contenant les densités et les hauteurs des couches, il faudrait, pour l'intégrer, précisément connaître la loi d'après laquelle les premières diminuent à mesure que les secondes augmentent; c'est-à-dire il faudrait connaître les densités des cou-

ches en fonction de leurs distances à la surface de la terre. C'est pour cette raison que l'auteur de la mécanique céleste a comparé la réfraction horizontale observée à la même réfraction calculée dans trois hypothèses différentes : en supposant 1° que la densité de l'atmosphère soit uniforme; 2° que la température de l'atmosphère soit uniforme et que par conséquent les densités des couches d'air diminuent dans une progression géométrique ; et 3° que les densités des couches diminuent dans une progression arithmétique, lorsque leurs hauteurs croissent dans une progression semblable. Mais la première hypothèse donne la réfraction horizontale beaucoup plus petite que la même réfraction observée. La seconde donne la même réfraction trop grande, ce qui prouve que la constitution de l'atmosphère et les réfractions sont comprises entre les deux limites des valeurs déduites des deux hypothèses précédentes ; la troisième donne la réfraction horizontale trop petite et nous apprend par conséquent 1° que les densités des couches d'air décroissent plus rapidement que dans une progression arithmétique et moins rapidement que dans une progression géométrique, lorsque leurs hauteurs croissent dans une progression semblable ; 2° qu'une hypothèse qui participerait à la fois de l'une et de l'autre des deux hypothèses susdites semble représenter le mieux la constitution de l'atmosphère et partant les réfractions.

2). On suppose que les forces réfractives des couches d'air sec soient proportionnelles à leurs densités, ce qui paraît conforme à l'observation ; mais on admet encore que le pouvoir réfringent de l'air humide est le même que celui de l'air sec, ce qui pourrait bien ne pas être tout-à-fait exact.

En effet, on sait que la force réfractive de la vapeur d'eau est plus grande que celle de l'air atmosphérique sec ; mais l'air humide étant spécifiquement plus léger que l'air sec, il réfracte aussi moins fortement ; et l'on admet que les effets de ces deux causes étant contraires se contrebalancent, tandis qu'il serait possible que l'une de ces causes produisît plus d'effet que l'autre. Mais, en admettant la force attractive de l'air sec ou humide proportionnelle à sa densité, on peut calculer la réfraction totale indépendamment de toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère. Le terme qui contient le produit de la densité d'une couche par sa distance à la terre étendu à toutes les couches, et que l'on ne sait intégrer parce que l'on ne sait exprimer l'une de ces quantités en fonction de l'autre, se trouve être égal à la pression de l'air, dans le lieu de l'observateur, que l'on peut dé-

terminer ; mais on peut aussi regarder ce terme comme une quantité constante pour le même état de l'atmosphère et le déduire des réfractions observées, ce qui a l'avantage de le rendre indépendant de l'hypothèse que le pouvoir refringent de l'air sec soit égal à celui de l'air humide.

3). Près de l'horizon jusqu'à la hauteur de 11 à 12° la densité de l'atmosphère est modifiée par des causes différentes et de diverses manières ; de sorte qu'il est impossible de faire sur la densité de l'air une hypothèse permettant de calculer les réfractions, comprises entre les limites des hauteurs désignées, qui soient d'accord avec celles qu'on observe directement ; en effet, la densité de l'atmosphère n'est pas toujours la plus grande près de la surface de la terre. Ici l'air est maintenu dans un mouvement continuel principalement par les vents, mais aussi par l'influence de la nature du sol inégalement chauffé dans des lieux différents. Ce mouvement de l'air est variable à chaque instant au même lieu et dans des lieux différents ; il modifie à chaque instant la densité de l'air ; et il suit de cette modification 1° qu'on ne peut admettre que la densité de l'air décroisse depuis la surface de la terre jusqu'à la hauteur où elle est nulle 2° qu'il est douteux qu'en des lieux différents la réfraction moyenne soit la même à des hauteurs égales. Heureusement l'observation démontre que les modifications de l'air ne s'étendent que depuis l'horizon jusqu'à la hauteur de 12°. Pour les hauteurs au-dessus de cette limite jusqu'à 90°, on peut admettre que les densités des couches d'air décroissent lorsqu'ils croissent et alors, sans savoir exprimer la densité variable des couches par leurs distances à la surface de la terre, on peut regarder comme une quantité constante le terme qui contient l'intégrale du produit de ces deux quantités ou remplacer ce terme par son équivalent, qui est égal à la pression de l'air divisée par le rayon terrestre prise au lieu de l'observation. Aucune formule de réfraction ne pourra donc s'étendre que depuis la distance zénithale $=0$ jusqu'à la distance $=80°$.

3. *Marche à suivre.* Un rayon lumineux passe d'un astre par le vide dans l'atmosphère, divisée en couches concentriques et sphériques, infiniment minces, à la couche extérieure il subit une réfraction, à son passage dans la seconde il en subit une nouvelle et ainsi de couche en couche. Le rayon arrivera donc à l'œil de l'observateur, à la surface terrestre, sous un angle différent de celui de l'incidence.

Le rayon lumineux SM venant de l'astre S entre dans la couche extérieure de l'atmosphère au point M, il y fait un angle d'inci-

dence $SMv = a$; et au lieu de continuer à se mouvoir suivant sa direction SMd prolongée, il est réfracté vers MM', l'angle d'incidence à l'entrée dans la seconde couche au point M' est $MM'v'$, le rayon y est réfracté vers $M'M''$ au lieu de se mouvoir suivant la ligne droite $MM'd'$. Au point M'' il est réfracté vers M''A au lieu de continuer à se diriger suivant $M''d''$. l'observateur, placé à la surface de la terre au point A verra donc l'astre sur la ligne $AM''dS''$ et la réfraction totale est égale à l'angle $SdS'' = Adp$ que le rayon incident SM fait avec le rayon $S''d$A qui arrive à l'œil de l'observateur. On voit que la lumière au lieu de décrire la ligne brisée MM'M''A décrit dans la réalité un arc auquel le rayon $AdS'S''$ est tangent au point A. Or, si le rayon lumineux pénètre dans l'atmosphère au point M sous l'angle d'incidence a, la réfraction altère cet angle d'une quantité infiniment petite, en relevant l'astre un peu ou en augmentant sa hauteur apparente et cette altération n'est pas autre chose que la différentielle de l'angle d'incidence prise par rapport à l'indice de réfraction, mais cette différentielle est précisément l'élément de la réfraction ou sa différentielle, et son intégrale sera la réfraction totale cherchée :

Voyons donc l'expression de cet angle et sa différentielle.

3. *Expression de l'angle d'incidence.*

Nommons a, a', a'', etc., les angles d'incidence SMv, $MM'v'$, $M'M''v''$ aux points M, M', M'' : x, x', x'' les angles de réfraction cMM', $cM'M''$, $cM''A$ correspondants, et n, n', n'', etc., les indices de réfraction de la première, de la seconde et de la troisième couche extérieure etc. ..

Nous aurons les relations :

$$\sin a = n \sin x$$

$$\sin a' = \frac{n'}{n} \sin x'$$

$$\sin a'' = \frac{n''}{n} \sin x''$$

et par conséquent

$$\sin a \cdot \sin a' \cdot \sin a'' = n'' \sin x \cdot \sin x' \cdot \sin x'' \qquad (1)$$

Mais les triangles McM', $M'cM''$, $M''cA$ donnent,

$$\sin x = \frac{\sin MM'c \times cM'}{cM} = \frac{\sin(180° - a')cM'}{cM} = \frac{\sin a' \cdot cM'}{cM}$$

$$\sin x' = \frac{\sin M'M''c \times cM''}{cM'} = \frac{\sin(180° - a'') \cdot cM''}{cM'} = \frac{\sin a'' \cdot cM''}{cM'}$$

$$\sin x'' = \frac{\sin M''Mc \times cA}{cM''} = \frac{\sin(180° - z) \cdot cM}{cM''} = \frac{\sin z \cdot cA}{cM''}$$

et par suite

$$\sin x \cdot \sin x' \cdot \sin x'' = \frac{\sin a' \cdot \sin a'' \cdot \sin z \times CA}{CM} \quad \cdots (2)$$

En substituant cette valeur du premier membre dans l'équation (1, nous aurons la valeur du sinus de l'angle d'incidence a : savoir

$$\sin a = \frac{n'' \cdot \sin z \cdot CA}{CM} \qquad (3)$$

6. *Expression différentielle de la réfraction :*

Si le rayon lumineux, après qu'il est arrivé à l'œil de l'observateur, en partait pour retourner à l'astre, il décrirait certainement la même courbe qu'il décrit réellement : Prenons donc l'origine de la courbe de réfraction près de la surface de la terre, appelons n'' et n' les indices de réfraction de la première et de la seconde couche d'air comptées de la surface de la terre, et exprimons ce que devient sinus a lorsque la lumière pénètre de la première couche dans la seconde, sous un angle d'incidence égal à a. A cet effet, différentions l'expression (3) par rapport à n'; la valeur de da sera la différentielle de la réfraction ; et l'intégrale de da prise depuis $n'=n''$ jusqu'à la hauteur de l'atmosphère, à laquelle n' est $=0$, donnera la réfraction totale. Le calcul fournit :

$$\cos a da = d\left(\frac{n''}{n'}\right) \times \frac{\sin z \cdot CA}{CM} \qquad (4)$$

Or, en appelant R le rayon terrestre CA, z le rayon CM, p la densité de la première couche d'air, p' celle de la seconde, α le pouvoir réfringent de l'air par rapport à la température zéro et à la pression barométrique $0^m,76$; d'où abaissant du centre C de la terre la perpendiculaire CP sur le rayon incident SMDR, nous aurons d'après la définition même du pouvoir réfringent :

$$n'' = \sqrt{1+\alpha p} \quad ,$$

$$n' = \sqrt{1+\alpha p'} \quad ,$$

partant

$$d\left(\frac{n''}{n'}\right) = -\frac{\alpha dp' \sqrt{1+\alpha p}}{\sqrt{(1+\alpha p)^3}} .$$

De plus,

$$CP = \sin PMC \times CM = \sin a \times z = \frac{R n'' \sin z}{n'}$$

$$\cos a = \frac{PM}{CM} = \sqrt{\frac{z^2 - \frac{n''^2}{n'^2}\cdot R^2 \sin^2 z}{z^2}} = \frac{1}{z}\cdot\sqrt{z^2 - \frac{n'^2}{n'^2} R^2 \sin^2 z}$$

ou

$$\cos a = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{z^2(1+\alpha p') - (1+\alpha p)\cdot R^2 \sin^2 z}{1+\alpha p'}}$$

Substituons pour $\cos a$ et $d\left(\frac{n''}{n'}\right)$ leurs valeurs ; nous aurons :

$$da = -\frac{\frac{\alpha dp'}{2}\sqrt{1+\alpha p}\times R \sin z}{(1+\alpha p')\cdot z\sqrt{\left[1+\alpha p' - (1+\alpha p)\frac{R^2}{z^2}\sin^2 z\right]}} \qquad (5)$$

Cette équation est la même que l'équation (3) de la mécanique céleste, vol. 4, p. 244, où le pouvoir réfringent α est représenté, conformément à la théorie de la réfraction, par le terme $\frac{4K}{n^2}$, K étant une constante et n représentant la vitesse de la lumière à une distance sensible du corps où elle pénètre. Divisons le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1+\alpha p}$, posons avec de Laplace $R = z\cdot(1-s)$ et nous aurons :

$$da = -\frac{\frac{\alpha}{2}\cdot dp'(1-s)\cdot \sin z}{1+dp'\sqrt{\left[1 - \frac{\alpha(p-p')}{1+\alpha p} - \sin^2 z + (2s-s^2)\sin^2 z\right]}} \qquad (6)$$

Or en mettant pour α sa valeur $\frac{4K}{n^2}$ et posant $\frac{4K}{n^2} : \left(1+\frac{4K}{n^2}p\right) = \frac{2\alpha'}{p}$, la quantité α' étant une constante, nous aurons : $\frac{\alpha}{1+\alpha p} = \frac{\frac{4K}{n^2}}{1+\frac{4K}{n^2}p} = \frac{2\alpha'}{p}$ et le second terme sous le radical deviendra $2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)$.

Le terme $\frac{\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha p'}$ sera $= \frac{\frac{2K}{n^2}}{1+\frac{4K}{n^2}p'}$; et si l'on substitue pour

$\frac{2K}{n^2}$ sa valeur $\frac{\alpha'}{p}\left(1+\frac{4K}{n^2}p\right)$, il sera $=\frac{\alpha'}{p}\left(\frac{1+\frac{4K}{n^2}p}{1+\frac{4K}{n^2}p'}\right)$.

Divisons par le numérateur ; nous aurons $\frac{\alpha'}{p\left(1+\frac{4K}{n^2}\right)\frac{(p'-p)}{1+\frac{4Kp}{n^2}}}$

et en mettant ensuite pour $\frac{4K}{n^2}$ sa valeur $\frac{2\alpha'}{p}\left(1+\frac{4Kp}{n^2}\right)$,

le terme $\frac{\alpha}{2(1+\alpha p')}$

deviendra $=\frac{\frac{\alpha'}{p}}{1+\frac{2\alpha'}{p}(p'-p)}=\frac{\frac{\alpha'}{p}}{1-2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)}$.

Les substitutions faites dans l'équation (6) et le terme $1-\sin^2 z$ étant remplacé par $\cos^2 z$, la valeur de $d\alpha$ ou la différentielle de la réfraction r, c'est-à-dire dr' deviendra :

$$dr=-\frac{\frac{\alpha'}{p}\cdot dp'(1-s)\sin z}{1-2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)\sqrt{\left[\cos^2 z-2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)+(2s-s^2)\sin^2 z\right]}} \quad (7)$$

équation qui est la même que celle de la page 246 de la mécanique céleste.

Divisons le numérateur et le dénominateur par $\cos z$, réduisons le radical en série et nous aurons : $dr=-$

$$\frac{\frac{\alpha'}{p}\cdot dp'(1-s)\tan z}{1-2\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)}\left\{1+\frac{\alpha'}{\cos^2 z}\left(1-\frac{p'}{p}\right)-\left(s-\frac{s^2}{2}\right)\tan^2 z+\right.\left.\frac{3}{2}\left[\alpha'\left(1-\frac{p'}{p}\right)-\left(s-\frac{s^2}{2}\right)\tan^2 z\right]^2+\cdots\right\} \quad (8)$$

ce qui est l'équation de la page 267 de la mécanique céleste.

Or en négligeant les produits de trois dimensions de α' et de s et en observant que α' est facteur commun à tous les termes, nous aurons à supprimer le terme $\frac{s^2}{2}\tan^2 z$ et tous les termes élevés à

la seconde puissance qui ont pour facteur la fraction $\frac{1}{2}$, nous obtiendrons, après avoir divisé par le dénominateur :

$$dr=-\frac{\alpha'}{p}dp' \operatorname{tang} z\left\{1-\frac{s}{\cos^2 z}+\alpha'\left(\frac{2\cos^2 z+1}{\cos^2 z}\right)\left(1-\frac{p'}{p}\right)\right\} \quad (9)$$

telle est l'équation différentielle définitive de la réfraction p. 267 de la mécanique céleste.

7. *Réfraction totale.* En intégrant l'équation (9) depuis $p'=p$ jusqu'à $p'=0$, nous aurons, pour $p'=p$:

$$r=-\alpha' \operatorname{tang} z\left\{1-\frac{1}{\cos^2 z}\int\frac{sdp'}{p}+\frac{\alpha'}{2}\left(\frac{2\cos^2 z+1}{\cos^2 z}\right)+C\right\}.$$

Pour $p'=0$, on a $r=0$ et par suite $C=0$.

Donc la réfraction cherchée sera la première intégrale prise avec le signe contraire, c'est-à-dire

$$r=\alpha' \operatorname{tang} z\left\{1-\frac{1}{\cos^2 z}\int\frac{sdp'}{p}+\frac{\alpha'}{2}\left(\frac{2\cos^2 z+1}{\cos^2 z}\right)\right\} \quad (10)$$

telle est l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

Mettons dans cette équation pour $\cos^2 z$ sa valeur $\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 z}$, réduisons, et négligeons les termes qui contiennent les puissances supérieures à la 3^{me} de $\operatorname{tang} z$; nous aurons :

$$r=\alpha' \operatorname{tang} z\left\{1-\int\frac{sdp'}{p}-\int\frac{sdp'}{p}\times\operatorname{tang}^2 z+\frac{3\alpha'}{2}+\frac{\alpha'}{2}\operatorname{tang}^2 z\right\}$$

ou

$$r=\alpha' \operatorname{tang} z\left\{1-\int\frac{sdp'}{p}+\frac{3\alpha'}{2}-\left(\int\frac{sdp'}{p}-\frac{\alpha'}{2}\right)\operatorname{tang}^2 z\right\} \quad (11)$$

ou enfin

$$r=\alpha' \operatorname{tang} z\left[1-\int\frac{p'ds}{p}+\tfrac{3}{2}\alpha' \sin 1''\right]-\left(\int\frac{p'ds}{p}-\frac{\alpha'}{2}\right)\alpha' \operatorname{tang}^3 z \quad (12)$$

Nous pouvons aussi représenter le coefficient total de $\alpha' \operatorname{tang} z$ par A et celui de $\alpha' \operatorname{tang}^3 z$ par B ; l'équation (11) deviendra alors :

$$z=A\alpha' \operatorname{tang} z-B\alpha' \operatorname{tang}^3 z \quad (13)$$

Voyons maintenant comment on détermine le terme qui reste à intégrer.

8. *Valeur du terme* $\int\frac{p'ds}{p}$. Nommons g' la gravité à la hauteur h au-dessus de la surface de la terre, g celle à la surface même, q la pression de l'air à la hauteur h et nous aurons :

$$dq=-g'p'\cdot dh \quad (14)$$

Or

$$g' = \frac{g \cdot R^2}{z^2} = \frac{g \cdot R^2}{R^2(1+s)^2} = \frac{g}{(1+s)^2} \text{ et } h = Rs :$$

donc

$$dq = -\frac{gp' R ds}{(1+s)^2}$$

et en négligeant la petite fraction s par rapport à 1

$$q = -g \int p' ds + C \qquad (15)$$

Mais à la surface de la terre la pression devient Q et l'intégrale $\int p' ds$ est nulle, à cause que s est $= 0$ à son origine ; donc $C = Q$, et à la limite supérieure de l'atmosphère la pression q est nécessairement nulle ; on a donc :

$$0 = -\int p' ds + Q$$

et par suite

$$\int p' ds = Q, \qquad (16)$$

quelle que soit la loi de la densité des couches atmosphériques. Mais la pression de l'air à la surface de la terre sur l'unité de base est égale au produit de la gravité g par la densité p de l'air et par la hauteur d'une colonne d'air, d'une densité uniforme égale à p, qui ferait équilibre à la pression du mercure dans le baromètre. Cette hauteur, à la température zéro et sous la pression $0^m,76$, est égale à $\frac{13,59 \times 0^m,76}{0,0013} = 10454 \times 0^m,76 = 7945^m,04$. On a donc $\int p' ds = \frac{g \cdot p \times 7945^m,04}{g \cdot R}$ et en mettant pour R la valeur 6366198 mètres on trouve $\int \frac{p' ds}{p} = \frac{7945^m,05}{6366198} = 0,00124799$.

Laplace ayant pris 10477,9 pour le rapport de la densité du mercure à celle de l'air sec a trouvé 0,00125254. Mais on peut regarder l'intégrale ci-dessus comme une quantité constante pour le même état de l'air et en déterminer la valeur à l'aide des réfractions observées, la valeur de α' étant d'ailleurs connue, voici comment :

9. *Valeur de l'intégrale* $\int \frac{p' ds}{p}$ *déduite des réfractions observées.* J'ai trouvé, comme nous le verrons dans un instant, pour la valeur moyenne de cette intégrale, le nombre 0,00134. Ce résultat est un peu plus grand que celui donné par de *Laplace ;* et il doit l'être effectivement ; l'air humide étant plus léger que l'air

sec pris dans les mêmes circonstances ; le rapport de la densité du mercure à celle de l'air humide est nécessairement plus grand que 10477,9 : le rapport devient $10477{,}9\left(1+\frac{13}{21}\times\frac{f}{0{,}76}\right)$, si nous représentons par f la tension des vapeurs d'eau dans l'air à la température zéro, et par $\frac{13}{21}$ le rapport de la densité de l'air sec et des vapeurs d'eau ; nombre que l'on trouve pour la densité des vapeurs d'eau à 100° et à la pression $0^m,76$, si on les compare à celle de l'air pris aussi à 100° et à 0,76 , en prenant 0,00365 pour le coefficient de dilatation de l'air. Mais le produit ci-dessus ne donne pas le nombre 0,00134 ; cependant c'est la valeur moyenne déduite de plusieurs réfractions relatives au même état de l'air ; et en l'admettant on peut calculer exactement toutes les réfractions que *Bessel* paraît avoir déterminées avec tant de précision. Si donc ce nombre était exact, comme je le crois , il indiquerait que la puissance réfractive de la vapeur aqueuse est plus grande que celle de l'air sec , bien que la vapeur soit moins dense que l'air ; c'est-à-dire que l'excès de la puissance réfractive de la vapeur aqueuse sur celle de l'air est loin d'être compensé par la plus petite densité comme on l'a admis jusqu'ici. Mais comment a-t-on trouvé ce terme $\int_c^c p'ds$ et comment a-t-on déterminé les coefficients de la formule (13) ?

10. *Détermination des coefficients numériques des formules* (12) *et* (13). Par les observations des étoiles circompalaires on a trouvé le coefficient α' exprimé en secondes de degré égal à 60,525 et par conséquent réduit en longueur égal à $\alpha'\sin 1'' = 0{,}000293431$. (Voir Astronomie de Biot, vol. I).

On a donc $\frac{3\alpha'}{2} = \frac{3\alpha'\sin 1''}{2} = 0{,}000440151$ ou $= 0{,}00044$

et $\frac{\alpha'\sin 1''}{2} = 0{,}0001467$.

Or Bessel a déterminé , dans ses *fundamenta Astronomiæ* , par une formule rigoureuse les réfractions de 20′ en 20′ pour toutes les distances zénithales apparentes depuis le zénith jusqu'à l'horison. Il se servait des observations faites par Bradley à la température de 48°,75 (Fahrenheit) et sous la pression 29, 6 pouces anglais , ce qui correspond à la température de 9°,3 et à la pression $751^{millim},83$.

En substituant donc dans l'équation (13) pour α' la valeur 60,525

et pour z successivement différentes réfractions correspondantes à des distances zénithales données, j'ai pu déterminer les coefficients A et B pour la température et la pression ci-dessus désignées. Or la moyenne de plusieurs valeurs de A et celle de plusieurs valeurs de B m'ont donné : A = 0,95234 et B = 0,001143. Pour réduire ces coefficients à ce qu'ils seraient, si les réfractions avaient été observées à la température zéro et à $0^m,76$ de hauteur barométrique, prenons le coefficient de l'air, eu égard à l'humidité, égale à 0,004 $= m$; celui de la dilatation absolue du mercure $= \frac{1}{5550} = 0,00018 = n$ et désignons les coefficients cherchés respectivement par A′ et par B′, nous aurons d'après des formules connues : A′ = 0,95234 × 1,0491 = 0,9991 ou = 0,999 et B′ = 0,001143 × 1,0491 = 0,0011991 = 0,0012. Ainsi pour déterminer l'intégral $\int_c^z p'ds$ on a l'équation : $A' = 1 - \int_c^z p'ds + \frac{3}{2}\alpha' \sin 1''$ ou $0,9991 = 1 - \int_c^z p'ds +$ 0,00044, d'où l'on tire $\int_c^z p'ds = 0,00134$. En substituant les valeurs de A′, B′ et $\int p'ds$ dans les équations (12) et (13), elles deviendront :

$$r = \alpha' \tang z [1 - 0,00134 + \tfrac{3}{2}\alpha' \sin 1''] - (0,00134 - \frac{\alpha' \sin 1''}{2}) \alpha' \tang^3 z \quad (16)$$

$$r = 0,9991 \cdot \alpha' \tang z - 0,0012 \cdot \alpha'' \tang^3 z. \quad (17).$$

Le coefficient du premier terme de la formule donnée par Laplace est 0,99918761 et celui du second est : 0,001105825, voir Astronomie de Biot, vol. 1, p. 442. Ainsi les réfractions calculées par la formule précédente seront à très-peu près les mêmes que celles dans la connaissance des temps, déterminées par la formule de Laplace ; mais elles sont cependant un tant soit peu plus petites, ce qui est conforme aux tables de Bessel, comme nous allons le voir dans le numéro suivant :

11. *Comparaison des réfractions calculées par la formule* (17) *avec celles données par les tables de Bessel, pour la température de* 9°,3 *et la pression* $751^{mm},83$. Le tableau suivant contient les réfractions de dix en dix degrés depuis la distance zénithale jusqu'à celle de 80 degrés de division sexagésimale.

DISTANCES ZENITHALES.	RÉFRACTIONS CALCULÉES.	RÉFRACTIONS DES TABLES.	DIFFÉRENCES.
$z=9°$	$z=9'',129$	9″,12	0″,009
$z=10°$	$z=10'',163$	10″,15	0″,013
$z=11°$	$z=11'',19$	11″,19	0″,00
$z=20°$	$z=20'',979$	20″,95	0″,029
$z=30°$	$z=32'',278$	35″,22	0″,058
$z=40°$	$z=48'',36$	48″,26	0″,10
$z=50°$	$z=68'',57$	68″,48	0″,09
$z=60°$	$z=99'',47$	96″,30	0″,14
$z=70°$	$z=156'',93$	156″,77	0″,16
$z=80°$	$z=314'',27$	315″,13	0″,86

Les différences entre les réfractions calculées et celles des tables de *Bessel* sont, comme on voit, aussi petites qu'on peut le désirer. Ainsi les formules générales (16) et (17) sont pleinement confirmées par les recherches profondes et précises de Bessel. La formule très-simple (17) peut donc être employée avec confiance depuis $z=0$ jusqu'à $z=80°$; et depuis $z=0$ jusqu'à $z=30°$, la valeur du second terme n'a qu'une influence presqu'insensible sur les résultats ; car le premier terme seul a donné les réfractions comprises entre les limites désignées ci-dessus.

Sa valeur pour $z=50°$, n'est que de 0″,122 ; à 60° de distance zénithale, elle est de 0′,37, à 70° elle est de 1″,51 et à 80° elle est de 13″,24.

En prenant au lieu de 0,95234 le coefficient A égal à 0,951 qui correspond à une valeur de A′ égale à 0,9976941 ou simplement à 0,9977, j'ai calculé les réfractions de degrés en degrés depuis $z=0$ jusqu'à $z=40°$, en n'employant que le premier terme de l'équation (17) et la plus grande différence entre les réfractions calculées et celles des tables n'excède pas 0″,03 ; elle correspond aux valeurs de $z=38$, 39 et 40.

XIV. — *Notice sur deux petits appareils propres à changer la direction des courants électriques.*

1. *Changeur.* Voulant faire, il y a quelques années des recherches sur l'électro-magnétisme, comme force motrice, j'eus besoin d'un Appareil propre à changer la direction des courants électriques dans plusieurs électro-aimants, qui devaient être tantôt mobiles tantôt fixes. Celui que je me suis fait construire et auquel je donne le nom de *Changeur,* diffère de tous ceux que je connais par sa construction et sa grande simplicité; il m'a d'ailleurs si parfaitement servi dans un très-grand nombre d'expériences que je crois utile d'en donner la description en quelques mots : L'appareil est composé 1) d'un disque en cuivre de deux millimètres d'épaisseur, replié d'un centimètre environ à sa circonférence et fixé, à l'aide de petites vis de pression en cuivre, contre un disque en bois très-sec ou mieux contre un disque en ivoire ou en verre. 2) De deux lames ou ressorts en cuivre, qui, fixées sur un pied en bois, communiquent par une de leurs extrémités, avec les deux pôles d'une pile voltaique, en s'appuyant par l'autre extrémité recourbée sur la circonférence du disque en mouvement. Les disques en cuivre et en ivoire sont percés à leur centre commun et fixés sur un cylindre creux en ivoire, qui est à son tour porté par l'arc horizontal en acier, destiné à être mis en mouvement.

On divise le disque en cuivre et sa circonférence en un nombre de parties égales au nombre de fois qu'on veut changer la direction du courant électrique pour chaque révolution entière de l'axe : par exemple, en deux parties égales, si l'on veut changer la direction du courant deux fois par rotation entière, c'est-à-dire si l'on veut employer un seul aimant fixe et un seul électro-aimant; et en six secteurs égaux si l'on veut employer trois aimants fixes et trois électro-aimants mobiles ou réciproquement. Le diamètre du changeur doit-être proportionné au nombre des secteurs : pour six je lui ai donné la longueur de 8 centimètres en remplaçant, par de petites lames, les espaces vides, de trois millimètres d'épaisseur, qui sépa-

rent les secteurs les uns des autres. La circonférence doit être parfaitement unie et polie, de manière que l'axe étant en mouvement les ressorts fixes en cuivre puissent s'appliquer exactement et partout également sur le changeur.

Ceci admis désignons les secteurs par les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6; appliquons deux petits anneaux en cuivre, de diamètres différents, à la surface extérieure du disque en ivoire; fesons communiquer l'un de ces anneaux, à l'aide de petites vis de pression en cuivre, avec les secteurs impairs et l'autre avec les secteurs pairs, et prenons les deux ressorts verticaux tels que l'un touchant sur un secteur impair, l'autre soit en contact avec un secteur pair, précisément pendant le même temps; de sorte que leurs extrémités passent dans le même instant de deux secteurs aux deux suivants. Les deux bouts du fil conducteur de l'électro-aimant devront communiquer l'un avec un secteur pair et l'autre avec un secteur impair du changeur, et y être fixés à l'aide de vis de pression. Voilà tout l'instrument propre à changer la direction des courants électriques et par suite les pôles des électro-aimants mobiles.

On voit sans peine que si l'on voulait employer pour force motrice l'action réciproque de 50 aimants fixes et de 50 électro-aimants, on devrait diviser le disque en cuivre en 50 secteurs égaux et lui donner par conséquent des dimensions en rapport avec ce nombre.

Dans le cas, où l'on voudra changer la direction des courants dans des électro-aimants fixes et employer des aimants ordinaires à la place des électro-aimants mobiles, on fixera sur l'axe en acier à mettre en mouvement un cylindre en ivoire et sur celui-ci deux anneaux en cuivre qui, isolés l'un de l'autre, communiquent, à l'aide de deux fils en cuivre, l'un avec un secteur pair et l'autre avec un secteur impair du changeur. Contre ces deux anneaux presseront pendant le mouvement deux ressorts verticaux en cuivre, lesquels étant fixés sur un pied en bois, communiquent par leurs extrémités inférieures avec les deux bouts du fil ou des fils des électro-aimants fixes. Le courant électrique passera de la pile aux ressorts en contact avec l'appareil qui en change la direction et le transmet aux deux anneaux, lesquels le conduisent dans le fil des électro-aimants. En déplaçant petit à petit le changeur sur son axe, on reconnaît facilement par l'expérience la position à lui donner pour produire le maximum d'effet ou de vitesse.

2. *Changeur plongeant dans du mercure.* Cet appareil est composé de deux changeurs semblables à celui que nous venons de

décrire et qui sont fixés sur l'axe à mouvoir à une distance de 2 à 3 centimètres l'un de l'autre, mais de manière que les secteurs qui portent le même numéro soient en regard et qu'en outre un secteur pair de l'un des changeurs communique avec un secteur impair de l'autre, à l'aide d'un gros fil en cuivre. Au-dessous de chaque changeur on fixe un petit vase en verre à parois relevées contenant un peu de mercure. Un des deux vases communique avec le pôle positif d'une pile, l'autre avec le pôle négatif. La quantité de mercure doit-être telle que les deux secteurs qui portent le même numéro plongent à la fois et pendant le même temps dans le mercure, et que ceux-ci étant sortis deux autres y pénètrent immédiatement et ainsi de suite. Ce dernier changeur produit, pour la même intensité de courant, plus de vitesse que le premier ; mais il est indispensable d'employer du mercure très-pur et de l'empêcher de s'échapper des vases en donnant à leurs parois des hauteurs suffisantes et des formes convenables. Cet appareil convient parfaitement pour étudier les raies dans le spectre-électrique, surtout si l'on remplace les secteurs par de gros fils terminés en pointes. Pour observer les raies on n'a qu'à regarder les étincelles à travers un prisme en flint placé devant l'œil. Je ne pense pas que des figures soient nécessaires pour donner une idée plus exacte des deux petits appareils que je viens de décrire.

XV. — *Résumé des Méthodes élémentaires, en Géométrie;*

Par J.-N. NOËL,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

I. Les personnes qui ont réfléchi sur les méthodes géométriques savent combien les traités élémentaires de cette science peuvent encore être améliorés, pour la plupart, quant au fond et quant à la forme des théories et des applications principales.

Une amélioration essentielle, réclamée depuis longtemps, est la suppression de toutes les *réductions à l'absurde* que l'on peut remplacer par des démonstrations *directes;* car celles-ci reposant immédiatement sur les définitions et sur des propositions, bien établies, sont d'une clarté et d'une évidence comparables à celles des axiomes.

Le défaut capital des réductions à l'absurde, démonstrations tout-à-fait *indirectes* et souvent fort obscures, est de ne pas se déduire immédiatement de la notion même de l'objet dont on veut établir quelque propriété. Certainement, on est bien forcé d'employer ce mode de démonstration chaque fois que l'analyse de l'objet en question montre qu'on sait beaucoup mieux ce que cet objet n'est pas que ce qu'il est; mais toujours est-il que la réduction à l'absurde, si elle possède l'avantage de convaincre l'esprit, n'a pas celui de l'éclairer. Il ne faut donc y recourir que quand on ne peut faire autrement, ou bien lorsque la vérité à établir a déjà une certaine évidence; comme les propositions *réciproques*, dont on abrège souvent les démonstrations par ce mode de raisonnement.

II. Les principales théories de la géométrie portent essentiellement sur la *proportionnalité* et le *mesurage;* sur l'*égalité*; l'*équivalence*, la *symétrie* et les deux genres de *similitude* des figures. Ces théories recevant de fréquentes et utiles applications, dans les arts, dans les recherches scientifiques et dans les déductions même de la géométrie, doivent être amenées et développées le plus clairement possible, c'est-à-dire sans l'intervention de la réduction à l'absurde, chaque fois que celle-ci peut s'éviter; car la réduction à l'absurde a souvent pour effet d'alonger et même d'obscurcir les raisonnements.

On peut démontrer, par exemple, l'*égalité de deux triangles dont les trois côtés sont respectivement égaux*, à l'aide d'un seul raisonnement, très-simple, fondé sur les propriétés du triangle *isocèle* (celles-ci étant démontrées directement par *superposition*); tandis que la réduction à l'absurde exige ordinairement la distinction de

trois cas généraux ; ainsi elle alonge et obscurcit la démonstration, comme pour une foule d'autres théorèmes, où l'on pourrait s'en passer.

Il est rare que la notion de *similitude* soit développée de manière à la rendre complète et à bien en faire saisir toute l'importance ; et c'est-là encore une amélioration à introduire dans les traités élémentaires, où la *similitude inverse*, qui fournit la *symétrie*, comme *particularité*, doit figurer, tout aussi bien et comme non moins utile que la *similitude directe*, qui fournit l'*égalité absolue*. C'est pourquoi nous reviendrons plus bas sur la notion de similitude.

III. Dans le passage du *commensurable* à l'*incommensurable*, où il faut démontrer l'égalité de deux *rapports*, la réduction à l'absurde n'est, en réalité, qu'un *cercle vicieux*. Car l'existence du rapport entre deux quantités continues, entraîne nécessairement l'existence d'une *mesure commune*, assignable ou inassignable, *finie* ou *infiniment petite ;* et alors le rapport est *exprimable* ou *inexprimable* en chiffres : c'est un nombre *rationnel* ou un nombre *irrationnel*. En un mot, dès qu'il y a *rapport*, il y a *mesure commune ;* par conséquent la distinction des deux cas : *commensurable* et *incommensurable*, est au moins inutile.

Ici donc la réduction à l'absurde, employée dans tous les traités élémentaires, n'apprend absolument rien : et comme elle complique les raisonnements, elle ne doit aucunement servir à démontrer l'égalité des deux rapports, c'est-à-dire la *proportion ;* et sans doute qu'elle n'aurait jamais été employée, à cet effet, si la notion du rapport avait été plus développée et mieux connue. Car soient A, B, C, D quatre quantités continues, A et B de même nature, aussi bien que C et D ; supposons ces quantités tellement liées entre elles qu'en divisant A et B en m et p parties égales à leur mesure commune x, on divise en même temps C et D en m et p parties égales ou *équivalentes* à y : on en déduit immédiatement

$$A:B=C:D.$$

Telle est la méthode des *parties égales*, pour établir toutes les proportions, en géométrie : c'est la *règle* du mesurage *indirect*. Cette méthode, l'une des plus claires et des plus simples, est absolument indépendante de toute réduction à l'absurde.

Pour l'appliquer au *mesurage indirect* de tout *prisme droit* P, de base b et de hauteur h, soit v le cube, *unité* de volume, ayant pour base le carré s, *unité* superficielle, et pour hauteur l'*unité* linéaire u. Soit R le prisme droit *auxiliaire*, de même base b que P et de même hauteur u que v : à cause de la hauteur u, commune, les deux

bases s de v glissent en même temps sur les deux bases b de R; ainsi diviser b et s en n et p parties égales à leur mesure commune x, par des plans perpendiculaires, c'est diviser en même temps R et v en n et p prismes droits, égaux à y, comme ayant bases égales à x et hauteurs égales à u. On a donc simultanément $R=ny$ et $v=py$, $b=nx$ et $s=px$. Or, il est évident que $ny:py=nx:px$; donc $R:v=b:s$ et $R=v(b:s)$.

De même, diviser les hauteurs h et u, de P et de R, en m et q parties égales à leur mesure commune z, par des plans perpendiculaires (ou parallèles à la base b commune), c'est diviser en même temps P et R en m et q prismes droits, égaux à t, comme ayant bases égales à b et hauteurs égales à z. On a donc à la fois $P=mt$ et $R=qt$, $h=mz$ et $u=qz$; d'où $P:R=h:u$ et $P=R(h:u)$.

Substituant donc la valeur de R, on aura, pour l'expression numérique de tout prisme droit P :

$$P=v(b:s)(h:u), \text{ ou simplement } P=bh,$$

les unité v, s et u étant *sous-entendues;* d'où résultent immédiatement les expressions de tout cube et de tout parallélipipède rectangle.

IV. Ceci nous conduit à remarquer combien il importe à la clarté, à la rigueur et à la facilité des théories, de bien développer les *notions premières* et de les résumer par de bonnes *définitions*. La théorie des *parallèles* n'est pas encore démontrée complètement, dans presque tous les traités de géométrie; en serait-on réduit à y admettre un nouvel axiome, en forme de *demande*, si la définition de l'*angle* en avait fait bien connaître la double propriété *caractéristique?* ou du moins si, par les premières notions, on avait bien vu que le *rapport indique toujours comment l'antécédent se trouve avec le conséquent seul?* Car il résulte de ce fait que s'il est constaté, par les *définitions* ou les *constructions*, que A *se trouve avec* B *absolument comme* C *avec* D, on aura nécessairement

$$A:B=C:D.$$

Telle est la méthode *analogique* des proportions : elle est tout aussi claire et peut être plus simple que la méthode des parties égales, comme tenant de plus près encore aux *notions premières* et à la *comparaison* même des quatre termes, deux à deux.

V. Soit A le pied de la perpendiculaire PA à une droite MN; soit B un point donné sur AM, de telle sorte que la longueur AB soit donnée invariable; sur la droite menée de B à un point quelconque C de AP, soit prise la longueur constante BE et soit abaissée la per-

pendiculaire ED sur AB, dont le pied D tombera nécessairement entre A et B, vu que l'angle ABC est *aigu*.

Cela posé, à cause de l'égalité des angles droits A et D ou BAC et BDE, on voit que les deux angles A et B, qu'il faut tracer aux extrémités de AB, pour avoir AC, il faut aussi les tracer aux extrémités de BD, pour avoir DE; donc AC *se trouve avec* AB *absolument comme* DE *se trouve avec* BD. Si donc DE est le triple ou les 13 quarts de BD, il faut que AC soit aussi le triple ou les 13 quarts de AB; et en général, si DE=BD×n, n étant un *rapport* exprimable ou inexprimable en chiffres, il faut aussi que AC=AB×n. On voit donc que AC:AB=DE:BD et que par suite, on aura toujours AC=AB(DE:BD).

Par cette expression de AC, il est clair que si l'angle aigu B croit, d'une manière continue, depuis zéro, AB et BE restant invariables; DB diminue et DE augmente, aussi bien que AC : si l'angle B, toujours aigu, diffère *infiniment peu* de l'angle droit, BD est *infiniment petite*, tandis que DE n'est pas encore égale à BE; donc alors la longueur AC est *infinie*. Ainsi l'on voit, 1° que *dans le même plan, l'oblique et la perpendiculaire à une même droite finissent toujours par se couper, étant suffisamment prolongées.*

2° Si l'angle B, continuant à croître, devient droit, d'où BD=0 et DE=BE; la longueur AC cesse d'exister, aussi bien que le point C d'intersection. Par conséquent, *dans le même plan, deux droites perpendiculaires à une même troisième n'ont aucune intersection et sont parallèles entre elles.*

3° Enfin, si l'angle B surpasse l'angle droit (ne serait-ce que d'un angle *infiniment petit*) le pied D quitte le point fixe B et passe dans la situation opposée à celle qu'il avait sur AM, quand l'angle variable B était aigu; de sorte que la longueur BD devient *négative*, de *positive*, puis *nulle*, qu'elle était avant; donc la longueur AC devient *négative*, de *positive*, puis *impossible*, qu'elle était quand l'angle B était aigu, puis droit. Le point d'intersection C est donc encore situé sur la perpendiculaire AP, mais sur son prolongement au-dessous de MN. Or, BE n'étant ainsi parallèle à AP que quand l'angle B est droit, on voit que, *par un point donné* B, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à la droite donnée* AP.

De là suit immédiatement que, *deux droites étant parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre :* c'est la *réciproque* de 2°, que M. Francœur a choisie pour établir la *théorie des parallèles.*

Toutes les propositions ci-dessus me paraissent clairement et complètement démontrées, à l'aide de la méthode *analogique* des proportions. Cette méthode comme conséquence immédiate des définitions et de la notion même du rapport, a toute la clarté et toute la certitude des vérités fondamentales, c'est-à-dire des axiomes. Si cependant on n'y voit qu'un nouveau *postulatum*, nous pensons du moins que ce postulatum est plus facile à accorder que chacun de ceux auxquels nous le substituons; et on le préférera sans doute quand on en verra sortir, le plus clairement et le plus brièvement possible, toutes les propositions les plus utiles de la science.

VI. La méthode analogique des proportions n'est au fond que la *règle d'analogie directe*, dans le mesurage. Deux grandeurs géométriques, comprises dans la même définition générale et complète, ont nécessairement le même mode de construction, à l'aide d'éléments générateurs *analogues* deux à deux (comme les deux *bases* et les deux *hauteurs*); elles ont donc aussi nécessairement chacune la même expression numérique en fonction explicite des éléments générateurs analogues, évalués numériquement d'après la même *unité*. Ici l'analogie est complète; il n'y a donc point de raison pour que les expressions numériques des deux grandeurs proposées soient déduites de règles ou de formules différentes; d'où il suit, par exemple, que *deux pyramides, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes entre elles.*

On voit que l'expression numérique étant calculée pour la plus simple des deux quantités géométriques, comprises dans la même définition, elle l'est nécessairement aussi pour l'autre et doit s'y appliquer immédiatement.

Telle est la *règle d'analogie directe* pour *découvrir* ou *démontrer* des formules générales, en Algèbre, aussi bien qu'en Géométrie. Cette règle est le résultat le plus certain de l'*induction*, soit qu'on s'élève à la loi générale en passant par les cas particuliers, méthode que Newton a suivie, pour découvrir la *gravitation universelle*, aussi bien que pour découvrir la *formule du binome;* soit qu'en posant la formule générale, on veuille la vérifier en descendant aux valeurs particulières, pour découvrir la *fonction génératrice* de cette formule. C'est ainsi que l'on établit la complète généralité de la formule du binome (ainsi que de plusieurs autres, non moins importantes); et cela, de la manière la plus claire et la plus simple.

« Newton étendit ensuite aux puissances fractionnaires, positives et négatives, l'expression analytique qu'il avait trouvée pour

les puissances entières et positives du binome. Vous voyez dans cette extension, a dit Laplace, un des grands avantages du langage algébrique, qui présente des vérités beaucoup plus générales que celles qu'on voulait lui faire exprimer; en sorte qu'en lui donnant toute l'étendue qui lui convient, on voit sortir une foule de vérités nouvelles, de formules qui n'avaient été trouvées que par des suppositions particulières. On fut d'abord très-réservé à admettre ces conséquences générales que fournissent les formules analytiques; mais un grand nombre d'exemples les ayant justifiées, on s'abandonne aujourd'hui sans crainte, à l'analyse et à toutes les conséquences qu'elle nous présente, et les plus heureuses découvertes ont été le fruit de cette hardiesse. Observons cependant qu'il y a quelques précautions à prendre, pour éviter de donner aux formules plus de généralité qu'elles n'en comportent, et qu'il est toujours bon de démontrer en rigueur les résultats que l'on obtient».

Cela revient évidemment à bien s'assurer que l'analogie est complète; car alors il n'y a aucune raison pour que la formule, vérifiée par des valeurs particulières de ses éléments générateurs, cesse d'être vraie pour des valeurs quelconques; vu d'ailleurs que les valeurs particulières d'un élément générateur ne sauraient aucunement changer le rôle qu'il remplit dans la génération.

VII. Les auteurs se sont attachés, avec beaucoup de raison, à rendre bien saillante l'*analogie* entre les diverses parties de la géométrie élémentaire, afin d'en simplifier l'étude; mais ils auraient atteint le but, plus complètement, et auraient évité bien des détours, des lemmes, des démonstrations compliquées, bien des longues et inutiles réductions à l'absurde, s'ils avaient pensé à la *règle d'analogie directe*, clairement indiquée par chaque définition générale.

A l'aide de cette règle, en effet, on passe immédiatement de l'aire du triangle *isocèle* à l'aire du secteur *circulaire*, dont ce triangle fait partie; de l'aire *latérale* du prisme droit ou de la pyramide régulière à l'aire *latérale* du cylindre circulaire droit ou du cône droit, à base circulaire; on passe du volume du cube au volume de tout prisme ou de tout cylindre; du volume de la pyramide régulière, sixième d'un cube, au volume de toute pyramide et de tout cône; d'où l'on déduit ensuite, très-simplement et toujours d'après l'analogie directe, toutes les propositions du mesurage des aires et des volumes, dans certains *anneaux* et dans les *corps ronds* ou de *révolution*.

L'expression numérique est d'autant plus *générale* que la défini-

tion, d'où elle se déduit, s'étend à un plus grand nombre de figures *analogues*. Aussi presque toutes les règles de mesurage, dans la géométrie élémentaire, sont-elles exprimées par une même formule générale (que nous avons déjà établie).

Soit G une grandeur géométrique quelconque, aire ou volume; soit b sa base, ligne ou aire, et soit h sa hauteur, distance rectiligne ou curviligne du sommet à b: si x est la *section* parallèle à la base b, faite à la distance y du sommet, et que m étant un *exposant* quelconque, toutes les grandeurs G soient définies par la proportion

$$b : x :: h^m : y^m ;$$

il est facile d'en déduire l'expression numérique de G, en b, h et m.

Par cette définition, en effet, toutes les grandeurs G, qui y sont renfermées, ont nécessairement le même mode de génération numérique; or, on sait que, pour le triangle, où $m=1$, et pour le prisme droit, où $m=0$, on a $G=bh:(1+m)$; par conséquent, l'expression numérique de toutes les grandeurs G proposées est

$$G=bh:(1+m).$$

Cette formule est très-générale; car elle s'applique immédiatement, 1° à l'aire de tout secteur circulaire, à l'aire latérale de tout cône circulaire droit et au volume de tout *conoïde* droit triangulaire, où chaque fois $m=1$; 2° au volume de toute pyramide, de tout cône, de tout onglet sphérique et de toute pyramide, partie de la sphère, où chaque fois $m=2$; 3° au volume de tout prisme ou de tout cylindre, à l'aire latérale du cylindre circulaire droit et de toute figure, ayant le même mode de génération, où chaque fois $m=0$.

La même formule, pour $m=0$, fournit immédiatement l'expression numérique du volume et de l'aire latérale engendrés respectivement par l'aire plane b et son périmètre p, ayant l'un et l'autre un *centre de symétrie;* ce centre se mouvant sur la ligne donnée h, *courbe* ou *sinueuse*, de telle sorte que le plan de b lui soit toujours *normal*, comme pour le cylindre circulaire droit. Le volume et la surface engendrés ont donc bh et ph pour mesures respectives; expressions immédiatement applicables à certaines *colonnes torses*, aux divers genres d'*anneaux* et en particulier à l'*anneau rond*, où $p=2\pi r$, $b=\pi r^2$ et $h=2\pi d$; enfin à l'aire latérale du cône circulaire droit *tronqué*, à bases parallèles.

L'analogie directe ne sert pas seulement à démontrer, les propositions de mesurage, de la manière la plus simple; mais surtout

elle sert à les découvrir ou à les rappeler, si on les avait oubliées : elle est bien la véritable *méthode d'invention* qui domine toutes les sciences.

L'analogie et l'expérience sont les guides de l'esprit de recherche ; *ce sont les deux béquilles à l'aide desquelles nous nous traînons dans la carrière du raisonnement*, a dit le grand Frédéric (Boiste). Ces deux guides, toujours nécessaires, peuvent ne pas suffire dans les sciences d'observation ; mais en Algèbre et en Géométrie, où l'analogie directe est clairement et complètement indiquée par chaque définition générale, les conclusions par analogie sont des vérités certaines, clairement et rigoureusement déduites ; parce que la définition générale, rendant en quelque sorte identiques toutes les grandeurs qu'elle renferme, celles-ci jouissent nécessairement des mêmes propriétés générales, indiquées par l'analogie.

VIII. Les améliorations que nous venons de signaler, dans les modes de recherche et de démonstration, ne sont pas les seules que réclament les traités de géométrie : plusieurs de ces traités demandent encore une *méthode générale*, rendue bien saillante, par différents exemples choisis, pour démontrer les *théorèmes* et pour résoudre les *problèmes*, soit *graphiques* soit *numériques* (souvent à l'aide de l'Algèbre), d'après l'analyse de la figure cherchée, *tracée d'abord approximativement.*

Ici les exemples abondent ; car il existe un grand nombre de *propositions réciproques*, qu'on énonce rarement, et dont cependant les démonstrations fourniraient, aux élèves, des *exercices* faciles, propres à éclaircir les théories et à les fixer dans la mémoire.

Il existe aussi un grand nombre de *propriétés* des figures définies : triangles, quadrilatères, cercle, prismes, pyramides, etc., qui ne sont pas énoncées et que l'on devrait donner pour sujets de *composition*, d'un jour à l'autre, avant, pendant ou après les leçons successives, en les énonçant, soit comme théorèmes à démontrer, soit comme problèmes à résoudre.

Tels sont les moyens les plus efficaces pour familiariser les élèves avec les formes rigoureuses de l'analyse logique, pour leur inspirer le goût du travail et pour leur faire approfondir la science ; surtout si l'on choisit les exemples parmi les choses usuelles, autant que possible, ou du moins si on les présente sous des formes propres à exciter la curiosité et à faire naître ainsi le désir de connaître.

La considération de la ligne droite et de la circonférence, a dit Laplace, donne lieu à beaucoup de problèmes très-piquants, dont

on peut trouver des solutions fort élégantes ; un choix bien fait de ces problèmes que l'on proposerait aux élèves, exercerait leur esprit d'une manière utile, et graverait dans leur mémoire, les propositions les plus intéressantes de la géométrie.

Les Professeurs, pour préparer leurs élèves aux examens et aux épreuves des *Concours*, but final des études, reviennent plusieurs fois sur les théories principales, afin de les leur faire approfondir : chose sans doute fort utile, car les répétitions sont même indispensables à cet effet. Mais la résolution de questions choisies, applications des théories successives, n'est-elle pas la méthode la plus fructueuse et la plus propre à bien faire ces répétitions, elles-mêmes ?

Il faut observer toutefois qu'ici, c'est moins la *quantité* que la *qualité* que l'on doit considérer : quelques théorèmes ou problèmes, bien choisis et bien analysés, instruisent mieux et donnent plus complètement l'esprit de recherche, qu'un grand nombre d'exercices, faits superficiellement. D'ailleurs, les applications ne seront jamais assez multipliées pour prévoir toutes les circonstances qui peuvent se présenter, dans les usages de la vie, dans la pratique des arts, aussi bien que dans les examens.

C'est donc par une complète analyse logique des propositions successives et par l'application que l'on en fait à des questions choisies, que l'on peut approfondir l'étude de la science, en se bornant d'ailleurs aux théories fondamentales qui la constituent.

On peut sans doute oublier certains énoncés, en *Arithmétique* et en *Algèbre*, aussi bien qu'en *Géométrie ;* mais ce qu'on n'oublie pas et ce qu'on a toujours à sa disposition, quand on a suivi une bonne direction dans l'étude de la science, c'est la *méthode* et c'est l'*intelligence* de ses procédés, une fois bien acquises ; pour retrouver au besoin les propositions oubliées ; pour en découvrir d'autres, non moins utiles parfois, et enfin, pour réussir dans les concours et dans les examens d'admission.

IX. La géométrie a pour objet l'*étendue figurée*, c'est-à-dire à la fois la *grandeur*, la *forme* et par conséquent la *position*. Or, il arrive souvent que la figure à étudier n'existe que dans la conception, ou qu'elle est *invisible* et *inaccessible*, du moins en partie : dans chacun de ces cas, pour faciliter cette étude, il est nécessaire de mettre la figure sous les yeux, ou du moins sa *représentation* approchée, sur le papier ou sur le tableau ; il faut donc la *construire* ou la *dessiner*, avec ses dimensions *réduites*, réelles ou apparentes : de telle sorte que la *copie* résultante la *représente* complètement aux

yeux, en tienne absolument lieu et lui soit *semblable* en tout, si elle est plane, ou *paraisse* telle, si la figure imaginée a les trois dimensions de l'étendue.

Dans ce dernier cas, la *copie* devrait être en *relief*, pour représenter complètement la figure à étudier et servir de *modèle* à toutes les figures *semblables* que l'on devrait construire avec des dimensions déterminées.

Toutes les recherches de la géométrie ne portent et ne sauraient porter que sur les définitions et non sur les figures, que l'on met sous les yeux, pour donner une idée de la figure à étudier et pour diriger les raisonnements à effectuer; car un tracé approché de la forme apparente, un simple *croquis*, suffit à cet effet. Il est même souvent plus simple de ne tracer aucune figure; mais alors il faut en avoir l'idée complète, donnée par la définition.

Maintenant, pour que deux figures quelconques inégales soient *semblables* en tout et que l'une puisse *représenter* l'autre (aux yeux quant à la forme seulement) et en tenir parfaitement lieu dans l'étude de leurs *propriétés* communes; il faut que toutes les parties de la première (la *copie*) puissent *représenter* les parties *correspondantes* ou *analogues*, appelées *homologues*, de la figure à étudier; ainsi il faut que, 1° les *angles* ou les *dièdres* homologues soient *égaux;* 2° les *droites* homologues, *proportionnelles;* 3° les *faces* homologues, *semblables;* 4° enfin, les *parties* homologues, disposées dans le même *ordre*, en passant d'une figure à l'autre.

On doit donc appeler, 1° *Polygones semblables*, deux polygones, du même nombre quelconque de sommets, ayant les côtés homologues proportionnels et les angles homologues égaux, disposés dans le même ordre; 2° *Polyèdres semblables* (directement), deux polyèdres, de chacun n sommets, ayant les faces homologues semblables et les *coins* homologues égaux, disposés dans le même ordre, en passant d'un polyèdre à l'autre.

Bien qu'il y ait ici des conditions se déduisant des autres et par conséquent *superflues*, nous préférons les définitions précédentes; d'abord parce qu'elles sont les plus conformes à l'idée que nous donne le seul aspect des deux figures; et ensuite parce que la recherche des conditions, *nécessaires* et *suffisantes*, est spécialement l'objet de la théorie (laquelle apprend aussi que, sur la même sphère, on ne saurait tracer deux figures *semblables*).

Il résulte de ces définitions, que deux polyèdres ou deux polygones *semblables* ont des *formes identiques*, sans qu'ils aient néces-

sairement la même *grandeur*. Remarquons d'abord qu'ici la *forme* ne dépend pas seulement de la grandeur individuelle des parties, mais surtout de leur *disposition* les unes à l'égard des autres, ne dépendant que des *angles* ou des *coins*. Or, si deux polyèdres sont semblables directement, ils ne cessent pas d'être tels et la forme de chacun ne change pas, lorsque les coins homologues restant égaux, deux côtés homologues deviennent égaux entre eux; vu que les côtés homologues restent toujours proportionnels. Mais alors les deux polyèdres pouvant se confondre en un seul, ont absolument la même forme, que l'hypothèse de deux côtés homologues égaux n'a pas changé : donc avant ils avaient aussi la même forme; et c'est uniquement l'identité des formes qui constitue la *similitude directe* de deux figures.

Pour la *ressemblance*, la *représentation* ou l'*apparence* complète d'un objet matériel, il faut à la fois l'identité des *formes* et l'identité des *couleurs* respectives et de leurs *nuances*, semblablement disposées, en passant de l'objet à son image.

X. Lorsque la comparaison de deux corps matériels, où l'on fait abstraction des couleurs, apprend qu'*ils ne diffèrent que par leurs grandeurs*, comme deux cubes ou deux sphères quelconques, on dit que ces deux corps sont *semblables;* et telle est la véritable notion de *similitude*.

Le seul aspect des deux corps conduit à cette notion; laquelle est nécessairement fort confuse chez le vulgaire qui, s'arrêtant à ce seul aspect, ne saurait voir comment les deux corps peuvent ne différer que par leurs grandeurs.

Pour le savoir et acquérir la véritable notion de similitude, il faut les définitions développées plus haut; et il en résulte que, 1° *deux quantités géométriques sont semblables dans tous les cas analogues à ceux où elles sont égales;* vu que l'*identité* des deux figures exige toutes les conditions de leur *similitude* et une condition de plus, savoir : l'égalité de deux lignes homologues.

2° *Deux quantités géométriques sont inversement semblables dans toutes les circonstances analogues à celles qui les rendent symétriques;* vu encore que la *symétrie* des deux figures exige toutes les conditions de leur similitude *inverse* et une condition de plus, savoir : l'égalité de deux lignes homologues.

On voit qu'en remplaçant le rapport 1, entre les lignes homologues, par un autre rapport constant quelconque, les propositions établies sur l'*égalité* et la *symétrie* de deux figures, se changent en

propositions sur la *similitude directe* et la *similitude inverse* des deux figures, ainsi modifiées ; et ces nouvelles propositions sont alors démontrées *par analogie*.

En général, soient A et B deux quantités géométriques, directement ou inversement semblables ; soient C et D les deux parties *homologues*, l'une de A et l'autre de B ; C et D sont donc aussi semblables, directement ou inversement. Or, il est évident que D se trouve avec B absolument comme C avec A ; donc on aura toujours la proportion

$$A:C::B:D.$$

Si donc A, C et D sont mesurés ou évalués numériquement, on pourra calculer B, *inaccessible* ou *invisible*.

Le rapport des deux aires ou des deux volumes A et B, directement ou inversement semblables, est parfois très-difficile à déterminer ; et il faut alors le remplacer par un autre égal, plus facile à calculer exactement, tel que celui des carrés ou des cubes C et D, faits sur deux droites homologues de A et de B. On a toujours, en effet, d'après l'analogie directe,

$$A:B=C:D;$$

car pouvant toujours disposer C et D, de telle sorte que les figures résultantes A+C et B+D soient semblables, directement ou inversement, il est évident que D se trouve avec B+D absolument comme C avec A+C, et qu'ainsi on a simultanément $C=(A+C)m$ et $D=(B+D)m$; d'où $A:B=C:D$.

XI. La génération *descriptive* de toute quantité géométrique suppose toujours un mouvement *continu* et la succession, non interrompue, de parties *variables*. La *continuité* est donc le caractère essentiel des lignes, des angles, des surfaces et des volumes ; et il faut y avoir égard, pour bien étudier la génération numérique de chaque genre de quantité. Or, comment peindre la continuité à la pensée et comment l'exprimer dans le calcul? Ce ne peut être qu'à l'aide des grandeurs *infinitésimales*, éléments générateurs *auxiliaires*, nécessairement *variables*.

Les *infiniment petits* ne servent pas seulement à exprimer la continuité, mais ils servent à rendre l'analogie plus évidente et plus complète, en faisant passer des lignes *brisées* aux lignes *courbes*, des surfaces *polyédrales* aux surfaces *courbes* et des *polyèdres* aux *corps ronds*. Comment, par exemple, sans les grandeurs infinitésimales, étendre aux lignes et aux surfaces courbes, les notions de similitude, acquises pour les lignes brisées et les surfaces polyédrales?

Il y a une grande analogie entre le cercle et les polygones réguliers ; mais l'analogie est certainement plus saillante et plus complète encore en disant que *le cercle est au fond le polygone régulier d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit* (dont par suite le *rayon* et l'*apothème* sont égaux).

Et l'on est amené à cette proposition, non-seulement en imaginant une suite illimitée de polygones réguliers *circonscrits*, de deux en deux fois plus de côtés ; mais surtout en déduisant l'aire du cercle de l'aire du polygone régulier circonscrit, à l'aide de la *règle des variables auxiliaires*, savoir :

Si une équation, toujours exacte, renferme des termes constants et des termes variables, ces derniers doivent en disparaître, absolument comme si leur ensemble était rigoureusement nul : autrement, un nombre constant serait *toujours* égal à un nombre variable ; chose absurde.

Ici les termes variables ne sont jamais *nuls*, mais ils peuvent devenir *infiniment petits*. On voit d'ailleurs comment la règle ci-dessus fournit le principe de la méthode des *limites*, de la méthode *infinitésimale* et de la méthode des *coefficients indéterminés* : ces trois méthodes rentrent, en effet, dans la méthode *analogique*, qu'elles rendent plus *directe ;* surtout la méthode infinitésimale, pour généraliser les définitions, pour découvrir les *propriétés* de la figure et en exprimer numériquement la *grandeur ;* pour passer, en un mot, du connu à l'inconnu, par le chemin le plus court et le plus clair.

XII. La règle des variables auxiliaires est employée, sous une autre forme, par différents auteurs, pour la théorie du mesurage, dans la géométrie élémentaire, où ils évitent ainsi plusieurs longues et obscures réductions à l'absurde. Ils auraient pu en éviter d'autres, notamment dans le mesurage des pyramides et des cônes, d'après l'expression numérique du prisme ; car ici la méthode des variables auxiliaires n'exige que des calculs fort élémentaires, où les grandeurs infinitésimales sont d'ailleurs déguisées.

Concevant en effet, la hauteur h, de la pyramide ou du cône P, divisée en n parties égales à x, par des plans parallèles à la base b, d'où $h=nx$; ces plans diviseront P en n tranches, toutes de même épaisseur variable x. Il est facile de voir que la v ième de ces tranches, à partir du sommet, étant désignée par T, on aura successivement, a et c désignant ses deux bases :

$$ah^2=bx^2v\ ,\ ch^2=bx^2(v-1)^2,\ \mathrm{T}=ax-<x(a-c)\ ,$$
$$\mathrm{T}h^2=bx^3v^2-<bx^3[v^2-(v-1)^2].$$ Or, on a

$v^3=\frac{1}{3}[v^3-(v-1)^3]+<[v^2-(v-1)^2]$; donc

$Th^2=\frac{1}{3}bx^3[v^3-(v-1)^3]-<bx^3[v^2-(v-1)^2]$,

$Ph^2=\frac{1}{3}bx^3n^3-<bx^3n^2$ et $P=\frac{1}{3}bh-<bx$.

Or, les nombres P et $\frac{1}{3}bh$ sont constants, tandis que x est essentiellement variable avec n, sans que la dernière équation cesse d'être exacte, comme conséquence rigoureuse de la division de P en tranches. Si donc le terme variable $<bx$ devait être conservé dans cette équation, le nombre constant P serait *toujours* égal au nombre variable $\frac{1}{3}bh-<bx$; chose évidemment absurde. Donc le terme variable doit disparaître de l'équation finale, absolument comme s'il était rigoureusement *nul ;* de sorte qu'on aura toujours $P=\frac{1}{3}bh$.

La règle d'analogie directe exigeant l'expression de la pyramide, sixième d'un cube, ne fournit guère plus simplement la formule $P=\frac{1}{3}bh$, où les unités sont sous-entendues. On voit donc quel parti utile on peut tirer de la règle des variables auxiliaires, en géométrie ; surtout si on simplifie d'abord l'expression de la v ième tranche T, en y supprimant les termes qui seront multipliés par la variable x, dans l'équation finale ; d'où ils doivent disparaître, absolument comme s'ils étaient rigoureusement *nuls :* car ce sont des *zéros relatifs* aux nombres constants, en vertu de la règle des variables auxiliaires.

Cette simplification est précisément la *méthode infinitésimale*, où la partie x est supposée *infiniment petite*, n étant *infini*, et où par suite la v ième tranche T est regardée comme un prisme et la somme Sn^2, comme rigoureusement égale à $\frac{1}{3}n^3$.

En général, *tout nombre doit se négliger et être regardé comme nul vis-à-vis de celui qui le contient une infinité de fois ;* car il ne saurait augmenter ni diminuer ce dernier, en vertu de la règle des variables auxiliaires. C'est pourquoi l'on a $Sn^2=\frac{1}{3}n^3$, $Sn=\frac{1}{2}n^2$, $Sn^3=\frac{1}{4}n^4$, etc.

XIII. On évite l'emploi *explicite* des grandeurs infinitésimales quand l'analogie directe est clairement indiquée par les définitions générales, comme pour trouver les expressions des aires et des volumes dans les corps ronds ; car alors la *règle* d'analogie directe est immédiatement applicable. Comme aussi pour passer de la *projection* d'une droite, *inscrite* dans une figure plane, à la projection de même nature, de cette figure ; pour passer de l'aire du *cercle* et du volume de la *sphère* à l'aire de l'*ellipse* et au volume de l'*ellipsoïde ;* de l'aire de l'*ellipse* à l'aire limitée par la courbe, *lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires, menées sur les tangentes à l'ellipse, soit du centre, soit d'un sommet ;* etc.

Dans ces différentes recherches, les quantités infinitésimales ne sont pas mentionnées; mais elles n'en sont pas moins employées *implicitement*, pour généraliser les définitions et regarder, par exemple, le *cylindre* comme un *prisme* d'une *infinité* de faces latérales, *infiniment étroites*. Il est d'ailleurs une foule de recherches numériques où les infiniment petits se présentent inévitablement, pour rendre l'analogie plus saillante et faire découvrir les deux genres de *génération*.

C'est ainsi que, par le centre et un diamètre $2r$ de la base du cylindre circulaire droit, si on mène un plan quelconque et qu'on désigne par t l'aire de la plus grande section triangulaire de l'*onglet* résultant, on trouve, avec facilité, $\frac{4}{3}rt$ et $4t$, pour son *volume* et sa *surface courbe;* expressions très-simples et d'autant plus remarquables, qu'elles sont indépendantes du nombre π, contrairement à ce qu'on aurait cru prévoir. C'est aussi par des cylindres droits, de hauteurs égales et infiniment petites, que l'on calcule, avec facilité, le volume du *segment sphérique;* etc.

XIV. La géométrie étant l'une des sciences les plus utiles, on doit chercher tous les moyens d'en simplifier l'étude, afin de la rendre accessible au plus grand nombre, sans toutefois lui rien faire perdre de la grande exactitude qui caractérise si éminemment ses déductions. Or, c'est par l'*analogie directe* que l'on peut y parvenir; ainsi que nous avons tâché de le prouver, dans ce qui précède; et c'est pour mettre ce fait plus complétement en évidence, s'il est possible, que nous revenons encore sur la théorie des parallèles, dont la proposition, qui lui sert de base, est déja démontrée plus haut, d'après l'analogie directe.

Mais avant, observons que pour simplifier l'étude de la géométrie, il faut d'abord examiner si les définitions que l'on y pose, d'après l'analogie, sont claires, simples, précises et complètes: sinon, il faut les perfectionner et tâcher de leur faire acquérir ces qualités essentielles; chose très-possible, pour les lignes courbes, les rapports et les incommensurables, aussi bien que pour les angles. Si toutes les définitions sont de véritables axiomes, c'est-à-dire ont les caractères de simplicité et d'une complète évidence, et que cependant elles soient insuffisantes pour démontrer clairement, simplement et rigoureusement certaines propositions; alors, mais seulement alors, il faut chercher à les déduire de quelque vérité, assez claire, pour qu'on puisse la ranger parmi les axiomes et la regarder comme fondamentale, dans la science.

Telle n'a pas été la méthode suivie dans la plupart des traités de géométrie, où la théorie des parallèles laisse encore à désirer, malgré les efforts de beaucoup d'auteurs pour mettre cette théorie fondamentale à l'abri de tout reproche.

On connaît les travaux de Legendre et de plusieurs autres géomètres sur ce sujet : presque tous sont entraînés à de longues démonstrations, sans pouvoir leur donner toute la clarté et toute l'exactitude désirables.

Bertrand de Genève a bien vu le premier que la nature *infinie* de l'angle doit entrer en considération ; mais l'usage qu'il en fait, dans la théorie ci-dessus, bien que propre à l'éclaircir et à lui donner une grande exactitude, ne paraît pas entièrement exempt de difficulté, à plusieurs géomètres ; même à ceux qui regardent sa théorie des parallèles comme l'une des plus claires. C'est qu'en effet la définition de l'*angle* y est incomplète, aussi bien que la définition généralement admise.

En présence de ces difficultés, plusieurs auteurs modernes, au lieu de chercher à perfectionner les définitions, seul moyen d'éclaircir les théories, se sont attachés à simplifier le *postulatum* d'Euclide, en le remplaçant par d'autres, plus faciles à accorder.

XV. Parmi les propositions qui peuvent servir de base à la théorie des parallèles, Lacroix et différents auteurs, après lui, regardent la suivante comme ayant toute l'évidence désirable, savoir : *l'oblique et la perpendiculaire à une même droite, dans le même plan, finissent toujours par se couper, étant suffisamment prolongées.*

On a vainement essayé de démontrer cette proposition fondamentale, d'après les définitions admises : la logique est impuissante et refuse le service pour y parvenir. Aussi n'est-ce qu'en désespoir de cause, et pour simplifier le plus possible, qu'on a rangé la proposition ci-dessus parmi les *axiomes :* elle en a d'ailleurs les caractères ; et plusieurs auteurs motivent le choix qu'ils en ont fait, par des considérations de nature à satisfaire les esprits les plus exacts et les plus rigoureux.

D'après Lacroix, l'oblique et la perpendiculaire doivent non-seulement se couper ; mais la notion de la ligne droite ou la sensation par laquelle on voit si un alignement est bien pris, montre même l'endroit où doit se faire l'intersection.

Toutes les vérités de la Géométrie, dit M. Nicollet, sont conditionnelles et subordonnées à l'adoption de quelques axiomes ; par conséquent, nous ne voyons ni difficulté ni contradiction, à en

compter un de plus, quand la vérité dont il est l'expression en a tout le caractère, comme la proposition ci-dessus.

Néanmoins, les géomètres qui tiennent à faire de leur science, une pure science de déductions logiques, pensent qu'il faut, pour cet effet, emprunter le moins qu'il se puisse au témoignage des sens et que, par suite, il faut réduire au plus petit nombre possible les axiomes et surtout les *demandes*, en géométrie. De sorte qu'ils regardent comme une légère imperfection de la science qui n'en devrait connaître aucune, l'impossibilité où ils sont de démontrer la proposition ci-dessus, de manière à satisfaire tout le monde.

Or, à quoi tient cette impossibilité? Ne vient-elle pas de ce qu'un angle *droit* et un angle *aigu*, c'est-à-dire la position *perpendiculaire* et la position *oblique*, étant les éléments essentiels de la démonstration, on n'y fait point assez intervenir la double propriété *caractéristique* de l'angle : d'avoir ses côtés *illimités* dans un sens et d'exprimer la *position*, plus ou moins *éloignée*, plus ou moins *écartée*, plus ou moins *ouverte*, d'un côté à l'égard de l'autre? N'est-ce pas, en un mot, parce que la définition admise de l'angle ne fait point assez connaître cette double propriété?

La méthode analogique des proportions et la discussion de l'expression résultante démontrent, très-clairement et très-exactement, la proposition ci-dessus, ainsi que plusieurs autres, tout aussi fondamentales, comme on l'a vu plus haut; mais la véritable notion de l'angle conduit aussi très-rigoureusement et plus directement encore au postulatum d'Euclide.

XVI. L'*angle* est bien une portion plane *infinie*, comprise entre ses deux côtés; mais c'est aussi la *position*, plus ou moins *ouverte*, d'un côté à l'égard de l'autre; et c'est uniquement cette position, *oblique* ou *perpendiculaire*, que l'on considère dans chaque angle. De sorte que la *grandeur* de l'angle dépend, non de la longueur *illimitée* de ses côtés, mais seulement de leur *ouverture*, de leur *écartement*; et l'angle est d'autant plus *grand* qu'il est plus *ouvert*.

Telle est, je pense, la véritable notion de l'angle : il en résulte que l'*espace angulaire* autour de chaque point du plan *infini* est absolument le même, quel que soit ce point. *Tous les angles droits sont donc égaux entre eux*, comme étant chacun le quart de l'espace angulaire autour de chaque point du plan infini; c'est-à-dire que chaque angle droit est au fond le quart du plan.

Maintenant, considérons deux droites coupant une même troisième, dans le plan, et supposons que l'un des angles *externes* A

soit plus grand que l'angle *interne* B, *correspondant*. Ces deux angles ont leurs premiers côtés sur la troisième droite, tandis que le second côté de A est en partie dans l'angle B ; or il doit couper nécessairement le second côté de B. Car s'il en était autrement, c'est-à-dire si le second côté de A était contenu entièrement dans l'angle B ; l'angle A ne serait évidemment pas plus ouvert ni plus grand que l'angle B, contrairement à l'hypothèse. Donc les seconds côtés de A et de B finiront toujours par se couper ; c'est-à-dire que, *dans le même plan, si deux droites rencontrent une même troisième, de telle sorte qu'un angle externe soit plus grand que l'angle interne, correspondant, ces deux droites finissent toujours par se couper, étant suffisamment prolongées.*

Tel est le postulatum d'Euclide, base de la théorie des parallèles, la plus simple et la plus complète. Ce postulatum me paraît démontré clairement et rigoureusement ; mais on peut encore procéder comme il suit : Soit placé l'angle B dans l'angle A plus grand, de telle sorte qu'ils aient un côté et le sommet communs ; il est clair que si l'on fait ensuite glisser l'angle B, dans sa nouvelle position, sur le côté fixe prolongé de l'angle A, jusqu'à ce que B soit revenu dans sa position primitive ; le second côté de B ne pouvant coïncider un seul instant avec le second de A, ces deux seconds côtés se couperont dans une infinité de positions consécutives de B, bien que leur intersection unique s'éloigne de plus en plus du sommet d'abord commun. Et comme l'analogie est complète entre toutes les positions de B à l'égard de A, il n'y a point de raison pour que les deux seconds côtés cessent de se rencontrer : donc ils se couperont toujours ; ce qu'il fallait démontrer.

Pour appliquer, plus immédiatement encore, l'analogie directe, menons les deux droites AN et BP, se coupant en un point C et coupant la droite ABM en A et B : l'angle *externe* PBM sort d l'angle *interne* NAM, correspondant ; *il est donc plus ouvert et plus grand que ce dernier.* Faisant glisser sur MA l'angle PBM, de telle sorte que le sommet B soit en un point D de AB, que le côté BP coupe AN en un point I et qu'on ait l'angle IDM=PBM : il est clair alors que les deux angles A et IDM, qu'il faut tracer aux extrémités de AD, pour avoir DI, il faut aussi les tracer aux extrémités de AB, pour avoir BC ; donc BC *se trouve avec* AB, *absolument comme* DI *avec* AD ; car ici les angles sont des éléments générateurs auxiliaires, qui ne sauraient entrer dans le résultat de la génération. Si donc $DI=AD\times n$, on aura aussi nécessairement $BC=AB\times n$:

cela donne BC:AB=DI:AD et par conséquent, on aura toujours

$$BC=AB\times(DI:AD).$$

Cela posé, l'angle MBP ou MDI restant invariable, aussi bien que les longueurs AB et AI, supposons que l'angle A ou MAN croisse, depuis zéro jusqu'à deux droits ; il est clair alors que AD diminue et passe par l'*infiniment petit* et le *zéro absolu*, avant de devenir *négative ;* et comme DI augmente jusqu'à AI, puis diminue, on voit que BC croît et passe par l'*infiniment grand*, puis par la *non-existence*, qu'indique AB(AI:0), avant de devenir *négative*.

Ainsi *les deux droites* AN *et* BP *se coupent*, *tant que les deux angles interne-externe* NAM *et* PBM *sont inégaux*. Mais si ces deux angles sont égaux, ce qui n'a lieu que dans le seul cas de AD=0, la longueur BC est impossible, aussi bien que l'intersection C ; donc *les deux droites* AN *et* BP, *toujours dans le même plan*, *sont parallèles*, *dès que deux angles interne-externe sont égaux.*

On a donc cette proposition fondamentale *: par un point donné* A, *on peut toujours mener une parallèle à la droite tracée* BP, *mais on ne peut en mener qu'une seule.*

XVII. Ces développements suffisent sans doute pour bien mettre en évidence l'utilité de la *discussion* des formules et surtout les ressources qu'offre l'analogie directe, pour établir clairement les propositions fondamentales de la géométrie. En voici encore des exemples, à remarquer :

1° Dans le triangle ABC, l'angle C se détermine entièrement par les deux autres A et B, en les traçant aux extrémités du côté AB ; et cela, quelle que soit la longueur de ce côté. De sorte que l'angle C ne dépend aucunement de cette longueur. De même, dans le triangle A'B'C', l'angle C' est déterminé entièrement par les deux autres A' et B', tracés aux extrémités du côté A'B'. Il est donc évident que l'angle C' se trouve avec les deux A' et B' absolument comme l'angle C avec les deux A et B. Si donc l'angle A=A' et l'angle B=B' ; le troisième angle C est nécessairement égal au troisième C', *et les deux triangles sont équiangles entre eux.*

D'ailleurs, puisque les deux angles C et C' ne dépendent aucunement des longueurs AB et A'B', ils ne sauraient changer lorsqu'on suppose AB=A'B' ; et comme déjà l'angle A=A' et l'angle B=B', on voit que les deux triangles ABC et A'B'C' sont égaux et qu'ainsi l'angle C=C'. Donc puisque l'hypothèse AB=A'B' ne change point les angles C et C', il s'ensuit qu'avant cette hypothèse on avait déjà C=C'.

2° A cause de l'angle A=A′ et de l'angle B=B′, on voit que AC ou BC se trouve avec AB absolument comme A′C′ ou B′C′ avec A′B′ : donc on aura toujours

$$AC:A'C'=AB:A'B'=BC:B'C'.$$

Et puisque les côtés opposés aux angles égaux sont dits côtés *homologues*, on voit que, *dans deux triangles équiangles, les côtés homologues sont proportionnels :* les deux triangles sont donc *semblables* en tout, et l'un *représente* complètement l'autre ; vu d'ailleurs qu'ils sont égaux dès que AB=A′B′.

3° Il suit de 1° que la hauteur AD, menée du sommet de l'angle droit A, dans le triangle rectangle ABC, le divise en deux triangles ABD, ACD, équiangles avec lui et entre eux ; de sorte que, dans tout triangle rectangle, la somme des deux angles aigus donne précisément l'angle droit A, et que par suite, *dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles est toujours égale à deux angles droits* (ce qui montre comment deux angles déterminent le 3ᵐᵉ).

4° Les trois triangles semblables ABC, ABD et ACD, donnent, en vertu de 2°, les quatre analogies :

$$BD:AB=AB:BC,\ CD:AC=AC:BC,$$
$$BD:AD=AD:CD \text{ et } BC:AB=AC:AD.$$

Telles sont les proportions entre les côtés et la hauteur, menée de l'angle droit, de tout triangle rectangle. Ces propriétés et leurs réciproques, faciles à énoncer et à retenir, sont fondamentales, non-seulement dans la géométrie *graphique*, mais aussi dans la géométrie *numérique*, après avoir réduit, en *nombres abstraits*, les quatre termes de chaque proportion.

5° Soient a, b, c et h les *rapports*, à la même *unité linéaire* u, des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C et de la hauteur AD : a, b, c et h sont donc des nombres abstraits, exprimables ou inexprimables en chiffres, et l'on a, par exemple, $BC=u\times a$ ou $BC:u=a$. Et comme l'unité u est invariable et bien connue, on la *sous-entend* toujours, comme *diviseur* de BC, et l'on a simplement $BC=a$. Dans ce cas, le rapport a est dit la *mesure* ou la *valeur numérique* de BC et en *représente* la *longueur ;* tandis que cette droite, censée divisée par u, s'appelle *droite numérique :* alors BC^2 ou a^2 en indique le *carré numérique.*

Cela posé, regardant tous les termes des quatre proportions précédentes, comme divisés chacun par l'unité linéaire u, sous-entendue ; ce qui revient à remplacer tous ces termes par leurs valeurs numériques a, b, c, h ; il est clair que ces proportions ne

sont pas détruites et sont alors *numériques* ou entre nombres abstraits, *rationnels* ou *irrationnels*. On a donc simultanément

$$AB^2=BD\times BC,\ AC^2=CD\times BC,$$
$$AD^2=BD\times CD \text{ et } BC\times AD=AB\times AC.$$

6° Voilà déjà quatre *relations* entre les *droites numériques* dans tout triangle rectangle. Ces relations importantes, faciles à retenir et à énoncer, fournissent toutes les relations numériques, qui résultent de la comparaison des longueurs, dans la géométrie plane, et cela, à l'aide des propriétés de triangles équiangles et d'une autre relation, non moins utile, déduites immédiatement des deux premières, savoir :

$$BC(BD+CD) \text{ ou } BC^2=AB^2+AC^2.$$

Cette relation est satisfaite, comme on sait, par une foule de systèmes de *nombres entiers*, dont voici le plus simple : $BC=5$, $AB=4$ et $AC=3$.

7° Réciproquement, si l'on introduit l'unité superficielle s devant chaque terme, comme multiplicande, et qu'on ait égard aux expressions numériques du carré et du rectangle, on aura cinq autres relations entre des rectangles et des carrés réels; et l'on voit, par la dernière, que *dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse vaut la somme des carrés faits sur les deux autres côtés.*

D'après l'égalité et l'équivalence des figures, ce théorème remarquable et ses corollaires se démontrent directement sur une figure tracée. Cela peut paraitre plus clair, mais est moins simple, en réalité, que l'emploi ci-dessus des *droites numériques*. On a, par ce théorème et ses corollaires, cinq relations entre surfaces *rectangulaires;* et si on y remplace les rectangles et les carrés par les expressions de leurs *aires;* la suppression de s, dans tous les termes, reproduit les relations, établies plus haut.

8° On voit clairement, par les considérations précédentes, comment on passe de la géométrie *graphique* à la géométrie *numérique*, et réciproquement. Si nous insistons sur ce sujet, c'est qu'il est souvent fort négligé dans les traités élémentaires, où faute des développements nécessaires, les utiles propositions qu'il fournit ne sont pas toujours clairement saisies; de sorte que les élèves se trouvent ainsi arrêtés dans une étude importante.

Pour la leur rendre facile, il faut des notions clairement développées et des démonstrations bien choisies; il faut surtout éviter la multiplication, terme à terme, de deux proportions entre *quantités continues*. Car cette multiplication, trop souvent employée, n'offre

aucun sens, si l'on n'a d'abord remplacé les différents termes par leurs *valeurs numériques*, ou du moins si on n'a pas d'abord averti que cette *transformation* est supposée, pour rendre *numérique* chaque proportion, afin que chaque multiplicateur soit un nombre abstrait. On évite d'ailleurs ce mode de démonstration en observant que, *dans chaque proportion, un antécédent est toujours le produit de son conséquent par la valeur indiquée de l'autre rapport;* ce qui est beaucoup plus simple.

9° La théorie du mesurage conduit immédiatement aux propositions sur l'équivalence des figures, et s'appuie même sur quelques-unes de ces propositions. Mais la transformation de certaines figures en d'autres équivalentes, exige parfois l'absence de tout mesurage; comme dans les arts et métiers, où l'on doit opérer sur les *corps matériels*, non par la *fonte*, mais par leur *division* en parties, afin de leur donner d'autres *formes*, sans altérer notablement la quantité de matière de chacun. Alors il faut transformer par simple *transposition de parties;* comme pour faire un *rectangle* avec un *triangle*, un *parallélogramme*, un *trapèze* ou un *quadrilatère* d'acajou, et réciproquement (lesquels au fond ne sont que des *prismes*). Ce genre de transformation, pour simplifier les figures est à peine indiqué dans les traités élémentaires; mais il doit y figurer, du moins comme exercice, parce qu'il donne lieu à d'utiles et à de curieux problèmes, non-seulement propres à simplifier les figures, mais à diminuer le *contour* ou la *limite* de chacune, sans altérer l'étendue de cette figure. Il en résulte plusieurs théorèmes remarquables, rentrant dans la proposition générale que voici et dans sa réciproque, savoir : *De deux figures planes équivalentes, la plus régulière a toujours le moindre périmètre, et réciproquement.*

De sorte que pour enfermer la plus grande étendue superficielle avec un contour de 100 mètres, par exemple, il faut que la figure plane soit un polygone régulier, savoir : un triangle équilatéral, un carré, un pentagone régulier, un hexagone régulier, etc.

En calculant les aires de ces figures successives, on les voit croître avec les nombres de côtés, le contour 100 restant invariable; et l'on arrive à conclure que *le cercle est plus grand que toute figure plane isopérimètre.*

XVIII. La géométrie est à la fois *graphique* et *numérique;* car la connaissance complète d'une figure définie en exige à la fois le *tracé* et la *mesure*, pour avoir clairement sa *forme* et sa *grandeur*. Aussi l'emploi des signes de l'algèbre devient-il indispensable en géométrie,

non-seulement pour résoudre les problèmes numériques, mais pour simplifier la résolution des problèmes graphiques, en faisant découvrir les expressions les plus faciles à *construire* sur le papier, avec la règle et le compas.

Le *Calcul analytique* étant l'un des auxiliaires les plus efficaces, dans les recherches mathématiques, pour les déductions logiques que ces recherches exigent, il ne faut pas rejeter l'emploi de l'algèbre, en géométrie, afin de ne faire que de la *géométrie pur;* car ce serait se priver d'un utile secours et compliquer inutilement les déductions, où souvent l'algèbre est inévitable et où l'on ferait alors de l'algèbre *parlée.* D'ailleurs la solution n'en est pas moins *géométrique* lorsqu'elle est amenée par les signes de l'algèbre; lesquels se présentent naturellement pour simplifier les raisonnements.

Il importe que les premières notions de la *construction des valeurs* soient développées dans les traités élémentaires de géométrie, en y indiquant les moyens de rendre les expressions *homogènes*, si elles ne le sont pas, et de les ramener aux équations fondamentales, où x est la droite numérique inconnue, savoir : $ax=bc$, $ax=b^2$, $x^2=ac$, $x^2=(a+c)(a-c)$, $x^2=a^2+b^2$, etc. Dans ces équations, la droite inconnue x se détermine, sur le papier, à l'aide des propriétés du cercle et de certains triangles, par des *quatrièmes*, des *troisièmes*, des *moyennes proportionnelles* et par le tracé d'un triangle rectangle, dont deux côtés sont donnés, etc.

La construction des longueurs rectilignes, au moyen de la règle et du compas, ne peut avoir l'exactitude fournie par le calcul de ces longueurs, même lorsque l'expression est très-simple et que l'on fait servir les lignes déjà décrites à en déterminer d'autres ; mais dans les arts, où il faut des tracés, dans ceux surtout qui dépendent de l'architecture, la construction des valeurs est la seule que l'on puisse employer, et elle est nécessaire pour réaliser les solutions de différents problèmes importants.

Par exemple, *s'il faut couper en deux parties équivalentes, une feuille de cuivre, triangulaire ou quadrangulaire, ayant partout la même épaisseur, la section devant être parallèle à un côté ou être la plus petite possible;* le compas et la règle, ou les instruments qui en tiennent lieu, sont indispensables pour déterminer la position de la section rectiligne ou plane cherchée.

On sait d'ailleurs que le calcul est nécessaire pour diriger les opérations sur le terrain, lesquelles sont parfois simplifiées et rendues plus exactes, par la théorie des *transversales rectilignes*, à défaut de la Trigonométrie.

XIX. Nous pensons avoir bien prouvé que toutes les méthodes mathématiques sont nécessairement *analogiques ;* et non-seulement, en géométrie, les démonstrations, d'après l'*analogie directe*, sont très-claires et très-simples, mais elles fournissent toujours des vérités complètement certaines.

D'abord *tous* les éléments de la démonstration sont clairement indiqués par les définitions générales et clairement définis eux-mêmes ; il n'existe donc point de cause étrangère qui puisse modifier la conclusion. D'un autre côté, en Algèbre, comme en Géométrie, chaque bonne définition générale crée, en quelque sorte, le type des choses définies et en fait connaître parfaitement tous les éléments générateurs ; on n'a donc pas à craindre que la vérité, déduite de toute combinaison *logique* de ces éléments, puisse être modifiée par des causes ignorées ; cette vérité est donc complètement certaine. Enfin, comme la définition complète rend presqu'identiques tous les objets qui y sont renfermés, en leur donnant une origine et une existence communes ; on voit que tous ces objets jouissent nécessairement des mêmes propriétés générales. Donc *la proposition démontrée pour l'un d'eux, l'est nécessairement aussi pour tous les autres et leur est immédiatement applicable.*

Telle est précisément la *règle d'analogie directe*, par laquelle les traités élémentaires de géométrie peuvent recevoir le plus haut degré de clarté et de simplicité ; et cela, parce que cette règle peut servir à découvrir et à démontrer, clairement et rigoureusement, toutes les propositions fondamentales de cette science, d'après les définitions, ainsi qu'on l'a établi.

Il ne faut pas confondre l'analogie directe, l'analogie *Mathématique*, toujours complète et rendue évidente, par les premières notions, avec l'analogie qui régit les sciences naturelles, où souvent elle est peu sensible et reste même inaperçue. Dans les sciences d'observations ; en Physique et en Chimie, par exemple, on ne connaît bien parfois que quelques-unes des causes génératrices du phénomène dont on veut étudier la loi ou en donner l'explication : on ne peut alors affirmer, avec certitude, que d'autres causes cachées ne viendront pas détruire l'explication et la conséquence que l'on en déduit, ou du moins les modifier en quelque point. Ici donc l'analogie, bien que toujours utile, pour découvrir la vérité, n'est pas toujours suffisante, pour l'établir complètement. Par suite, on doit mettre beaucoup de circonspection à conclure, d'après les indications de l'analogie, dans les sciences naturelles ; vu qu'ici l'analogie

pouvant être incomplète, sans qu'on le sache, on peut ne pas bien connaître alors tous les éléments du raisonnement qu'il faudrait effectuer, pour arriver à une vérité certaine.

Il en est tout autrement en mathématique où l'analogie est toujours complète et clairement indiquée, par les définitions, et où l'on connaît parfaitement tous les éléments du raisonnement : non seulement on peut y démontrer, *par analogie*, mais on le doit, pour plus de clarté et plus de simplicité ; ainsi qu'il est prouvé par les exemples que nous avons considérés plus haut. En voici d'autres encore pour cet objet.

1° La *circonférence* et l'*ellipse* sont comprises dans la même définition générale, puisque la première n'est que la seconde dont les deux axes sont devenus égaux ; ainsi pour passer, avec facilité, du connu à l'inconnu, il faut, à l'aide de la méthode *analogique* des *projections*, faites toutes *perpendiculairement* ou toutes *obliquement* à un plan donné, passer des propriétés de la circonférence aux propriétés analogues de l'ellipse. Or, on peut toujours disposer l'ellipse, par rapport au plan, de telle sorte que son grand axe $2a$, son *aire* E, un *secteur* ou un *segment* S' elliptique et le polygone P', *inscrit* ou *circonscrit*, aient pour projections respectives, sur le plan, le petit axe $2b$, l'*aire* du cercle πb^2, un *secteur* ou un *segment* S circulaire et le polygone P, *inscrit* ou *circonscrit*. En vertu de l'analogie directe, il est évident que πb^2 se trouve avec E absolument comme $2b$ avec $2a$, et qu'ainsi $\pi b^2 : E = 2b : 2a$; d'où $E = \pi ab$. On verra de même que $bS' = aS$ et $bP' = aP$. Cette dernière relation fournit des propositions de *maximum* et de *minimum*, difficiles à découvrir et à démontrer autrement.

2° Pour passer immédiatement du volume de la sphère au volume de l'ellipsoïde, dont a, b, c sont les demi-axes principaux, on observe que ce volume E et celui du parallélipipède rectangle, mesuré par le produit abc, sont déterminés complètement dès que a, b, c sont donnés, de *grandeur* chacun et de *position ;* le rapport R, dans $E = abcR$, est donc aussi déterminé entièrement. Et comme ce rapport, nombre abstrait, ne dépend aucunement de a ni b ni c, il ne change point quand on suppose $c = b = a$, pour avoir le volume de la sphère, mesuré alors par $aaa \times \frac{4}{3}\pi$, comme on sait ; donc, puisque R n'a pas changé, on avait d'abord $R = \frac{4}{3}\pi$ et $E = \frac{4}{3}\pi abc$; ce qu'il fallait trouver.

XX. La théorie du mesurage des volumes, traitée par différentes méthodes, a toujours présenté des longueurs et même de sérieuses

difficultés, pour passer du *commensurable* à l'*incommensurable*, c'est-à-dire des *polyèdres* aux *corps ronds;* et ces difficultés ne peuvent être complètement résolues, pensons-nous, que par l'*analogie directe*, rendue bien explicite dans les définitions et dans les démonstrations. Cette théorie, pour acquérir le plus haut degré de clarté et de simplicité, nous paraît donc devoir être établie comme il suit :

1° Tout prisme ou tout cylindre P est déterminé complètement et peut se construire lorsque sa base b et sa hauteur h, menée d'une extrémité de l'arête latérale a, sont données de grandeur et de position fixes. Car l'arête a étant ainsi déterminée, il est clair que si on la fait glisser, parallèlement à elle-même, sur le contour de la base b, elle engendre la surface latérale de P et par conséquent ce prisme ou ce cylindre lui-même.

De plus, il est évident que P se *construit* et se *mesure* avec sa base b et sa hauteur h, absolument comme le *prisme droit* P' se *construit* et se *mesure* avec sa base b' et sa hauteur h', aussi données de grandeur et de position. Or, les unités v, s et u étant sous-entendues, on a vu plus haut que $P'=b'h'$; donc en vertu de l'analogie complète, il faut aussi que $P=bh$.

2° Soient N et N' deux pyramides quelconques : elles sont déterminées entièrement chacune dès que la base et la hauteur sont données de grandeur et de position fixes. Faisant glisser parallèlement à elle-même, chacune des arêtes latérales a et a' de N et de N', sur les contours des bases de ces pyramides, on forme les deux prismes P et P', ayant respectivement mêmes bases et mêmes hauteurs que N et N'. Non-seulement les deux prismes P et P' sont ainsi déterminés entièrement, au moyen des deux pyramides N et N' ; mais il est évident que P' se trouve avec N' absolument comme P avec N. Si donc $P=Nx$, x étant un rapport inconnu, on a aussi nécessairement $P'=N'x$; d'où $N:N'=P:P'$.

La comparaison des pyramides étant ainsi ramenée à la comparaison plus facile des prismes, supposons que N' soit l'une des six pyramides régulières égales, composant le cube 2P', d'où $N'=\frac{1}{3}P'$: il est clair, par la proportion ci-dessus, qu'on aura $N=\frac{1}{3}P=\frac{1}{3}bh$, N étant une *pyramide* ou un *cône* quelconque et par conséquent P un *prisme* ou un *cylindre*, de même base et de même hauteur.

Je ne pense pas que le théorème $N=\frac{1}{3}bh$ puisse être amené et démontré plus clairement, plus simplement, ni plus exactement.

Non-seulement l'analogie directe conduit immédiatement aux ex-

pressions numériques de toutes les quantités définies dans les éléments de géométrie; mais elle fait découvrir les formules les plus générales à cet effet; ainsi qu'on l'a vu plus haut pour $G=bh:(1+m)$ et pour la comparaison des figures semblables ou inversement semblables, etc.

Prenons encore une application générale, et considérons deux polyèdres convexes, limités par le même nombre de faces semblables chacune à chacune; je dis que *ces deux polyèdres ont les coins homologues égaux.*

D'abord les faces homologues étant semblables, sont proportionnelles. Soient donc F et F′ deux faces homologues semblables; S et S′ les sommes respectives des faces, ayant respectivement chacune un côté commun avec F et F′. A cause de la proportionnalité des faces homologues, on a

$$S:S'=F:F' \text{ ou } S:F=S':F'.$$

On voit que S′ s'obtient avec F′ absolument comme S avec F; il faut donc pour cela, que les coins adjacens à F′ soient respectivement égaux aux coins adjacents à F. Et comme les faces homologues F et F′ sont quelconques, on voit ainsi que dans deux polyèdres convexes, la *similitude* ou l'*égalité* des faces, qui se correspondent, entraîne l'égalité des coins homologues et par conséquent les deux genres de *similitude* ou d'*égalité* des deux polyèdres proposés. Réciproquement, *l'égalité des coins homologues entraîne la proportionnalité des faces qui se correspondent;* etc.

Enfin, par ce *Résumé* des méthodes élémentaires (lequel est devenu presqu'un traité de Géométrie), on voit que la *règle d'analogie directe* est fondamentale, en Mathématique, pour passer, le plus clairement et le plus simplement possible, du connu à l'inconnu et établir la génération *numérique* des grandeurs. On voit en outre que les méthodes de calcul sont nécessaires, à cet effet, souvent comme *auxiliaires*, pour rendre l'analogie plus évidente et plus complète. Telle est en particulier la méthode *infinitésimale*, souvent inévitable et où l'on ne parvient tout au plus, qu'à masquer, par des *variables auxiliaires*, les nombres *infiniment grands* et les nombres *infiniment petits*, nécessairement *auxiliaires* eux-mêmes.

C'est que les quantités *infinitésimales* se présentent toujours pour exprimer clairement la *continuité* de certaines *fonctions* et en étudier les propriétés. Ces propriétés peuvent sans doute s'établir sans faire mention des *infiniment petits;* mais ces éléments auxiliaires se retrouvent toujours au fond des raisonnements, quand on veut pénétrer plus avant dans l'analyse logique de la vérité à établir. Pour

bien concevoir, par exemple, comment une quantité *variable* est *continuement* croissante, depuis zéro jusqu'à telle grandeur G assignée on voudra, il faut la regarder comme passant successivement par tous les états possibles de grandeur, pour arriver à l'état G. De plus, le nombre de tous ces états possibles, entre les deux extrêmes 0 et G, est si grand qu'il surpasse le plus grand nombre imaginable : il existe nécessairement, bien qu'il reste toujours *inconnu* et soit par conséquent *variable*. Or, ce nombre doit recevoir un nom, pour le distinguer dans le discours et rendre celui-ci plus clair et plus intelligible : il doit être désigné par un signe, dans le calcul, pour en faciliter les transformations et les déductions logiques. C'est pourquoi, le nombre de tous les états possibles de grandeur, entre 0 et G, s'appelle *infiniment grand* ou simplement *infini;* et on le désigne par une lettre ou par ∞.

De même, la différence entre deux états de grandeur, immédiatement consécutifs, est si petite qu'elle échappe aux sens et même à l'imagination : cette différence existe nécessairement, bien qu'elle reste toujours *inconnue* et *variable*. C'est pourquoi on l'appelle *infiniment petite ;* et on la désigne par $1:\infty$ ou par une simple lettre, dans le calcul, ici employé auxiliairement, comme presque toujours.

Lorsque le rapport $\sqrt{3}$ de A à B entre dans les déductions ; non-seulement on raisonne sur un nombre réellement *inconnu*, puisque $\sqrt{3}$ est une fraction, dont les deux termes ont une infinité de chiffres chacun, et que cette fraction ne peut se calculer que d'une manière aussi approchée qu'on le veut ; mais on raisonne sur les deux termes *infinis* et sur la *mesure commune* de A et B ; laquelle est nécessairement *infiniment petite* et que l'on doit employer *explicitement*, en la désignant par une lettre, pour la clarté et la simplicité, quand on veut établir la proportion, dont A:B est le premier rapport, et pénétrer ainsi le plus avant possible dans la génération des rapports inconnus.

XVI. — *Monographie des* Clivina *et genres voisins, précédée d'un tableau synoptique des genres de la tribu des* Scaritides.

Par M. J. PUTZEYS.

—

Les Scaritides forment parmi les carabiques une division bien naturelle qui se distingue par la réunion des trois caractères suivans : l'abdomen est séparé du corselet par un prolongement étroit en forme de col ; les tibias antérieurs sont larges, palmés et plus ou moins échancrés à leur bord externe ; le second article des antennes est aussi long ou plus long que le troisième.

Le tableau suivant présente la répartition des genres :

I. *Mâchoires arrondies à l'extrémité.*

A. Dernier article des palpes labiaux sécuriforme. *Carenum* (1).

B. Dernier article des palpes simplement tronqué à l'extrémité.

Dernier article des palpes maxillaires plus court que le précédent. *Pasimachus* (2).

Dernier article des palpes maxillaires plus long que le précédent. *Molobrus* (3).

Dernier article des palpes maxillaires aussi long que le précédent. (Antennes très-comprimées, grossissant vers l'extrémité). *Scaraphites* (4).

II. *Mâchoires arrondies à l'extrémité et munies intérieurement d'une dent.* *Acanthoscelis* (5).

III. *Mâchoires se terminant en une pointe recourbée.*

A. Languette non pointue.

a. Concave et hispide. *Scarites* (6).

(1) *Bonelli.* Obs. ent. 2e pie. p. 47. — *Westw.* Arc. ent. I, p. 83.

(2) *Bonelli.* Obs. ent. 2e pie. p. 44. — *Putzeys.* Prém. entom. p. 1. et suiv.

(3) *Putzeys.* Prém. ent. p. 5. 10.

(4) *Mac-Leay* in *Westw.* Arc. ent. I, p. 157.

(5) *Latreille.* Règn. anim. IV, p. 384. — *Dej.* Spec. I, 402. Iconog. I, 202 et 204. pl. 22. fig. 1.

(6) *Fabricius.* S. E. I. Gen. XX. — *Bonelli,* Obs. ent. Tab. syn. et 2e pie. p. 31. *sq.* — *Putz.* Prém. ent. p. 3. sq.

b. Échancrée au milieu. (Tibias postérieurs arqués). *Campylocnemis* (1).

c. Tronquée.

α. Sternum fortement caréné en dessous. *Scapterus* (2).

β. Sternum non caréné.

*. Mandibules longues.

d. Dernier article des palpes se terminant en pointe. *Oxystomus* (3).

dd. Dernier article des palpes ne se terminant pas en pointe.

e. Antennes moniliformes. *Oxygnathus* (4).

ee. Antennes filiformes ou composées d'articles triangulaires allongés.

Pénultième article des palpes maxillaires plus long que le dernier. *Camptodontus* (5).

Pénultième article des palpes maxillaires plus court que le dernier. *Stratiotes* (6).

**. Mandibules courtes.

f. Antennes diminuant de grosseur vers l'extrémité. *Gnathoxys* (7).

ff. Antennes grossissant vers l'extrémité.

g. Yeux très-petits, cachés par le rebord latéral de la tête. *Cryptomma*.

gg. Yeux proéminens.

Dent du menton courte, pointue. *Dyschirius*.

Dent du menton aussi élevée que les lobes latéraux, tronquée. *Lachenus*.

B. Languette se terminant en pointe.

h. Mandibules très-allongées, pointues. (articles des tarses transversaux).

Languette terminée en une longue pointe membraneuse. *Ardistomis*.

(1) *Westwood*. Arc. ent. I, p. 89. pl. 23. fig. 4. — *Hyperion*. Lap. Et. ent. p. 73. Hist. nat. des Col. I, 69. pl. 5. fig. 1. — *Heteroscelis*. Boisd. Faun. Océan. p. 23.

(2) *Dejean*. Spec. II, 471. Icon. I, 204. pl. 22. f. 3. — *Guér*. Icon. du Règne anim. pl. 5. fig. 3. — Voy. ci-après l'*Appendix*.

(3) *Dejean*. Spec. I, 409. Icon. I, 208 et 209. pl. 22. f. 4. — *Guér*. Icon. Ins. pl. 5. fig. 2.

(4) *Dejean*. Spec. II, 473. Icon. I, 209. pl. 22. f. 5.

(5) *Dejean*. Spec. II, 477. Icon. I, 211 et 212. pl. 22. f. 6. — Voy. ci-après l'*Appendix*.

(6) Voy. ci-après l'*Appendix*.

(7) *Westwood*. Arc. ent. I, p. 89. pl. 23. f. 2.

Languette terminée en une pointe membraneuse bifide.	*Schizogenius.*
hh. Mandibules courtes.	
i. Articles des tarses en triangles transversaux.	*Aspidoglossa.*
ii. Articles des tarses en triangles étroits.	
Dernier article des palpes labiaux en ovale court.	*Pyramis.*
Dernier article des palpes labiaux allongé	*Clivina.*

M. Sturm classe son genre *Axinidium* (*Catal.* 1843. p. 51 et 327. pl. 1. f. 4) parmi les Scaritides. M. Erichson (Wiegm. *Archiv.* 1844. II. p. 260) pense qu'il doit être voisin des *Eripus*. Je ne connais cet insecte que par la figure qu'en a donnée M. Sturm, et j'avoue que son rapprochement des Scaritides, que justifient déjà ses caractères extérieurs, me semble confirmé par la longueur du 2e article des antennes. On ne connait, du reste, la forme ni de la languette ni des paraglosses.

Peu de groupes ont été autant négligés dans la famille des Carabiques, que celui des *Clivines* de Latreille : la petite taille des espèces européennes, la grande analogie de formes et de couleurs qui existe entre la plupart d'entre elles, la rareté dans les collections des espèces exotiques, semblent avoir longtems détourné les entomologistes d'un examen un peu approfondi de ce groupe.

Lorsqu'en 1810 Bonelli proposa de détacher des *Clivina* le genre *Dyschirius*, ces deux genres ensemble se composaient à peine d'une demi douzaine d'espèces. Mais, en 1825, Dejean n'admit que le genre *Clivina* et y fit entrer dès lors des insectes s'éloignant de plus en plus des types de Latreille, soit sous le rapport de la forme de languette et d'autres organes aussi importans, soit sous le rapport de la forme des tarses, caractère auquel Dejean attachait assez d'intérêt pour que l'on doive être surpris qu'il l'ait complètement négligé.

A part le travail d'Ahrens sur les *Dyschirius* d'Allemagne, celui du Dr Erichson sur les espèces des environs de Berlin, et celui enfin de M. Schiödte sur les Clivinides du Danemarck, on n'a publié, depuis 1825, que des descriptions d'espèces isolées.

J'ai entrepris une tâche qui s'est étendue peu à peu ; je ne m'étais d'abord occupé que des *Dyschirius* d'Europe, mais la richesse des matériaux mis à ma disposition m'a déterminé à traiter le groupe des Clivinides tout entier. M. le Marquis de la Ferté m'a communiqué tant les espèces de sa collection que celles des collections Dejean et Reiche ; MM. Buquet, Chevrolat, Dupont, De Heyden, Hope et Schaum m'ont également en-

voyé leurs collections ; M. Reiche m'a confié les espèces européennes qu'il n'a point cédées à M. de la Ferté ; MM. Lucas et Pilate m'ont communiqué, l'un des espèces nouvelles de l'Algérie, l'autre tout ce qu'il vient de rapporter de son voyage dans le Yucatan ; enfin, M. Sturm m'a permis de décrire trois espèces de *Dyschirius* qui figurent dans son dernier Catalogue.

Si j'ai été surpris de voir s'élever à près de 200 le nombre des Clivinides existant dans les collections, mon étonnement a été encore plus grand de ce que si peu d'espèces soient un peu répandues. Il est à supposer que si tous les naturalistes voyageurs s'adonnaient avec autant de zèle que M. Pilate à la recherche des petites espèces, le groupe dont je vais m'occuper s'accroîtrait rapidement.

J'ai à faire trois observations sur certaines dénominations dont je me suis servi : j'ai appelé *ailes* celles des parties latérales de la tête qui sont situées de chaque côté de l'épistôme et qui souvent le dépassent ; *carènes oculaires* les deux espaces élevés compris entre les yeux et les stries longitudinales de la tête.

Toutes les espèces ayant les tibias antérieurs terminés par une digitation, je n'en ai pas tenu compte dans le nombre des parties saillantes des échancrures externes ; ces dernières sont désignées, soit sous le nom de *digitations*, soit sous celui de *dents*, selon qu'elles sont longues ou peu prolongées.

G. DYSCHIRIUS.

Bonelli *Tabl. Synopt.* — Panzer *Ind. Ent.* p. 67.

Le *menton* est plus large que long, profondément échancré et couvert de rugosités transversales très-distinctes ; il porte au milieu de son échancrure une petite dent plus ou moins élargie à la base ; les lobes latéraux sont à-peu-près coniques, arrondis à l'extrémité, avec le bord externe un peu sinueux.

La *languette* est cornée, en carré allongé, un peu plus étroite à la base qu'à l'extrémité : elle porte à son bord antérieur deux soies droites ; les paraglosses, d'une substance membraneuse, se rétrécissent vers le bout et sont du double plus longs que la languette.

Les *palpes labiaux* ont leur 2e article très-court, le 3e plus long que le 4e, en massue allongée, avec l'extrémité un peu courbée extérieurement ; le dernier est pyriforme, un peu plus dilaté intérieurement qu'extérieurement, allongé et plus ou moins tronqué à l'extrémité.

Les *mâchoires* sont allongées, presque droites, un peu courbes et aigues

à l'extrémité ; le lobe externe est plus long que le corps de la mâchoire.

Les 1er et 3e articles des *palpes maxillaires* sont égaux en longueur, courts, presque coniques ; le 3e est cependant plus large ; le 2e est de moitié plus long que le 4e, en massue courte, dilaté extérieurement ; ce dernier est de forme assez variable ; ordinairement il ressemble au même article des palpes labiaux, mais il est toujours plus dilaté au côté interne vers la base ; quelquefois il est presqu'en triangle allongé ; tantôt il est pointu, tantôt tronqué à l'extrémité.

Le *labre* est court, plus large en avant, échancré à son bord antérieur, avec les angles latéraux proéminens.

Les *mandibules* sont petites, planes ; leur extrémité interne est un peu courbée, leur bord externe rebordé et très-arrondi ; elles sont larges à la base et ne portent point de dents intérieurement.

Les *antennes* sont courtes et élargies vers l'extrémité ; leur premier article est large, dilaté dans son premier tiers, comprimé, de la même longueur que le 2e qui est plus long que le 3e ; ce dernier est plus large et plus long que le 4e qui est conique ; les suivans sont globuleux ; le terminal un peu plus long, est ovoïde et pointu.

L'*épistôme* est largement échancré au milieu ; ses angles antérieurs sont avancés ; le milieu de l'échancrure, qui est rebordé, est ou tronqué, ou cintré, ou même relevé en forme de corne très-apparente.

L'épistôme est ordinairement séparé du front par un sillon transversal très-profond en avant duquel se trouve une élévation presque toujours bien distincte et de forme variable.

Le milieu de la tête porte deux sillons longitudinaux arqués, profonds et rugueux ; l'espace compris entre eux est large et traversé par plusieurs impressions plus ou moins rapprochées, plus ou moins distinctes ; deux carènes élevées se remarquent entre les yeux et chacun des sillons longitudinaux ; elles sont arquées, rugueuses et plus ou moins interrompues.

La partie postérieure de la tête est ordinairement tout-à-fait lisse ; quelquefois cependant elle est fortement rugueuse. (*D. angustatus*. Ahr.).

Le *corselet* est le plus souvent du double plus large que la tête, très-convexe, complètement arrondi et un peu plus large à sa base, tronqué en avant ; ses angles antérieurs sont ordinairement très-déprimés, ce qui le fait paraître globuleux, surtout chez les individus très-lisses et brillans. A la partie antérieure il existe une impression arquée, quelquefois lisse, surtout chez les ♀, souvent accompagnée de petites stries longitudinales qui dans quelques espèces, ne la dépassent point. Le sillon longitudinal qui sépare le corselet en deux parties égales est plus ou moins marqué ; il est toujours plus profond à la base et moins enfoncé au milieu ; il atteint ordinairement le bord antérieur.

A la base du corselet, on distingue un rebord que longe un rang de petits points enfoncés.

L'*écusson* est en triangle allongé.

Les *élytres* ont ordinairement la même largeur que le corselet ; elles sont arrondies à l'extrémité, convexes, ovales, quelquefois cylindriques. Le bord inférieur est arrondi à la base. Dans plusieurs espèces, la strie marginale se prolonge au-delà de l'épaule et forme à la base une petite strie semblable à celle que l'on remarque chez les *Clivina*. Cette strie basale est quelquefois fort peu distincte ; le caractère que fournit sa présence ou son absence est important, bien qu'il ne soit pas rigoureusement constant : je l'ai cherchée en vain sur certains individus du *D. salinus*, espèce où elle existe régulièrement ; et d'un autre côté, je l'ai remarquée sur un individu appartenant évidemment au *D. politus*. Outre la strie marginale, chaque élytre en porte huit autres qui ne touchent pas la base et dont les 3e et 4e, 5e et 6e se réunissent avant l'extrémité ; elles sont plus ou moins profondes, presque toujours ponctuées dans leur première moitié ; le 3e intervalle porte soit deux, soit trois, soit même quatre points plus gros. A la base, près de l'écusson, on remarque en outre une petite strie très-courte. La région scutellaire est toujours déprimée.

Les *jambes* sont courtes et fortes ; les cuisses, surtout les antérieures, sont épaisses et comprimées, les trochanters un peu acuminés à leur extrémité, les tibias antérieurs larges, triangulaires, profondément échancrés intérieurement ; leur extrémité externe se prolonge en un éperon long et courbé en dessous ; l'extrémité interne porte une épine ordinairement aussi longue que l'éperon, rarement parallèle avec lui, plus souvent divergente, quelquefois fortement recourbée. Le côté externe porte deux dents plus ou moins saillantes, quelquefois très-peu marquées, mais dont la trace ne se perd jamais. En dessous de la jambe et un peu plus haut que les dents externes, on en remarque une autre assez saillante que quelques auteurs ont regardée à tort comme étant une 3e dent externe. Les tibias intermédiaires sont dépourvus de l'éperon externe qui caractérise le genre *Clivina*.

Les *tarses* sont tous semblables dans les deux sexes : le 1er article est aussi long que les deux suivans réunis, un peu dilaté à l'extrémité ; le 2e est triangulaire, de moitié plus long que chacun des deux suivans qui sont triangulaires et égaux entre eux ; le 3e est allongé, cylindrique. Les crochets sont grêles et arqués.

Dans toutes les espèces dont le labre est tridenté, la strie marginale se prolonge au dessus de l'épaule et les dents des tibias antérieurs sont fortement marquées ; dans celles dont le labre est bidenté et chez lesquelles la strie marginale se prolonge à la base des élytres, les tibias antérieurs sont fortement denticulés, sauf dans trois espèces : *D. Bonellii*, *extensus* et *strumosus*.

L'examen le plus attentif ne m'a pas fait découvrir de différence extérieure constante entre les sexes : celles que j'ai pu reconnaître ont été in-

diquées dans la description de chaque espèce : en général, les ♀ ont le dernier article des palpes maxillaires moins élargi à la base : leur couleur est plus mate, et les rugosités de la tête et du corselet sont moins prononcées.

La couleur dominante chez les insectes de ce genre est le bronzé plus ou moins foncé ; dans quelques espèces, l'extrémité des élytres est ferrugineuse ou marquée de deux taches de cette couleur ; les parties de la bouche, la partie antérieure de l'épistôme, les antennes et les pattes sont plus ou moins brunes ; les cuisses antérieures sont ordinairement plus foncées.

C'est dans les endroits sablonneux, au bord des eaux, que l'on trouve en général les *Dyschirius* : ils y courent en plein soleil ou s'enfoncent dans le sol d'où la moindre pression les fait sortir.

Histoire et synonymie.

Le premier des insectes qui appartiennent aujourd'hui au genre *Dyschirius* a été décrit et figuré par Herbst (Fuessly's *Archiv.* heft. V. p. 142. A. 1783) sous le nom de *Carabus globosus*. La description et la figure pourraient s'appliquer à la plupart des espèces du genre, si la taille indiquée (à peine 2 mill.) ne montrait qu'il s'agit de l'une des plus petites.

Fabricius, qui avait eu communication de cet insecte (*ibid.* p. 178), le décrivit en 1792 (*Ent. Syst.* I, G. 6. 10) sous le nom de *Scarites gibbus*, tout en renvoyant à la figure de Herbst ; mais c'est par erreur qu'il dit : *Scar. thoracicus*. Herbst *Archiv. tab.* 29. *fig.* 17. Le nom de *Car. thoracicus* avait été donné par Herbst à une *Anthia*. Du reste, la citation de la figure ne permet pas de douter qu'il s'agisse du *Car. globosus*.

Plus tard (1806), Herbst (*Natursyst.* X. 262. n° 14. pl. 176. f. 4.) décrivit et figura de nouveau la même espèce sous le nom de *Scar. gibbus*. Fab., tout en citant en synonymie l'insecte par lui décrit sous le nom de *globosus* en 1783. Et à la page suivante, il reproduisit sous ce nom de *globosus* un insecte qui ne diffère du premier que par sa taille un peu plus grande et par ses pieds plus obscurs. Herbst a donc décrit sous le même nom deux insectes différens : l'un, qui est le *gibbus* F. et qui doit conserver le nom de *globosus* qui lui a été imposé le premier ; l'autre, qui semble être l'espèce ou plutôt la variété décrite plus tard par Curtis sous le nom de *minimus*.

En 1790, Rossi (*Fauna Etrusca* I. 227. n° 568) donna le nom de *thoracicus* à une espèce que Hellwig (Ed. de 1795. p. 274) a regardée comme la même que le *C. globosus* de Herbst et le *Sc. gibbus* de Fab. Elle est de près de deux lignes ; ses élytres sont striées et les stries sont ponctuées ; elles sont d'un bronzé brillant ; les pattes sont ferrugineuses. Ces caractères

conviennent à l'insecte auquel Fabricius a conservé le nom de *thoracicus*, mais nullement au *globosus*.

Panzer (*Faun. Ins. Germ.* V. 1.) reproduisit la phrase de l'*Ent. Syst.* relative au *Scar. gibbus* et figura cet insecte.

En 1795, Olivier crut pouvoir rapporter au *Sc. thoracicus* de Rossi un insecte trouvé aux environs de Paris ; cependant son corps plus allongé, ses stries plus profondes et son *habitat* me portent à croire que l'espèce décrite par Olivier n'est point le véritable *thoracicus*, mais celui qui a reçu plus tard de Dejean le nom de *nitidus*.

Le même auteur figura en même tems le *Sc. gibbus* F.

Illiger, en 1798, (*Verz. der Kaf. Pr.* III. n° 3) donna la description d'un *Scarites* qu'il regarda comme étant le *thoracicus* de Rossi et d'Olivier : il est de moitié plus petit que la *Cliv. fossor* (3 mill.) ; le sillon longitudinal qui partage le corselet est finement marqué ; ces caractères prouvent qu'il ne s'agit pas du véritable *thoracicus*, mais plutôt du *D. æneus* Dej.

Illiger décrivit en outre le *Scar. gibbus* Fab. (*globosus* Hbst.).

Dans le premier volume de sa *Fauna suecica* (1798) Paykull donna la description d'un insecte qu'il rapporte au *Sc. gibbus* F. ; la citation qu'il fait d'un *Sc. thoracicus* Herbst, prouva qu'il n'avait point consulté l'ouvrage de cet auteur et s'était borné à reproduire l'indication erronée de Fabricius. Du reste, le caractère sur lequel il insiste *(Elytris totis striato-punctatis)*, est précisément celui qui manque au *Sc. gibbus*. Dans son 3e volume (1800) Paykull reconnut qu'il avait confondu sous un même nom deux espèces distinctes et il décrivit le *Sc. thoracicus* Rossi et le *Sc. gibbus* F. (*globosus* H.). Ces descriptions se rapportent parfaitement aux deux espèces.

Le *Syst. Eleuth.* de Fabricius, publié en 1801, mentionna le *Sc. thoracicus* de Rossi et le *Sc. gibbus* dont j'ai déjà parlé : dans la diagnose de ce dernier, il se glissa deux fautes qui ont été relevées par Duftschmidt II. p. 9.

En 1802, Marsham décrivit sous le nom de *Car. remotus* le *Car. globosus* Herbst.

En ( ) Panzer figura le *Sc. thoracicus* de Rossi. La description est insignifiante, mais la figure semble bien se rapporter à cet insecte.

Ce fut en 1806 que parut le 10e vol. de l'ouvrage de Herbst intitulé *Natursystem*, etc. Cet auteur y décrivit quatre insectes appartenant au genre *Dyschyrius* :

1° *Sc. æneus* (p. 262. n° 13. pl. 176. f. 3). La figure semble représenter le *D. politus ;* la dimension, le corselet un peu allongé, les élytres étroites, assez rétrécies postérieurement, la couleur, qui est indiquée comme étant parfois d'un bronzé cuivreux, me paraissent justifier cette opinion.

2° *Sc. gibbus* F. (p. 262. n° 14. pl. 176. f. 4. b.).

La description n'est que la traduction de celle donnée par Olivier; la

figure est très-défectueuse; cependant en comparant cet insecte avec celui qui est décrit plus loin sous le nom de *globosus*, je crois pouvoir émettre l'avis que celui-ci pourrait être le *D. minimus* Curt., et l'autre le *C. globosus* (Herbst. *Arch.*).

3° *Sc. globosus* (p. 264. n° 16. pl. 176. f. 6. d.).

Voy. ci-dessus.

4° *Sc. thoracicus* (p. 272. n° 28. pl. 177. f. 6. d.).

La description et la figure ne sont que la reproduction de celles d'Olivier. Je ne puis donc que renouveler ici l'observation déjà faite, que cet insecte me paraît être le *D. nitidus* Dej.

En 1807, Sturm décrivit : 1° *Sc. thoracicus* qui semble être bien celui de Rossi; cependant l'auteur dit que le sillon longitudinal du corselet est fort peu marqué, ce qui n'est point exact en ce qui concerne le *thoracicus* et toutes les espèces voisines. 2° *Sc. gibbus* F.

En 1810, Gyllenhall donna la description : 1° de la *Cliv. thoracica* F.; 2° de la *Cliv. gibba* F.

Je n'ai d'observation à faire que sur le premier de ces insectes. M. De Mannerheim (*Bull. de Mosc.* 1844) pense qu'il doit être rapporté à la *Cliv. ænea* Dej. Il me paraît impossible d'admettre cette opinion. Gyllenhall lui-même affirme que son *Sc. obscurus* sur l'identité duquel il n'y a pas de doute possible est un peu plus petit que le *thoracicus* et que, sauf cette différence de taille, la coloration et l'absence de points dans les stries, ces deux insectes sont tout-à-fait semblables. Cela seul suffirait pour démontrer que Gyllenhall n'a décrit, ni le *D. æneus*, ni aucune espèce voisine, mais le véritable *thoracicus* de Rossi. La forme des élytres, la finesse des stries et de leur ponctuation, l'existence de deux points seulement près de la 3e strie, sont des caractères qui conviennent au *thoracicus* et non à l'*æneus*.

Duftschmidt (1812) a signalé trois espèces de *Dyschirius*. Son *thoracicus* dont les stries et les points sont bien marqués et dont le 3e intervalle est très-ponctué, paraît être le *nitidus* (1). — Le *substriatus* est une espèce à laquelle je crois devoir rapporter le *bipunctatus* Grim. — Le *gibbus* est bien celui de Fabricius.

Bonelli, dans la 2e partie de ses *Observ. entom.* (1813) décrivit deux espèces nouvelles appartenant à la Faune d'Europe : *Cliv. bimaculata* et *dyschiria*. Cette dernière est surtout remarquable en ce que ses tibias antérieurs portent extérieurement trois dents au lieu de deux, comme dans les autres espèces européennes. Je suis disposé à croire que Bonelli a été induit en erreur comme Ahrens l'a été plus tard, et qu'il a regardé comme étant placée extérieurement une troisième dent qui, dans la réalité, est située en dessous de la jambe.

(1) Il est probable que le *D. politus* Dej. figure parmi les nombreuses variétés signalées par Duftschmidt.

Dejean, dans le 1er vol. de son *Species général des Coléoptères* (1825) apporta plus de soins qu'on n'en avait mis jusqu'alors à l'examen de ces insectes qu'il rangea parmi les *Clivina*. Il y établit les caractères de dix espèces européennes nouvelles : *Cl. nitida*, *polita*, *cylindrica*, *ænea*, *punctata*, *pusilla*, *fulvipes*, *digitata*, *semistriata* et *rufipes*. Il décrivit en outre les *Cliv. thoracica* et *gibba*.

Dans sa *Faune de Finlande* M. Sahlberg donna la diagnose des 5 espèces habitant ce pays : *Cl. polita*, *punctata*, *thoracica*, *digitata* et *gibba*. Quant à la *thoracica*, il est difficile de juger si c'est bien la véritable, l'auteur se bornant à renvoyer à la description de Dejean, qui est incomplète. La dimension indiquée n'est point celle de la *thoracica*, mais de l'*ænea*. L'observation de M. de Mannerheim (1) que l'espèce décrite par Sahlberg est l'*ænea*, me paraît confirmée en ce point.

M. Stephens en 1828 (*British Entomology* t. 1er) se borna à reproduire les descriptions de Dejean. Il y ajoute deux espèces nouvelles : *arenosus* et *tristis*. M. Curtis croit devoir rapporter le dernier au *D. rufipes* Dej. Pour ce qui concerne cette dernière espèce, je suis forcé de renvoyer à l'ouvrage même de M. Stephens ; ce ne sera qu'après avoir vu le type qu'il me sera possible d'indiquer avec précision quels caractères la distinguent des espèces déjà décrites.

En 1830, Ahrens inséra dans le 2e volume des *Archives* de Thon un travail sur les espèces de *Clivina* habitant l'Allemagne. Après être entré dans quelques considérations générales très-intéressantes, il donna la description de 13 espèces : *nitida*, *polita*, *paludosa*, *ænea*, *metallica*, *ahena*, *ærea*, *elongata*, *angustata*, *nigra*, *lævicollis*, *gibba* et *minima*. Nous aurons occasion de revenir sur ces descriptions.

L'année suivante, M. Curtis (*Ill. of Brit. Ent.* VIII. pl. 354) donna la liste des espèces trouvées en Angleterre et s'élevant à 14, y compris deux nouvelles espèces : *D. inermis* et *minimus*.

Dans ses additions aux cinq premiers volumes de son ouvrage (1835), M. Stephens reproduisit les descriptions données par Curtis des deux dernières espèces : à la liste des *Dyschirius* trouvés en Angleterre, il ajouta les *Cliv. rufipes*, *punctata*, *fulvipes* et *pusilla* de Dejean.

En 1837, parut la 1re partie de la *Faune du Brandebourg* du Dr Erichson. On y trouve des descriptions très-précises des *D. thoracicus*, *nitidus*, *politus*, *æneus*, *pusillus* et *gibbus*. La synonymie indiquée par ce savant entomologiste est d'autant plus intéressante qu'il a eu sous les yeux les types des espèces décrites par Ahrens. Il y ajouta une nouvelle espèce voisine du D. *nitidus* et qu'il nomma *chalceus*.

La même année, M. Heer (*Kæfer der Schweiz.* II, 1. p. 9. n° 8) publia une nouvelle espèce : *Cliv. gracilis*.

(1) Bull. de Mosc. 1844.

Ce fut en 1840 que M. Schiödte fit paraître le 1er volume de sa *Faune du Danemarck*. On y trouve sur le genre *Dyschirius* les renseignemens les plus complets et les descriptions les plus étendues. Malheureusement, son travail se borne aux *D. thoracicus*, *nitidus*, *politus*, *æneus* et *gibbus*, auxquels il ajouta l'année suivante le *D. obscurus* Ghl.

En 1841, M. Grimmer (*Steiermarks Coleopteren*. p. 31) désigna sous le nom de *D. bipunctatus* un insecte dont il indiqua les caractères avec trop peu de soin pour qu'il soit possible de le reconnaître d'après la description.

En 1843, trois espèces nouvelles appartenant au genre qui nous occupe, furent décrites, l'une par M. Schaum, sous le nom de *salinus* Erichs. (Germ. *Zeitschr*. IV. 180), les deux autres (*rufo-æneus* et *rotundipennis*) par M. de Chaudoir (*Bull. de Mosc*. 1843).

Enfin, en 1844, M. Mannerheim donna dans le *Bulletin de Moscou* les caractères d'une espèce voisine du *D. thoracicus* et qu'il nomma *riparius*.

---

1. *D. planicollis*. Reiche.

Niger, nitidus, palpis antennisque brunneis; menti dente medio latissimo, lobis lateralibus æquali; capite lato, clypeo truncato, alis prominulis subangulatis, vertice lævi; oculis prominentibus pedunculatis; pronoto subplano, postice elytris latiore, antice angustato; elytris oblongis, punctato-striatis, stria tertia bipunctata; tibiis anticis extus denticulatis, intermediis inermibus. — Long. 7, 10 1/2. El. 4 1/3, 6 3/4. Lat. 2 1/2, 3 mill.

Reiche. Coleopt. Colomb. n° 46. (*Rev. Zool*. 1842. p. 376).

D'un noir brillant en dessus, brun de poix en dessous; les palpes et les antennes sont bruns. La tête est plane, large, presque transversale; la dent du menton est aussi large que les lobes latéraux, arrondie à son sommet comme eux, mais plus avancée. Le labre est arrondi, mais en dessus, il paraît avancé au milieu. L'épistôme est tronqué, sans angles latéraux; ses ailes sont proéminentes; elles sont formées intérieurement par une ligne droite oblique, extérieurement par une ligne courbe, lesquelles se réunissant en avant, forment un angle obtus. Le sommet de la tête ne porte ni point ni sillons transversaux, mais les deux sillons longitudinaux sont très-profonds et irréguliers; les yeux sont très-écartés l'un de l'autre, très-proéminens et enchassés dans les rebords latéraux de la tête. Le corselet est plan, plus large en arrière que les élytres; sa base et sa partie postérieure sont très-arrondies; il se rétrécit depuis les angles postérieurs jusqu'aux angles antérieurs qui sont droits; le bord antérieur est largement échancré; le sillon longitudinal est peu profond quoique bien marqué; on ne voit de traces de l'impression transversale antérieure que deux gros points auxquels elle s'arrête dans la *Cliv. denti-*

femorata et dans les espèces voisines. Les élytres sont plus convexes et plus larges que le corselet, arrondies à la base et à l'extrémité; en dessous des épaules, on remarque une petite saillie; les côtés sont presque parallèles; elles sont striées-ponctuées; la 3e strie ne porte que deux gros points qui sont situés dans sa dernière moitié. Les tibias antérieurs ne portent extérieurement qu'une seule dent en dessus de laquelle on remarque à peine quelques traces d'une seconde. Les tibias intermédiaires sont munis de quelques poils spiniformes, mais ils n'ont point d'éperon avant l'extrémité. L'épine terminale des tarses est nulle.

J'ai vu un grand nombre d'individus de cette espèce provenant de Venezuela, où on les trouve le long des ruisseaux, sous les pierres. La collection Dejean renferme un individu beaucoup plus petit : c'est la *Cliv. laticollis* du Catalogue de 1837. Il a été rapporté de Cayenne par M. Lacordaire, et non du Mexique, comme le Catalogue le porte par erreur.

2. *D. quadraticollis.* Reiche.

Niger, nitidus, palpis antennisque brunneis; menti dente medio latissimo, lobis lateralibus æquali; capite lato, clypeo truncato, alis prominulis subangulatis, vertice lævi; oculis prominentibus pedunculatis; pronoto subquadrato, antice subangustato; elytris oblongis, punctato-striatis, stria tertia bipunctata; tibiis anticis extus denticulatis, intermediis inermibus.— Long. 13 1/2, 14 1/2. El. 6 1/2, 7. Lat. 3 1/2, 3 7/8 mill.

Reiche. Coleopt. Colomb. n° 15. (*Rev. Zool.* 1842. p. 375).

Il diffère du précédent par sa taille plus grande, son corselet plus convexe, plus long, moins élargi en arrière, ses élytres plus allongées, plus parallèles, toujours fortement ponctuées.

Il se trouve avec le *D. planicollis.*

3. *D. abbreviatus.*

Testacco-brunneus, palpis, antennis pedibusque testaceo-luteis; clypeo bidentato; pronoto subrotundato, postice dilatato, subsulcato; elytris ovatis, striato-punctatis, basi apiceque lævigatis, stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis extus acute bidentatis. — Long. 3 1/2. El. 2. Lat. 1/8 mill.

D'un brun-testacé, avec les palpes, le labre, les antennes et le dessous du corps jaunâtres; le corselet est ferrugineux en dessous. Le labre est profondément échancré; l'épistôme irrégulièrement rebordé et bisinué en avant, a ses angles étroits, arrondis et relevés; après le sillon frontal, qui est large et profond, la tête est tout-à-fait lisse en dessus. Le corselet

est très-convexe, arrondi, plus large que long, légèrement rétréci en avant, dilaté aux angles postérieurs; le sillon longitudinal est à peine distinct; l'impression transversale antérieure est plus marquée et lisse. Les élytres sont larges, ovales, fortement arrondies à la base, rétrécies en arrière, avec les côtés arrondis; les stries, qui sont munies de gros points écartés, ne commencent qu'en dessous des épaules et s'évanouissent dès après le milieu; la strie marginale ne se prolonge pas le long de la base. Les tibias antérieurs sont munis de deux dents aussi fortes que dans le *D. thoracicus*.

Yucatan. 1 ind. Coll. Pilate.

Il est probable que la coloration de cet insecte est un peu différente de celle indiquée, l'individu que j'ai sous les yeux n'étant évidemment transformé que depuis peu de tems.

4. *D. thoracicus*. Rossi.

Æneus, nitidus; clypeo tridentato; pronoto rotundato, in medio profunde sulcato; elytris ovatis, subtiliter punctato-striatis, stria marginali per basin continuata, interstitio tertio tripunctato, tibiis anticis extus acute bidentatis. — Long. 4, 4 1/2. El. 2 1/3. Lat. 1 3/4 mill.

Rossi. Ent. Etr. *Ib*. Ed. Hellw. I. 274. (excl. syn.).— *Fab*. S. E. I. 125. (excl. syn. Illig. et Oliv.).—*Payk*. Fn. S. III. 459. (excl. syn. Illig.).—*Gyll*. Ins. S. II. 170. n° 3. (excl. syn. Illig. et Oliv.).—*Panz*. Fn. Ins. G. LXXIII. 2.—*Sturm*. D. F. II. 189, 3. *Dej*. Sp. I. 420. n° 17. Icon. I. 224. pl. 24. fig. 5. — *? Fisch*. Ent. Ross. II. p. 208. n° 5. pl. 26. fig. 5. — *Steph*. Ill. of Br. Ent. I. 41, 2. — *Erichs*. Fn. Brd. I. 36. 1. — *Ahr*. n° 10 (♀ *C. nigra*). — *Schiödte*. Danm. Eleuth. I. 115. 1. Tab. IV. fig 6. ? *Zetterst*. Fn. Lapp. I. 41. 3. Ins. Lapp. 46. 3. *Cliv. striata*. Schh. (Dej. Sp. I. 424).

D. riparius. Mannerheim. *Descr. de quelques nouvelles espèces de Coléopt. de Finlande*. (Bull. Mosc. 1844. n° 1).

Sa couleur générale est un bronzé-clair brillant; les parties de la bouche, excepté l'extrémité des mandibules, le 1^er^ article des antennes de même que la base des deux suivans, les côtés de l'épistôme, les pattes (sauf les cuisses antérieures) sont d'un brun-rougeâtre qui se change en testacé chez les individus récemment transformés. Les ♀ sont ordinairement d'un noir mat, quelquefois cependant d'un noir brillant, ou entièrement d'un ferrugineux mat, ou avec les élytres seulement de cette couleur. Le dernier article des palpes est un peu plus élargi à la base et plus rétréci à l'extrémité que dans la plupart des autres espèces. L'épistôme a son milieu prolongé et relevé en forme de corne très-apparente; les dents latérales sont assez avancées et relevées à leur angle interne; l'élévation antérieure est très-distincte; elle est bornée en arrière par un sillon transversal et profond; le vertex porte quelquefois à sa partie postérieure une

ou deux lignes transversales très-peu distinctes. Le corselet est presque arrondi ; il se rétrécit un peu en avant où il est à peine de la largeur de la tête avec les yeux ; l'impression antérieure est assez large sans être profonde ; elle porte intérieurement et extérieurement de petites stries longitudinales très-nombreuses et très-fines qui disparaissent chez les ♀ ; le sillon longitudinal est profond, surtout à la base ; il est traversé par quelques rugosités subondulées et très-peu distinctes. Les élytres sont ovales, un peu rétrécies postérieurement ; elles sont au milieu plus larges que le corselet ; leurs stries sont fines, plus profondes à la base et vers la suture ; les points, qui s'affaiblissent vers l'extrémité, sont petits et assez espacés ; ils sont d'ailleurs beaucoup plus petits chez les ♀ ; le 3e intervalle porte près de la 3e strie trois points dont le supérieur est rarement distinct ; la strie marginale se prolonge jusqu'à la base près de l'écusson, en passant au dessus de l'épaule. Les dents placées à la partie externe des tibias antérieurs sont triangulaires, aigues et bien prononcées ; l'inférieure est trois fois aussi longue que l'autre ; elle est plus large à la base que dans le *D. salinus*.

Chez un individu trouvé à Ostende, le corselet est plus étroit que dans le type plus allongé et également rétréci en avant et en arrière.

M. de la Ferté m'en a communiqué un venant de Hongrie et dont le corselet, plus étroit, est tout-à-fait globuleux.

Dans la collection Dejean se trouve, sous le nom de *Cliv. striata* Schœnh., une variété de moitié plus petite que les individus ordinaires. Elle est indiquée comme venant de Suède : Dejean l'a placée avec l'*œnea*. C'est celle qui est mentionnée dans le *Species* I. 424.

M. Chevrolat en possède un individu pris à Bordeaux et M. Dupont un autre venant du midi de la Russie.

En Belgique, cette espèce n'a encore été rencontrée qu'à Ostende. Elle est commune dans les environs de Berlin et dans le nord de l'Europe.

L'insecte décrit par M. De Mannerheim, sous le nom de *D. riparius*, ne me paraît être qu'une variété du *D. thoracicus* dans laquelle les stries sont plus profondes. M. Reiche m'en a communiqué un individu venant de Finlande, et M. Von Heyden un autre trouvé dans le même pays et portant dans sa collection le nom de *D. orichalceus* Sturm. Je l'ai également trouvé à Ostende. C'est à la même variété que je crois devoir rapporter quatre individus venant de Perpignan et qui font partie de la collection de M. Chevrolat : ils sont plus petits ; les stries et les points sont beaucoup plus marqués (au moins autant que dans le *D. numidicus*) ; les tibias antérieurs sont plus fortement denticulés ; chez l'un de ces individus, les dents sont encore plus fortes que chez la *Clivina arenaria*.

5. *D. numidicus.*

Nigro-æneus, nitidus ; clypeo tridentato ; pronoto rotundato profunde sulcato ; elytris oblongis, profunde punctato-striatis, interstitio tertio tripunctato, stria marginali per basin continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3 1/2, 4 1/8. El. 2, 2 1/2. Lat. 1 1/3, 1 1/2 mill.

Cet insecte, qui ressemble beaucoup au *D. thoracicus*, en diffère par les caractères suivans : les angles latéraux de l'épistôme et la corne du milieu sont plus avancés et beaucoup plus aigus ; l'élévation antérieure est déprimée dans son milieu et relevée sur ses bords latéraux comme dans le *D. obscurus*, mais moins fortement. Le corselet est un peu plus étroit et le sillon longitudinal est plus profond. Les élytres sont moins dilatées sur les côtés, par conséquent plus parallèles ; elles sont un peu plus larges en arrière et leurs épaules paraissent plus proéminentes ; les stries sont beaucoup plus profondes dans toute leur étendue ; les points dont elles sont munies sont gros, et le 9e intervalle en porte trois qui sont bien marqués ; la strie marginale se prolonge plus distinctement le long de la base ; les dents externes des tibias antérieurs sont toutes les deux plus longues.

Je serais assez disposé à considérer cet insecte comme une variété méridionale du *D. thoracicus*, si la forme des élytres bien constante dans les différens individus que j'ai examinés, ne devait point être regardée comme un caractère décisif.

J'en ai vu quatre individus dans la collection de M. Reiche et un dans celle de M. Buquet, provenant tous de l'Algérie, sauf l'un de ceux de M. Reiche qui a été pris dans les environs de Naples.

6. *D. africanus.*

Ater, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto orbiculato ; elytris ovatis, tenuiter striato-punctatis, interstitio tertio tripunctato, stria marginali obsoletissime per basin continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis.— Long. 3 1/4. El. 2. Lat. 1 1/3 mill.

D'un noir brillant ; antennes brunes ; palpes, base des antennes et pattes postérieures testacés ; mandibules, dernier article des palpes, pattes antérieures et base des cuisses des autres pattes d'un brun-noirâtre. Épistôme et impressions de la tête comme dans le *D. numidicus*. Le corselet est un peu plus rétréci en avant que dans cette espèce ; le sillon longitudinal est moins profond. Les élytres sont plus allongées, leurs épaules moins proéminentes et l'extrémité proportionellement plus étroite ; elles ont quelque analogie de forme avec celles du *D. thoracicus*, mais elles sont

plus courtes ; plus arrondies sur les côtés, plus rétrécies à l'extrémité, et leurs angles huméraux sont moins saillans; les stries, qui ne commencent qu'à la hauteur des épaules, sont moins profondes que dans le *D. numidicus*; elles s'affaiblissent vers l'extrémité et vers le bord externe; leurs points, quoique plus petits et plus espacés, sont cependant distincts jusque près de l'extrémité ; le 3e intervalle porte 3 points; la strie marginale se prolonge à peine distinctement le long de la base. Les tibias antérieurs portent deux dents aussi marquées que dans le *D. thoracicus*.

Je n'ai vu que deux individus de cet insecte ; l'un m'a été communiqué par M. Reiche, l'autre par M. Buquet. Tous les deux viennent d'Algérie.

7. *D. obsoletus.*

Ater, nitidus ; clypeo bidenticulato ; pronoto orbiculato, sulco medio obsoletissimo ; elytris ovatis, tenuiter striato-punctatis, interstitio tertio tripunctato, stria marginali per basim continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3 3/4. El. 1 7/8. Lat. 1 1/3 mill.

Il ressemble beaucoup au *D. africanus* dont il diffère cependant par les caractères suivans : ses palpes et ses antennes sont entièrement testacés ; le corselet est un peu plus large, surtout antérieurement ; le sillon longitudinal est à peine distinct ; les élytres sont un peu plus courtes ; leurs stries sont encore moins marquées, surtout vers l'extrémité ; la strie basale est un peu plus distincte ; les dents des tibias antérieurs sont moins fortes, surtout la supérieure qui n'est représentée que par un léger renflement.

Oran. 1 ind. communiqué par M. Lucas.

8. *D. obscurus.* Gyll.

Viridi-æneus, submitidus ; clypeo valide tridentato ; pronoto rotundato, in medio profunde sulcato ; elytris ovatis, striis profundis, lævibus aut sublævibus, interstitio tertio bipunctato, stria marginali per basin continuata ; tibiis anticis acute bidenticulatis. — Long. 3 3/4. El. 2 1/3. Lat. 1 1/2 mill.

Gyllenh. Ins. Suec. IV. 456. 3-4. – *Sch œdte.* Danm. Eleuth. I. 575. 1. b.

Cet insecte a, au premier aspect, beaucoup de ressemblance avec le *D. thoracicus*; cependant il en est bien distinct; sa taille est un peu plus petite ; son corselet et ses élytres sont plus étroits ; la base de ces dernières est moins large; le milieu de l'épistôme est également relevé en forme de corne, mais cette corne est moins triangulaire, plus étroite et plus prolongée ; sa base atteint les deux extrémités latérales de l'éléva-

tion antérieure qui sont relevées, tandis que l'espace qui les sépare est déprimé ; les carènes près des yeux sont moins élevées. Les stries des élytres sont plus larges et plus profondes ; elles sont aussi enfoncées à l'extrémité et vers le bord marginal qu'à la base ; elles sont lisses ; quelquefois cependant on y voit quelques points fort peu distincts ; dans aucun des individus que j'ai comparés, je n'ai pu apercevoir le premier des trois points qui, dans ce genre, se trouvent ordinairement sur le 3e intervalle près de la 3e strie. Les dents externes des tibias antérieurs sont plus marquées que dans le *thoracicus*, surtout l'inférieure qui est aussi longue que dans le *salinus*.

Ostende. Peu commun.

La collection Dejean en possède un individu de Silésie sous le nom de *Cliv. thoracica*, et un second de Finlande sous le nom de *C. obscura* Sahlb.

M. Schaum m'en a communiqué un individu de Danemarck, envoyé par M. Schiödte ; il est un peu plus petit que ceux que j'ai trouvés en Belgique.

M. Reiche en possède un qui a été trouvé en Angleterre.

9. *D. sphæricollis.* Say.

Æneus, nitidus ; clypeo tridentato ; pronoto oblongo-rotundato, profunde sulcato ; elytris ovatis, punctato-striatis, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 4. El. 2 1/3. Lat. 1 3/4 mill.

Say. Trans. of the Phil. Soc. N. S. p. 28. n° 5.
Dej. Species. II. 479. 23.

Il diffère du *D. thoracicus* par les points suivans : la corne centrale de l'épistôme est large et moins élevée, mais les cornes latérales sont plus étroites ; l'impression antérieure est moins élevée et le sillon transversal moins profond ; les carènes oculaires sont moins rugueuses ; le corselet est aussi allongé, mais moins large ; l'impression transversale est plus rapprochée du bord antérieur ; la ponctuation des élytres est un peu plus forte ; les épaules sont moins arrondies ; la strie marginale n'est pas prolongée le long de la base ; les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents très-obtuses.

Amérique boréale. 1 ind. en assez mauvais état. (Say). Coll. Dejean.

10. *D. fulvipes.* Dej.

Niger, nitidus, ore, palpis, antennarum basi pedibusque rufis ; clypeo tridentato ; pronoto rotundato ; elytris ovatis, striato-punctatis, stria mar-

ginali per basin obsoletissime continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 4 1/4. El. 2 1/2. Lat. 1 1/3 mill.

Cliv. fulvipes. Dej. Spec. I. 425. 16. Icon. I. 223. pl. 24. fig. 4. — *Rambur.* Fn. Andal. p. 46. n° 3?

Cet insecte ressemble beaucoup au *D. thoracicus* (♀ noire), mais il est un peu plus grand. L'épistôme est tronqué en avant ; l'élévation antérieure est peu proéminente, arrondie et bornée en arrière par un sillon profond ; le vertex ne porte aucun sillon transversal. Le corselet est moins élargi en arrière que dans le *thoracicus* et plus allongé ; ses côtés sont beaucoup plus régulièrement arrondis ; sa forme est un ovale très-court ; le sillon longitudinal est moins enfoncé. Les élytres sont comme dans le *thoracicus;* les épaules sont un peu plus marquées et les côtés un peu plus arrondis ; les stries, qui sont très-fines, sont marquées de points un peu plus gros ; le 3e intervalle porte dans son milieu trois points bien distincts ; la strie marginale se prolonge au dessus de l'épaule jusqu'à la base, mais ce n'est qu'à l'aide d'une très-forte loupe qu'il est possible de s'en apercevoir. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents semblables à celles du *D. thoracicus.*

Il n'en existe dans la collection Dejean qu'un seul individu trouvé en Espagne.

M. Rambur (l. c.) dit l'avoir rencontré en Andalousie ; mais la diagnose qu'il en donne est trop concise pour qu'il soit possible d'affirmer que son insecte est identique avec celui de Dejean.

11. *D. digitatus.* Dej.

Nigro-æneus ; clypeo tridentato ; pronoto rotundato ; elytris breviter ovatis, profunde punctato-striatis, stria marginali post humerum basi obsolete continuata ; tibiis anticis extus dentibus duobus validis instructis ; earumdem spina terminali interna altera longiore, apice recurva. — Long. 3 3/4. El. 1 1/3.

Dej. Sp. I. 427. 18. Icon. I. 225. pl. 24. fig. 6. — *Steph.* Ill. of Br. Ent. I. 42. 6. ?

La tête est conformée comme dans le *D. thoracicus* ; seulement elle est plus lisse, notamment sur le vertex. Le corselet est arrondi, encore moins allongé et moins rétréci en avant que dans le *thoracicus ;* l'impression transversale antérieure est profonde et rugueuse ; le sillon longitudinal est bien marqué, plus large et plus profond vers la base. Les élytres sont ovales, plus courtes, plus convexes et plus dilatées au milieu que dans le *thoracicus ;* leurs stries sont plus marquées et plus fortement ponctuées, mais cependant moins profondes vers les côtés et à l'extrémité ; la strie marginale est interrompue au dessous de l'épaule, puis elle reparaît

pour se prolonger jusqu'à la base. L'épine interne et terminale des tibias antérieurs qui, dans les autres espèces, est ordinairement plus courte et plus grêle que l'externe, est ici aussi forte et plus longue que cette dernière ; son extrémité se recourbe fortement en forme de crochet. Les deux dents externes sont très-marquées ; l'inférieure est plus large, plus longue, mais moins aigue que dans le *thoracicus* ; la dent supérieure est beaucoup plus distincte que dans cette espèce.

Je ne connais d'autres individus de cette espèce que les deux que possède la collection Dejean : tous les deux viennent de Styrie, L'un porte sur l'étiquette le nom de *gibbicollis* Gysselen, de la main de Dejean.

12. *D. globosus.* Herbst.

Nigro-subæneus aut subcyaneus, nitidus ; clypeo bidentato, pronoto subrotundato ; elytris oblongo-ovatis, striato-punctatis, striis ante apicem evanescentibus ; stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extrorsum bidenticulatis. — Long. 2 1/2. El. 1 1/2. Lat. 1 mill.

Sc. globosus. Herbst. in Fuessly 142. n° 58. Tab. XXIX. f. 17. K. Natursyst. X. 264. n° 16.

Sc. gibbus. Fab. E. S. I. 96. 10. S. E. I. 126. 17. — *Panz.* F. G. V. f. 1 — *Oliv.* III. 36. p. 15. n° 19. T. 2. f. 16. a. b. — *Illig.* K. Pr. 112. n° 4. — *Payk.* F. S. III. 440. n° 4. — *Sturm.* D. I. II. 190. 4. — *Gyll.* I. S. II. 170. 4. — *Clairv.* E. H. II. 57. — *Dejt.* F. A. II. 8. 4. — *Fisch.* Ent. Ross. II. 209. n° 8. pl. 26. fig. 8. — *Dej.* Sp. I. 428. 21. Icon. I. 227. 15. pl. 25. f. 3. — *Boisd.* et *Lac.* F. P. I. 165. 6. — *Steph.* Ill. of. Br. E. I. 43. 9. — *Brullé.* Hist. nat. des Ins. V. p. 72. pl. 4. fig. 2. — *Zetterst.* F. L. I. 41. 4. I. L. 46. 4. — *Erichs.* F. Brand. I. 40. 7. — *Heer.* F. H. I. 18. 7. — *Schiœdte.* D. E. I. 119. 5.

Cliv. minima. Ahr. n° 13.

Car. remotus. Marsh. E. B. I. 473. 109.

D. minimus. Curtis. Guide Gen. 32. n° 12. Br. Ent. t. VIII. pl. 334. — ? *Herbst.* Natursyst. X. 262. n° 14. pl. 176. f. 4. 6.

? *Cliv. lævicollis. Ahr.* n° 11.

D'un noir légèrement bronzé ou bleuâtre, avec les parties de la bouche (sauf l'extrémité des palpes), la base des antennes, les quatre pattes postérieures et les tibias antérieurs d'un brun-rouge. Le dernier article des palpes est court, large, tronqué très-obliquement à l'extrémité où il est presque de la même largeur qu'à la base. Le bord antérieur de l'épistôme est tronqué ; les dents latérales sont peu avancées et leur angle interne est aigu. La tête ne porte qu'un seul sillon transversal ; il est profond et placé en arrière de l'élévation antérieure entre les yeux ; le milieu de la tête est distinctement rétréci par les deux points qui sont placés contre les sillons longitudinaux. Le corselet est convexe, il paraît presqu'arrondi ; sa forme réelle est un carré dont les quatre angles sont très-déprimés et arrondis ; l'impression transversale antérieure est peu marquée ; le sillon longitudinal

est peu profond surtout au milieu où il disparaît quelquefois. Les élytres sont en ovale-oblong, un peu plus étroites à l'extrémité qu'entre les épaules qui sont très-arrondies bien que l'angle huméral reste distinct ; elles sont impressionées exactement comme dans le *rufipes* ; seulement les points sont ordinairement un peu plus petits et moins arrondis. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents un peu moins avancées que dans l'*æneus*.

Dans quelques individus, le corselet est distinctement moins arrondi en avant qu'en arrière et affecte alors la forme particulière à celui de l'*æneus*.

Le *D. minimus*, Curtis, me paraît n'être qu'une variété de cette espèce ; il est proportionellement un peu plus étroit, les stries et les points sont un peu moins apparens ; le corselet est plus globuleux et se prolonge davantage en arrière où il se rétrécit plus insensiblement ; les cuisses antérieures sont ordinairement d'une couleur plus claire que dans le *globosus* ; le sillon longitudinal du corselet qui, suivant M. Curtis, est beaucoup moins apparent que dans cette dernière espèce, ne présente point ce caractère d'une manière constante ; il est même quelquefois plus profond que dans la plupart des individus du *globosus*.

Je n'ai pas vu la *Cliv. lævicollis* Ahr. (*lineatis* Meg.), mais à en juger par la description, ce doit être à peine une variété du *D. globosus*.

Le *D. globosus* est la plus répandue et la plus commune des espèces du genre ; il se rencontre souvent loin des eaux ; M. Rosenhauer (1) l'a même trouvé plusieurs fois au fond du nid de la *Formica rufa*.

13. *globulosus*. Say.

Nigro-subæneus, nitidus ; clypeo bidentato, pronoto ovato-rotundato ; elytris oblongo-subovatis, striato-punctatis, striis ante apicem evanescentibus ; stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extrorsum bidenticulatis. — Long. 2 2/3. El. 1 2/3. Lat. 1 1/8 mill.

Say. Trans. of the Phil. Soc. N. S. p. 28. n° 6.
Dejean. Spec. II. 480. 24. (Clivina).

Cet insecte se distingue du *D. globosus* (*gibbus*) auquel Dejean le compare, par ses antennes entièrement testacées, dont le 2e article est plus long que le 3e ; par son épistôme plus large ; par son corselet plus allongé et plus rétréci en avant ; par ses élytres plus larges à la base et à l'extrémité, et par conséquent moins ovales ; enfin par les tibias antérieurs dont les dents sont un peu plus marquées.

Amérique boréale. 1 ind. (Say). Coll. Dejean.

(1) *Die Kafer Erlangens*. p. 10.

14. *D. rotundipennis.* Chaud.

Ferrugineus, oculis nigris, subdepressis, antennis testaceis; clypeo bidentato, pronoto rotundato; elytris ovatis, striato-punctatis, apice sublævibus; stria marginali basi per humerum continuata; tibiarum anticarum dente inferiore acutiusculo. — Long. 2 1/4. El. 1 1/4. Lat. 1 mill.

Chaud. Bull. de Mosc. 1843. p. 742. n° 7.

L'épistôme est tronqué en avant ; les dents latérales sont un peu plus proéminentes que dans le *D. globosus ;* l'élévation antérieure est plus reculée que dans cette espèce ; le sillon transversal placé à sa partie postérieure est moins profond ; il la sépare d'une seconde élévation de même dimension que la première, si ce n'est que sa plus grande largeur est en arrière ; celle-ci se termine près des yeux qui sont très-peu proéminens par un sillon transversal et par une ligne enfoncée et arquée. Le corselet est encore plus arrondi que dans le *D. globosus* ; l'impression antérieure est plus distincte, le sillon longitudinal est bien marqué et plus enfoncé en arrière. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, parfaitement ovales ; les angles huméraux ne sont nullement marqués ; les stries sont disposées comme dans le *D. globosus*, mais leurs points sont beaucoup plus petits et plus serrés ; le 3e intervalle porte trois points dont l'inférieur est ordinairement peu marqué ; la strie marginale se prolonge très-distinctement jusqu'à la base. Les dents externes des tibias antérieurs sont plus longues que dans le *D. globosus*, mais l'inférieure est moins aigue à l'extrémité.

Cet insecte, qui est répandu dans les collections sous le nom de *D. ferrugineus* Kok., se trouve en Carniole, en Styrie et en Carinthie.

15. *D. gracilis.* Heer.

Nigro-piceus, nitidus ; pronoto suborbiculato, gibbo ; elytris ovatis, leviter punctato-striatis, apice margineque lævissimis ; tibiis anticis acute denticulatis, sterno, abdomine, antennis pedibusque rufis. — Long. 3 mill.

Cliv. gracilis. Heer. Kæf. der Schw. I. p. 8. n° 8. Fn. Helv. I. 18. 6.

La tête est assez grande ; le vertex est lisse au milieu ; les antennes sont brunes, avec leurs trois premiers articles testacés ; le corselet est convexe, presque arrondi, un peu rétréci en avant ; le sillon longitudinal est faiblement imprimé. Les élytres sont ovales, convexes, faiblement striées-ponctuées.

Cette espèce est un peu plus petite que la *Cliv. ænea* Dej., mais elle est beaucoup plus étroite ; le corselet est plus grand, les élytres sont moins fortement ponctuées. Elle diffère du *D. globosus (gibbus)* en ce qu'elle est

plus allongée, que ses stries et sa ponctuation sont plus faibles et disparaissent plutôt ; du *D. semistriatus* par son corselet plus court et plus orbiculaire, ses élytres plus dilatées au milieu et ses pieds rougeâtres.

Je me suis borné à reproduire les caractères indiqués par M. Heer. Je n'ai point vu cet insecte qui a été trouvé dans le canton de Glaris, en Suisse.

16. *D. rufipes.* Dej.

Brunneo-æneus, antennis tibiisque rufis ; clypeo bidentato, pronoto suborbiculato ; elytris elongato-ovatis, striato-punctatis, apice sublævibus, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 2 1/2, 3. El. 1 1/2, 1 1/4. Lat. 1 mill.

Dej. Spec. I. 428. 20. Icon. I. 226. pl. 25. fig. 2. — *Steph.* V. 369.
D. tristis? *Steph.* I. 43. 8. (*Curtis.* pl. 354. n° 8).

D'un brun légèrement bronzé, un peu plus obscur sur les élytres ; les parties de la bouche, les antennes et les pattes sont d'un rouge-ferrugineux. La tête est semblable à celle du *globosus*. Le corselet est presque arrondi, moins convexe que celui du *globosus*, un peu plus long et plus rétréci en avant ; le sillon longitudinal est plus profond au milieu que dans cette dernière espèce. Les élytres sont en ovale allongé ; leur base est presque tronquée comme dans l'*æneus* ; les côtés sont légèrement arrondis ; l'extrémité est rétrécie ; les stries commencent à la hauteur des épaules ; celles voisines de la suture sont bien marquées ; elles deviennent moins profondes à mesure qu'elles approchent du bord externe ; la 7e est remplacée par une ligne de points, et la 8e par quelques points beaucoup plus petits, à peine distincts ; la 1re est la seule qui parviennent bien distinctement à l'extrémité ; les autres s'effacent presque complètement après le 3e quart des élytres ; sur le 3e intervalle on voit trois points moins gros que ceux des stries. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents dont l'inférieure surtout est plus marquée que dans le *globosus* ; l'épine terminale externe est aussi un peu plus recourbée à l'extrémité.

Je n'ai vu que trois individus de cette espèce : l'un, venant d'Autriche, qui fait partie de la collection Dejean ; les deux autres, de Hongrie, communiqués par M. Von Heyden.

17. *D. æmulus.* Schüpp.

Niger, nitidus, palpis antennisque testaceis, pedibus anticis brunneis, posticis rufis ; clypeo bidentato, pronoto rotundato ; elytris latis, subovatis, punctato-striatis, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extrorsum acute bidenticulatis. — Long. 4. El. 2 1/3. Lat. 1 3/4 mill.

D. rufo-æneus? *Chaud.* Bull. Mosc. 1843. p. 744. n° 6.

Le bord antérieur de l'épistôme est sinué ; ses dents latérales sont larges; l'élévation antérieure est transversale et bien distincte, isolée en arrière par un sillon profond qui suit immédiatement une petite ligne très-peu distincte ; le vertex est tout-à-fait lisse. Le corselet est très-convexe, large, arrondi, légèrement rétréci en avant; l'impression antérieure est profonde, à peine marquée de quelques rugosités ; le sillon longitudinal est moins enfoncé, surtout au milieu. Les élytres sont plus larges que le corselet, en ovale court, très-convexes, avec les épaules un peu plus proéminentes que dans le *thoracicus*; les côtés sont arrondis dès avant le milieu; l'extrémité est aussi large que la base ; les stries sont bien marquées dans toute leur étendue ; la 8e seule est remplacée par une série de petits points ; les points des stries sont aussi fins que dans le *D. nitidus* ; le 3e intervalle porte trois points à peine plus gros que ceux des stries. Les tibias antérieurs sont munis extérieurement de deux dents un peu plus fortes, mais moins aigues que dans le *D. thoracicus*.

Cet insecte se trouve en Sicile. M. Schaum, qui m'en a communiqué deux individus sous le nom que j'ai conservé, pense qu'ils appartiennent au *D. rufo-æneus* Chaud. Il les a reçus de M. Grohmann qui a longtems séjourné en Sicile et qui a remis beaucoup de Coléoptères de ce pays à M. Parreyss, lequel a envoyé à M. de Chaudoir son *D. rufo-æneus*. En effet, à part la coloration qui dépend sans doute de la transformation récente, ce dernier semble avoir beaucoup de rapports avec l'insecte que je viens de décrire ; mais il offre deux caractères qui doivent l'en faire distinguer; le 3e intervalle porte quatre points, et la strie marginale se prolonge le long de la base jusqu'à l'écusson. Je dois ajouter cependant que j'ai reçu en communication de M. Lucas trois *Dyschirius* venant d'Alger et d'Oran qui me paraissent appartenir à l'espèce ci-dessus : l'un est d'un brun-bronzé, et porte une très-légère trace de strie basale.

18. *D. algiricus*. Lucas.

Ater, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto suborbiculato ; elytris ovatis, profunde punctato-striatis, interstitio tertio tripunctato, stria marginali supra humerum obsolete continuata ; tibiis anticis extus denticulatis.—Long. 3 1/2. El. 1 3/4. Lat. 1 1/2 mill.

D'un noir très-brillant; les palpes, les pattes et la base des antennes sont testacés ; le dernier article des palpes est noir ; l'extrémité des antennes, les pattes antérieures et la base des cuisses des autres sont d'un brun-noirâtre. Le milieu de l'épistôme est rebordé et légèrement échancré ; l'élévation antérieure est transversale ; elle est bornée en arrière par un sillon profond ; aucune autre strie ne se remarque sur le vertex. Le corselet est presque orbiculaire, un peu plus long que large, légèrement

rétréci vers les angles antérieurs qui sont très-déprimés ; le sillon longitudinal et l'impression antérieure sont lisses et bien marqués, un peu moins cependant que dans le *D. thoracicus*. Les élytres sont ovales, peu allongées, plus larges que le corselet, également développées aux épaules et à l'extrémité, avec les côtés régulièrement arrondis ; les stries sont profondes dans toute leur étendue, fortement et régulièrement ponctuées ; le 3e intervalle porte trois points du double plus gros, mais moins profonds que ceux des stries ; la strie basale se distingue à peine. Les tibias antérieurs portent deux dents dont l'inférieure est aussi marquée, bien que moins aigue, que dans le *D. æneus* ; la dent supérieure est à peine visible.

Algérie. 1 ind. communiqué par M. Lucas.

19. *D. punctatus*. Dej.

Æneus, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto ovato-rotundato ; elytris oblongo-ovatis, profunde striato-punctatis, stria marginali ad humerum desinente ; tibiis anticis extrorsum acute bidenticulatis. — Long. 3 1/2, 3 3/4. El. 1 3/4, 2. Lat. 1 1/4, 1 1/2 mill.

Dejean. Spec. I. 424. 13. Icon. I. 222. pl. 24. fig. 2. — *Rambur*. Fn. Andal. I. p. 45. n° 2. — *Heer*. Fn. Helv. I. 17. 4.

Cet insecte, qui a les plus grands rapports avec l'*æneus*, en diffère par les caractères suivans : l'élévation antérieure de la tête n'est point prolongée en arrière ; le corselet est plus convexe, plus étroit, ses côtés sont régulièrement arrondis ; les élytres sont un peu plus larges et plus courtes, leur forme est plus ovale ; les stries sont un peu plus profondes, mais moins distinctes à l'extrémité ; leurs points sont beaucoup plus gros, surtout dans les individus trouvés en Espagne ; ce sont d'ailleurs ces individus qui présentent au plus haut degré les caractères distinctifs de l'espèce.

L'individu venant du Caucase et envoyé à Dejean par M. Steven, est moins profondément ponctué ; son corselet est encore plus étroit et plus arrondi. Celui qui a été trouvé dans les environs de Paris et qui fait partie de la collection Dejean, me paraît appartenir à l'*æneus*, 3e forme ; cependant M. Schaum m'en a communiqué un venant de la même localité et j'en ai moi-même trouvé un à Liége qui, tous les deux, sont bien des *D. punctatus*.

L'individu signalé par Dejean, comme venant de l'Amérique septentrionale, appartient à une espèce bien distincte, que je décris ci-après.

M. Von Heyden m'en a communiqué deux exemplaires, l'un comme étant la *Cliv. thoracica*, venant de Finlande, l'autre sous le nom de *Cl. turgida* Parreyss.

20. *D. Dejeanii.*

Nigro-æneus, antennis pedibusque brunneis, ore, palpis antennarumque basi testaceis; clypeo bidentato ; pronoto subrotundato, antice angustato ; elytris ovatis, fortiter punctato-striatis, stria marginali per basin continuata, tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3 1/4. El. 2. Lat. 1 1/4 mill.

Cliv. punctata. Dej. Spec. V. 498. 13.

L'épistôme est tronqué en avant, peu rebordé ; ses dents latérales sont peu proéminentes ; l'élévation antérieure est presqu'arrondie et bornée en arrière par un sillon profond ; le vertex est assez étroit, et traversé entre les yeux par un second sillon beaucoup moins distinct que le premier. Le corselet est plus arrondi en arrière qu'en avant ; il a quelque analogie avec celui du *D. thoracicus* ; l'impression antérieure est plus profonde que le sillon longitudinal ; elle porte en dessous de petites stries longitudinales assez nombreuses. Les élytres ont la même forme que chez le *D. thoracicus* ; seulement les épaules sont un peu plus marquées ; les stries sont profondes et leurs points sont gros ; les unes et les autres sont moins profonds à l'extérieur et à l'extrémité ; on remarque trois points au milieu du 3e intervalle ; la strie marginale passe sur l'épaule et se prolonge le long de la base. Les tibias antérieurs portent extérieurement une dent aussi forte que dans le *D. salinus* ; la dent supérieure se manifeste à peine par une petite protubérance ; les épines terminales sont égales entre elles.

Amérique boréale. (Collection Dejean).

21. *D. minutus.* Dej.

Æneus, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto ovato-subrotundato ; elytris oblongis, striatis, in striis profunde punctatis, stria marginali ad humerum desinente ; tibiis anticis extrorsum acute bidenticulatis. — Long. 2 3/4. El. 1 1/2. Lat. 1 1/8 mill.

Dej Spec. I. 425. n° 13.

Cet insecte, que Dejean regarde comme une variété de la *Cl. punctata*, me paraît constituer une espèce distincte. Il est constamment plus petit ; le corselet est plus étroit et les élytres sont moins ovales, plus allongées ; les stries sont plus profondes à l'extrémité que dans le *D. punctatus* ; les pattes sont brunes ; les antennes testacées, avec la base plus claire.

J'en ai examiné 5 individus faisant partie de la collection Dejean et venant les uns de l'Espagne, les autres du midi de la France.

M. de la Ferté m'en a communiqué 5 autres de sa propre collection et trouvés à Perpignan. Dans aucun de ces 10 individus, l'élévation antérieure de la tête n'est prolongée en arrière ; le bord antérieur de l'épistôme est plus relevé et plus cintré que dans l'*æneus*.

J'en ai reçu un de M. Von Heyden qui, lui-même, l'a reçu de M. Sturm, sous le nom de *Cliv. linearis* Meg. et comme venant d'Autriche. Il n'a aucun rapport avec l'espèce dont il porte le nom et qui est identique avec la *Cliv. lævicollis* Ahr.

22. *D. pumilus*. Dej.

Nigro-æneus, nitidus, palpis, antennis pedibusque ferrugineis ; clypeo bidentato ; pronoto globoso ; elytris oblongis, striatis, in striis profunde punctatis, stria marginali ad humerum desinente ; tibiis anticis extrorsum acute bidenticulatis. — Long. 3 1/8. El. 1 3/4. Lat. 7/8 mill.

Dejean. Spec. 1. 425. 14. (Clivina).

Dejean ne distingue cet insecte du *D. minutus* avec lequel il le compare, qu'à raison de sa couleur plus obscure, et de ses antennes et de ses pattes entièrement d'un rouge foncé. Il existe d'autres différences plus réelles. L'épistôme est plus régulièrement tronqué en avant ; les lobes latéraux sont moins saillans ; après le sillon antérieur la tête est absolument lisse ; le corselet est plus globuleux, un peu rétréci en avant ; les épaules sont beaucoup plus arrondies et les élytres sont plus lisses à l'extrémité ; la dent inférieure des tibias antérieurs est plus forte et plus longue.

Amérique boréale. 2 ind. (Leconte). Coll. Dejean.

23. *D. semistriatus*. Dej.

Subtus ater, supra atro-æneus, pedibus antennisque rufo-piceis, his basi dilutioribus : pronoto subgloboso, antice angustato, sulco parum profunde impresso ; elytris breviter ovatis, tenuiter striatis, striis fortiter punctatis apice et externus evanescentibus ; tibiis anticis acute denticulatis. — Long. 3. Lat. 1 mill.

Dej. Spec. I, 427. 19. Icon. 226. pl. 25. fig. 1.
Heer. Fn. Helv. I. 17. n° 5.

Le dernier article des palpes est plus grêle et plus étroit que dans la plupart des autres espèces. L'épistôme est tronqué en avant ; son milieu est assez fortement rebordé ; les dents latérales sont un peu plus larges et plus avancées que dans l'*æneus* ; l'élévation antérieure se rétrécit à sa partie postérieure qui est séparée du front par un sillon profond ; après ce sillon, on n'aperçoit plus ni lignes, ni rugosités transversales. Le cor-

selet est très-convexe, presque arrondi, un peu rétréci en avant; l'impression antérieure est lisse et bien marquée; le sillon longitudinal est très-peu distinct. Les élytres sont en ovale court, à-peu-près comme dans l'*æneus*, mais elles sont plus convexes, et plus arrondies postérieurement; les points sont gros et espacés comme dans le *globosus*; les stries, excepté les plus rapprochées de la suture, sont peu profondes; aucune, si ce n'est la 1re, ne commence à la base de l'élytre; les autres prennent naissance plus bas que l'épaule; la 1re seule se prolonge jusqu'à l'extrémité où elle devient beaucoup moins distincte; la 7e est représentée par quelques points en dessous de l'épaule et ce n'est qu'à l'extrémité qu'on en aperçoit des traces ainsi que de la 8e. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents dont l'inférieure est aigue, mais cependant moins que dans l'*æneus*.

J'ai décrit cet insecte d'après l'exemplaire sur lequel Dejean a fait sa propre description et qui est unique dans la collection de cet entomologiste. Cet exemplaire vient du département du Calvados.

M. Schaum m'en a communiqué un individu venant du nord de l'Italie: le corselet est un peu moins rétréci antérieurement, la ponctuation des élytres est moins forte; la couleur générale est plus bronzée; les pattes et les antennes sont plus rouges.

24. *D. læviusculus.*

Nigro-æneus, antennis pedibusque rufo-piceis; pronoto subgloboso, antice angustato, sulco longitudinali obsoleto; elytris convexis, breviter ovatis, leviter striatis, striis punctatis apice et exterius evanescentibus; tibiis anticis acute denticulatis. — Long. 3. Lat. 1 mill.

Cet insecte qui ressemble beaucoup au *D. semistriatus*, en diffère par les caractères suivans:

L'épistôme est plus fortement rebordé et cintré en avant; après le sillon transversal qui suit l'élévation antérieure on remarque une seconde élévation tronquée en avant, rétrécie en arrière et qui se termine un peu avant le milieu des yeux; à cette élévation succèdent un ou deux sillons transversaux et profonds. Le corselet et les élytres, très-convexes, sont du reste, semblables à ceux du *semistriatus*, sauf que les points sont un peu moins gros.

3 ind., l'un d'Autriche (coll. Schaum); l'autre de Genève (coll. Chevrolat); le dernier de Provins (coll. Reiche).

25. *D. æneus.* Dej.

Æneus, nitidus, clypeo bidentato, pronoto breviter ovato, postice latiore;

elytris oblongo-ovatis, striato-punctatis, stria marginali ad humerum desinente; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3 1/4. El. 2 3/4. Lat. 1 3/4 mill.

Dejean. Spec. I, 423. 12. Icon. I, 221. 7. pl. 24. f. 1. — *Boisd.* et *Lacord.* I. 162. 4. — *Steph.* Ill. of Br. Ent. I. 42, 7. — *Erichs.* Fn. Brand. I. 39. 5. — *Heer.* Fn. Helv. I. 17. 3.—*Schiodte.* Danm. Eleuth. I. 118. 4. (excl. syn. Ahr. *ænea*). *Cliv. paludosa.* Ahr. n° 3. — *Cliv. ahena.* Ahr. n° 6. — *Cliv. ærea.* Ahr. n° 7. — *Cliv. gibba.* Ahr. n° 12. (1).

Sc. thoracicus? *Illig.* K. Pr. 111. 3. (excl. syn.).

Cliv. thoracica? *Sahlb.* Ins. Fenn. I. n° 5.

Noir en dessous (2), bronzé en dessus ; mandibules, base des palpes et des antennes fauves (3) ; pattes noires, souvent brunes, quelquefois ferrugineuses. Le dernier article des palpes est assez court, assez large et tronqué obliquement à l'extrémité ; le bord antérieur de l'épistôme est tronqué, quelquefois légèrement sinueux, quelquefois aussi un peu arrondi, marginé ; les dents latérales sont aigues à leur côté interne ; l'élévation antérieure est à-peu-près cordiforme, arrondie en avant, prolongée en arrière en un angle très-aigu jusques entre les yeux; cette élévation porte quelquefois au milieu une légère impression transversale ; le vertex est ensuite traversé par deux ou trois lignes peu profondes ; à la partie postérieure de la tête, près des yeux, on remarque ordinairement quelques rugosités et des points enfoncés assez distincts ; il arrive souvent que l'impression antérieure n'est pas prolongée en arrière ; elle a alors une forme elliptique et est bornée en arrière par un sillon transversal et profond. Le corselet est plus large que la tête; sa longueur excède de très-peu sa largeur; il est un peu rétréci en avant ; le sillon longitudinal qui est peu marqué, quoique plus profond en arrière, porte de chaque côté quelques petites stries transversales assez distinctes ; l'impression antérieure est plus enfoncée et munie inférieurement de nombreuses rugosités longitudinales ; le corselet est tout-à-fait glabre chez les ♀. Les élytres sont plus larges que le corselet, en ovale ordinairement assez court, assez convexes, avec la base coupée obliquement ; les côtés, comme dans le *nitidus*, sont coupés obliquement au dessous de l'épaule jusque après le 1er quart, ensuite

(1) Ahrens a cru que l'espèce nommée *Sc. gibbus* par Fabricius, était plutôt la *Cl. ænea* Dej. que l'espèce que l'on connaît généralement sous le nom de *Cl. gibba*. J'ai exposé plus haut les motifs qui me portent à croire qu'il n'en peut être ainsi, puisque l'identité entre le *Sc. globosus* Herbst et le *Sc. gibbus* Fab. semble bien établie. D'ailleurs Fabricius dit : *a'er, thorace orbiculato*, caractères qui conviennent au *D. globosus* et non au *D. æneus*.

(2) Chez les individus récemment transformés, le devant de la tête, le dessous du corselet, et l'extrémité des élytres sont quelquefois un peu rougeâtres.

(3) Les antennes sont ordinairement brunes, avec le 1er article fauve; quelquefois les deux suivans, mais seulement à leur base, sont de la même couleur.

régulièrement arrondis ; les épaules sont assez proéminentes ; l'extrémité est rétrécie ; les stries sont assez enfoncées et se prolongent jusqu'à l'extrémité où elles deviennent un peu moins profondes ; leurs points sont bien marqués ; ils deviennent moins distincts à partir du dernier tiers des élytres ; le 3e intervalle en porte trois plus gros. Les dents externes des tibias antérieurs sont bien distinctes, surtout l'inférieure, qui est aigue et du double plus longue que l'autre.

Cette espèce, qui est l'une des plus difficiles à bien distinguer, affecte quatre formes principales :

La 1re, que je viens de décrire et que je considère comme typique (parce qu'elle est la plus commune et que les individus de la collection Dejean qui ont servi à l'établissement de l'espèce y appartiennent), a le corselet à peine rétréci en avant et aussi large que long ; les angles antérieurs sont presque droits, bien qu'arrondis à leur extrémité ; les élytres sont deux fois plus longues que larges, leur base est presque tronquée, les épaules sont saillantes ; les côtés vont en s'élargissant jusqu'au premier tiers ; à partir de ce point, ils sont courbés et vont en se rétrécissant ; les stries sont assez inégales et bien marquées jusqu'à l'extrémité.

Dans la 2e forme, le corselet est plus étroit et plus globuleux.

Dans la 3e, le corselet est également plus étroit, mais il est plus allongé, plus rétréci en avant et en arrière ; les stries sont ordinairement plus régulières et leurs points plus gros ; souvent les élytres sont plus larges.

Les individus de la 4e forme ont les élytres plus allongées, avec leur base plus arrondie.

Ces diverses formes se combinent souvent entre elles, de façon qu'il devient quelquefois difficile de savoir à laquelle certains individus doivent être rapportés.

M. Erichson, qui a vu les types d'Ahrens, considère comme de simples variétés du *D. æneus* les *Cliv. ærea*, *paludosa* et *ahena* de cet auteur. La 1re me paraît être la véritable *Cl. ænea* de Dejean ; la 2e a les élytres plus finement striées-ponctuées ; la 3e a le corselet un peu plus rétréci en avant, et les élytres un peu plus élargies au milieu. Ahrens signale *trois* dents à la partie externe des tibias antérieurs dans ces deux dernières espèces ; ce ne peut être que par suite d'une erreur que j'ai déjà signalée plus haut.

J'ai vu dans la collection Dejean un individu portant sur l'étiquette : *Cl. punctata* Sahlb. et venant de Finlande. Il appartient au type du *D. æneus*, mais il est plus grand (4 mill.). Dans la même collection se trouve parmi les *D. æneus* un insecte que Dejean a reçu de M. Schœnherr comme venant de Suède sous le nom de *Cl. striata* et qu'il mentionne dans son *Spec.* I. 424. C'est un petit individu du *D. thoracicus*.

La *Cl. obscura* qui a été envoyée à Dejean par M. Sahlberg (*Spec.* I. 424) est la *Cliv. obscura* Gyll.

J'ai reçu de M. Marietti de Milan, 7 individus qui, tous, sont plus petits que ne l'est ordinairement l'*æneus*; leurs élytres sont plus courtes et marquées de points plus gros et plus arrondis; leurs stries sont moins distinctes à l'extrémité; quatre d'entre eux ont le corselet comme dans le type de l'*æneus*; les autres l'ont plus étroit et complètement globuleux (2ᵉ f.).

26. *D. intermedius.*

Æneus, nitidus; clypeo bidentato; pronoto breviter ovato, postice latiore; elytris elongato-ovatis, tenuiter punctato-striatis; stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis extrorsum acute bidenticulatis.—Long. 3 1/2. El. 2. Lat. 1 mill.

Bronzé ou bronzé-cuivreux; pattes, base des palpes et épistôme bruns: antennes testacées, avec l'extrémité plus obscure. Il ressemble à l'*æneus*, sauf les différences suivantes: l'élévation antérieure de la tête est arrondie et n'est suivie que d'un sillon unique; le corselet est plus convexe, moins large en arrière; les élytres sont plus étroites, plus allongées; elles présentent un peu l'aspect de celles du *D. politus*, bien qu'elles soient plus élargies avant le milieu et proportionellement plus courtes; elles sont plus finement striées que dans l'*æneus*; leurs points sont distinctement plus petits et plus réguliers; les tibias antérieurs sont denticulés de même, mais la dent supérieure est plus apparente.

J'ai trouvé cette espèce à Anvers, sur le bord de l'Escaut. M. Von Heyden en a trouvé un individu près de Francfort. M. Schaum m'en a communiqué un venant d'Autriche.

27. *D. Lafertei.*

Æneus, pronoto subtus, pedibus, capitis lateribus, antennis palpisque ferrugineis; pronoto subrotundato; elytris oblongo-ovatis, striato-punctatis, striis apice evanescentibus, stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 3 3/4. El. 2. Lat. 1 1/4 mill.

L'épistôme est tronqué en avant et muni d'un rebord étroit; ses dents latérales sont carrées à l'extrémité, avec l'angle interne relevé; l'élévation antérieure est transversale, séparée du vertex par un sillon profond après lequel il n'existe plus qu'une ou deux lignes très-peu distinctes entre les yeux; les carènes oculaires sont peu élevées. Le corselet est un peu plus large que long, à peine plus étroit en avant qu'en arrière; ses côtés sont régulièrement arrondis; il est moins convexe et plus large que dans

l'*æneus*; l'impression antérieure est bien marquée et porte quelques petites stries longitudinales; le sillon du milieu est médiocrement enfoncé, moins distinct au milieu qu'à ses extrémités. Les élytres sont entre les épaules de la largeur du corselet; elles sont ovales-oblongues, plus larges au milieu que dans l'*æneus*; leur base est plus arrondie, les stries sont un peu plus profondes et les points plus gros. La 1re strie est la seule qui soit distincte jusqu'à l'extrémité; les autres s'affaiblissent tellement dès le dernier quart, qu'ordinairement on n'en remarque plus que quelques traces fort légères; le 3e intervalle porte trois gros points près de la 3e strie; la strie marginale s'arrête au dessous de l'épaule. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux petites dents moins marquées que dans le *D. æneus*; l'épine terminale externe est beaucoup plus forte et plus longue que l'interne.

M. de la Ferté m'en a communiqué quatre individus venant du Piémont.

28. *D. impressus.*

Nigro-æneus; clypeo bidentato; pronoto angusto rotundato; elytris subelongatis, profunde punctato-striatis, interstitio tertio tripunctato; stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3 1/2. El. 1 7/8. Lat. 1 mill.

Noir, avec un reflet bronzé en dessus; les pattes et les parties de la bouche sont brunes, sauf les deux derniers articles des palpes; le 1er article des antennes et la base des deux suivans sont ferrugineux. Le bord antérieur de l'épistôme est largement rebordé et cintré; la tête est, du reste, semblable à celle du *D. æneus*. Le corselet est plus étroit et plus convexe que dans cette espèce, de la même largeur dans toute son étendue et un peu plus long que large; les côtés et les angles antérieurs sont beaucoup plus déprimés; l'impression antérieure est plus profonde que la ligne longitudinale; l'une et l'autre sont lisses et non environnées de rugosités. Les élytres sont plus étroites que chez le *D. æneus*, leurs côtés plus parallèles; elles sont plus convexes vers la région scutellaire, plus larges à l'extrémité; les stries, qui ne commencent qu'à la hauteur des épaules et qui se prolongent jusqu'à l'extrémité, sont plus profondes et les points beaucoup plus gros. Les jambes sont semblables à celles du *D. æneus*, si ce n'est que la digitation terminale externe des tibias antérieurs est plus recourbée à l'extrémité.

J'en ai reçu un individu de M. Dupont comme venant du Portugal : la collection de cet entomologiste en renferme deux autres originaires du même pays.

29. *D. chalybeus.* Sturm.

Niger, nitidus, antennarum articulis tribus primis basi testaceis, pedibus brunneo-piceis ; clypeo bidentato ; pronoto subovato, basi subangustato ; elytris breviter ovatis, æneo-chalybeis, profunde punctato-striatis, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis acute bidenticulatis. — Long. 3. El. 1 3/4. Lat. 1 1/4 mill.

Sturm. Cat. 1844. p. 10.

L'épistôme est relevé et un peu cintré dans son milieu ; l'élévation antérieure est située assez en arrière ; l'impression transversale qui la borde est profonde ; elle est suivie d'une seconde aussi large, mais beaucoup moins distincte et de quelques rugosités peu marquées. La forme du corselet le distingue de toutes les autres espèces ; il est du double plus étroit que les élytres, assez allongé, dilaté au milieu et rétréci à ses deux extrémités ; il est plus étroit à la base ; l'impression antérieure est accompagnée intérieurement de quelques petites stries longitudinales ; le sillon du milieu est profond, surtout à la base. Les élytres ont la même forme que dans l'*æneus* ; elles ont leur base plus arrondie et l'angle huméral moins marqué ; leurs stries sont aussi profondes, plus égales et les points sont plus gros. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents aigues un peu plus fortes que dans l'*æneus*.

M. Sturm m'a communiqué l'individu, unique dans sa collection, qu'il a désigné dans son Catalogue sous le nom que j'ai conservé. Il vient du midi de la France.

30. *D. hæmorrhoidalis.* Dej.

Nigro-virescenti-æneus, palpis, antennis, pedibus elytrorumque apice testaceis ; clypeo bidentato ; pronoto subovato, basi subangustato ; elytris ovatis, profunde punctato-striatis, basi apiceque lævibus, stria marginali secundum basin continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3 1/4. El. 1 7/8. Lat. 1 mill.

Dejean. Spec. V. 511. 41. (Clivina).

D'un bronzé-verdâtre ; dessous du corps brun ; palpes, antennes, pattes et extrémité des élytres testacés. L'épistôme est tronqué en avant ; ses angles sont relevés et arrondis ; l'élévation antérieure porte un point central ; elle est longée en arrière par un sillon profond et lisse. Le corselet est globuleux, plus étroit vers sa base qui se prolonge un peu, et à-peu-près de la même forme que dans le *D. chalybeus*. Le sillon longitudinal est profond, mais l'impression transversale antérieure est à peine distincte ; les élytres sont ovales, fortement striées-ponctuées ; les stries ne

commencent que plus bas que l'épaule et ne sont plus distinctes vers l'extrémité ; la strie marginale se prolonge le long de la base. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents aussi prononcées que dans le *D. æneus*.

Amérique boréale. 1 ind. (Leconte). Coll. Dejean.

31. *D. punctipennis.*

Nigro-æneus, clypeo bidentato, pronoto ovato ; elytris elongato-ovatis, fortiter punctato-striatis, striis ad apicem usque excurrentibus, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extrorsum acute bidenticulatis.— Long. 3 3/4. El. 2. Lat. 1 1/8 mill.

Tout l'insecte est d'un noir bronzé, avec les cuisses et la base des antennes un peu bruns. La tête est semblable à celle de l'*æneus* ; le dernier article des palpes est moins dilaté ; le bord antérieur de l'épistôme est cintré au milieu ; le front est un peu plus rugueux. Le corselet est plus étroit et plus allongé d'un cinquième que dans l'*æneus*, à peine rétréci en avant ; sa forme est exactement la même que dans le *nitidus* ; le sillon longitudinal est bien enfoncé, et l'impression antérieure peu marquée. Les élytres sont plus allongées, plus étroites que dans l'*æneus* ; elles se dilatent un peu avant le milieu et se rétrécissent vers l'extrémité. Les stries sont profondes et bien marquées dans toute leur étendue ; à l'extrémité, elles sont plus distinctes que dans l'*æneus;* elles sont munies de points un peu plus petits et disposés moins régulièrement que dans le *D. apicalis* et cependant plus gros que dans l'*æneus* ; les trois points du 3e intervalle sont placés tout-à-fait contre la 3e strie et sont plus gros que les autres. Les dents des tibias antérieurs sont semblables à celles de l'*æneus*.

J'en ai trouvé un seul individu sur le bord de l'Escaut, à Anvers. M. Reiche m'en a communiqué deux venant du midi de la France.

32. *D. ruficornis.* Ziegler.

Æneus, nitidus, clypeo bidentato, pronoto breviter ovato ; elytris elongato-ovatis, fortiter punctato-striatis, striis ad apicem usque excurrentibus, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extrorsum bidenticulatis. — Long. 3 1/2. El. 1 7/8. Lat. 1 mill.

Il ressemble beaucoup au *D. punctipennis*, mais il est un peu plus petit ; le devant de l'épistôme est sinué ; le corselet est plus court (quelquefois plus ovale, élargi au milieu), le sillon longitudinal est plus profond antérieurement ; les élytres sont plus courtes, plus cylindriques,

mais ponctuées aussi fortement ; l'extrémité est de la même largeur que la base qui est presque tronquée ; les dents des tibias antérieurs sont moins saillantes ; l'impression antérieure de la tête n'est point prolongée comme dans l'*œneus* ; après le sillon qui suit cette impression, on remarque des rugosités transversales ne dépassant pas le milieu des yeux. La couleur générale est un bronzé assez clair ; le dessous du corselet, la poitrine, le bord inférieur de la base des élytres et le devant de la tête, sont bruns ; les palpes, les antennes et les palpes testacés.

M. Von Heyden m'en a communiqué, sous ce nom, deux individus venant d'Autriche ; M. Schaum quatre individus envoyés du même pays, et M. de la Ferté un qu'il a reçu de Hongrie.

33. *D. uliginosus.*

Atro-æneus, clypeo bidentato, fronte rugosa ; pronoto subquadrato angulis rotundatis ; elytris elongatis, subcylindricis, striato-punctatis, stria marginali supra humerum secundum basin continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3. El. 1 3/4. Lat. 1 1/4 mill.

D. cylindricus. Sturm. Catal. 1843. p. 10.

D'un noir-bronzé ; les jambes, les parties de la bouche et la base des antennes d'un brun un peu obscur. L'épistôme et la tête sont conformés et impressionés comme dans le *D. angustatus*, mais la partie postérieure de la tête est tout-à-fait lisse. Le corselet est très-convexe, étroit, presque aussi large en avant qu'en arrière ; il ne se rétrécit que près des angles antérieurs qui sont très-déprimés ; le bord antérieur est un peu relevé ; l'impression transversale est bien marquée et porte à peine quelques petites stries ; le sillon longitudinal devient plus profond vers la base ; il est accompagné de quelques rugosités très-peu distinctes. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, presque cylindriques, très-peu élargies vers leur milieu ; elles sont profondément striées dans toute leur étendue ; leurs points sont assez marqués et disparaissent presque entièrement vers l'extrémité ; on ne distingue aucun des trois points qui sont ordinairement placés contre la 3e strie ; la 8e strie, un peu moins profonde que les autres est cependant marquée et ponctuée dans toute son étendue ; la strie marginale se continue très-distinctement au dessus de l'épaule et se prolonge jusqu'à la base. Les dents externes des tibias antérieurs sont très-fortes ; elles sont plus longues et plus aigues que dans le *D. cylindricus*.

Je n'ai vu qu'un seul individu de cette espèce. M. Sturm me l'a communiqué comme étant le *D. cylindricus* de son Catalogue ; il est unique dans sa collection et a été trouvé en Allemagne.

34 *D. Bonelli.*

Nigro-cupreus, antennis pedibusque rufis ; clypeo bidentato , vertice transversim unisulcato ; pronoto oblongo-rotundato ; elytris elongato-oblongis, striis fortiter punctatis, apice evanescentibus , stria marginali supra humerum continuata, sed in basi ipsa obsoleta ; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 4. El. 2. Lat. 1 1/3 mill.

Cliv. dyschiria ?Bon. Obs. Ent. 2e part.

Les palpes sont d'un testacé pâle , avec le dernier article noir ; les antennes sont ferrugineuses , avec le premier article plus clair. L'épistôme est tronqué au milieu du bord antérieur ; ses dents latérales sont assez larges et avancées, rebordées en avant ; leur angle externe est relevé ; les carènes interoculaires sont peu élevées et peu tranchantes ; il n'existe sur la tête qu'un seul sillon transversal ; il est profond et sépare du front l'élèvation antérieure qui est peu proèminente ; le vertex et la partie postérieure de la tête sont très-lisses. Le corselet est très-convexe, parfaitement arrondi en arrière et sur les côtés , un peu allongé et un peu rétréci en avant ; l'impression antérieure est bien marquée , quoique fine ; le sillon longitudinal est peu distinct, surtout au milieu. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet , allongées , lègèrement dilatées après le milieu , largement arrondies à l'extrémité ; les stries sont bien marquées et couvertes de gros points ; elles deviennent plus fines à mesure qu'elles approchent du bord extérieur ; elles ne prennent naissance qu'à la hauteur des épaules ; dès le dernier tiers des élytres , les stries et les points disparaissent complètement , sauf les deux premières qui sont alors fort peu marquées , et l'extrémité des 7e et 8e ; au lieu de la 8e strie , on ne voit à la base que quelques très-petits points alignés ; le 3e intervalle ne porte que les deux points supérieurs ; l'inférieur est effacé ; la strie marginale se prolonge très-finement sur l'épaule , mais elle cesse d'être visible à la base de l'élytre. Les tibias antérieurs ne portent extérieurement que deux dents très-peu distinctes.

Italie septentrionale. 2 individus communiqués par M. Schaum ; un 3e individu venant de Hongrie m'a été communiqué par M. Chevrolat.

Je ne crois pas me tromper en regardant cet insecte comme étant la *Cliv. dyschiria* de Bonelli. Cependant cet auteur parlant de trois dents placées à la partie externe des tibias antérieurs , on ne peut regarder l'identité comme étant tout-à-fait hors de doute ; d'ailleurs le nom spécifique ayant été employé par Bonelli lui-même pour en faire le nom générique , il y aurait toujours nécessité de le remplacer.

35. *D. apicalis.*

Nigro-æneus ; clypeo bidentato, pronoto ovato antice angustato ; elytris elongatis, subcylindricis, fortiter punctato-striatis, apice sublævigatis, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis acute bidenticulatis. — Long. 3 1/2. El. 2. Lat. 1 1/2 mill.

Entièrement d'un noir-bronzé, plus clair en dessous qu'en dessus ; la partie inférieure des jambes, la base des palpes, le 1er article des antennes et quelquefois aussi le 2e, sont d'un brun un peu obscur. La tête est comme dans l'*æneus ;* le bord antérieur de l'épistôme est un peu cintré ; l'élévation antérieure est toujours prolongée en arrière en une pointe très-longue et très-aigue. Le corselet est légèrement rétréci en avant, convexe, en carré long, arrondi à tous les angles, mais les antérieurs sont cependant moins déprimés que dans le *D. Bonelli* ; dans quelques individus il est plus court et presque globuleux ; l'impression transversale antérieure est assez profonde, sans stries ni rugosités ; le sillon longitudinal finement marqué, est un peu plus enfoncé vers la base. Les élytres sont allongées, plus larges que le corselet, presque tronquées à la base, les épaules arrondies, les côtés parallèles, à-peu-près de la même largeur à l'extrémité qui est largement arrondie ; les stries ne commencent qu'au dessous des épaules et disparaissent presque entièrement à l'extrémité qui est largement arrondie ; elles sont profondes et marquées de gros points ; le 3e intervalle porte trois points plus petits que ceux des stries. La 1re des dents externes des tibias antérieurs est à peine distincte ; l'inférieure est bien marquée, triangulaire et aigue.

M. Schaum m'en a communiqué 11 individus de Dalmatie. M. Solier m'en a envoyé un sans indication de localité ; je suppose cependant qu'il vient des environs de Marseille.

36. *D. striatopunctatus.* Kollar.

Obscure æneus, subtus piceo-brunneus, antennis pedibusque brunneis ; clypeo bidentato ; pronoto subovato, antice subangustato ; elytris elongatis, subcylindricis, undique profunde punctato-striatis, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extus denticulis acutis quorum inferior spiniformis. — Long. 3 3/4. El. 2 1/2. Lat. 1 1/3 mill.

La tête est semblable à celle du *D. Bonelli* ; mais de plus elle porte entre les yeux un sillon transversal peu distinct. Le corselet est ovale, plus étroit en avant qu'en arrière ; les angles antérieurs sont peu arrondis ; l'impression antérieure est profonde et porte extérieurement de petites stries nombreuses et très-distinctes ; le sillon longitudinal qui n'est pas

très-profond, est cependant bien marqué ; il est distinctement plus enfoncé à la base qu'à l'extrémité. Les élytres sont plus larges que le corselet, allongées, un peu dilatées au milieu, presque tronquées à la base, arrondies à l'extrémité ; toutes les stries sont profondes et bien marquées dans toute leur étendue ; leur ponctuation est forte et distincte jusqu'à l'extrémité, bien qu'elle y devienne plus fine. Le dessous du corps est d'un brun-foncé ; les tibias antérieurs ont leurs dents externes plus marquées que dans aucune autre espèce ; l'inférieure surtout est très-prolongée, plus encore que dans le *D. salinus* ; l'épine terminale externe est assez fortement arquée.

Je n'en ai vu qu'un seul individu qui m'a été communiqué par M. Von Heyden comme venant de Dalmatie.

37. *D. lucidens.* Helfer.

Supra æneus, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto ovato-rotundato, in medio profunde sulcato ; elytris oblongis, subcylindricis, subtiliter striato-punctatis, interstitio tertio bipunctato, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extus obtuse bidenticulatis. —Long. 4 1/2. El. 2 1/8. Lat. 1 1/4 mill.

Noir, brillant en dessous, bronzé en dessus, plus clair sur les élytres. Les parties de la bouche, les antennes et les pattes sont d'un rouge-testacé ; les cuisses antérieures brunes. Le devant de l'épistôme est tronqué, avec son bord antérieur relevé ; les dents latérales sont médiocrement avancées ; le sillon transversal qui borde en arrière l'impression antérieure, est suivi de deux ou trois autres plus courts et beaucoup moins distincts. Le corselet est un peu plus large que la tête, en ovale court, plus étroit, plus arrondi en avant que dans le *nitidus ;* l'impression antérieure est comme dans cette espèce ; le sillon longitudinal est beaucoup plus marqué et aussi enfoncé que dans le *thoracicus.* Les élytres sont comme dans le *nitidus,* mais notablement plus courtes ; les stries sont plus profondes, tant à la base qu'à l'extrémité ; la ponctuation est plus forte et on n'aperçoit que deux points plus gros contre la 3e strie, comme dans le *D. politus.* Les dents externes des tibias antérieurs sont à peine un peu plus distinctes que dans cette dernière espèce.

Mésopotamie.

Je n'en ai vu qu'un seul individu, qui m'a été communiqué par M. Schaum sous le nom ci-dessus indiqué.

38. *D. euphraticus.*

Æneus, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto ovato-rotundato ; elytris elongatis, basi truncatis, apice angustatis, profunde striatis punctisque majoribus

in dimidia antica parte impressis, stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis acute bidenticulatis. — Long. 2 3/4. El. 1 1/2. Lat. 1 mill.

D. punctatus. Sturm Catal. 1844. p. 10.

Tout l'insecte est d'un bronzé assez clair ; les palpes et la base des antennes sont bruns. Le bord antérieur de l'épistôme est tronqué, assez largement relevé ; les dents latérales sont médiocrement proéminentes ; l'élévation antérieure est transversale, limitée à sa partie postérieure par un sillon profond que suivent plusieurs autres lignes transversales beaucoup moins distinctes et dont la dernière est placée un peu avant l'occiput. Le corselet est un peu plus large que la tête, mais plus étroit que les élytres ; il est presque arrondi, un peu prolongé et rétréci en avant ; l'impression antérieure est bien marquée, elle porte tant intérieurement qu'extérieurement de petites stries longitudinales ; le sillon du milieu est profond, surtout vers la base. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, allongées, tronquées à la base, avec les côtés presque droits et l'extrémité un peu rétrécie ; leur forme présente quelque analogie avec celle du *D. æneus*, sauf qu'elles sont proportionellement plus longues, plus tronquées à la base et moins dilatées vers le milieu ; les stries sont profondes et bien marquées dans toute leur étendue ; elles sont munies de très-gros points qui disparaissent dès le milieu ; le 3e intervalle porte trois points plus petits. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents dont la 1re est peu saillante, et l'inférieure plus prolongée que dans le *D. æneus*.

Bords de l'Euphrate. 3 individus communiqués par M. Schaum.

39. ***D. salinus.*** Erichs. (Schaum).

Obscure æneus, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto late ovato, antice subangustato ; elytris subcylindricis, crebre punctato-striatis, punctis e medio evanescentibus, stria marginali supra humerum continuata, interstitio tertio tripunctato ; tibiis anticis extus fortiter bidenticulatis. — Long. 4. El. 2 1/2. Lat. 1 3/4 mill.

D. salinus. Schaum. (*Germ.* Zeitschr. IV. 180. 2).
Clir. æneus. Ahr. n.° 4.

Base des palpes et des antennes, mandibules et pattes d'un brun-rougeâtre, ordinairement assez obscur. Bord antérieur de l'épistôme relevé au milieu, cintré ; dents latérales assez avancées ; élévation antérieure peu marquée, tronquée postérieurement par un sillon moins profond que dans la plupart des autres espèces ; le vertex porte encore une ou deux impressions transversales à peine distinctes et souvent interrompues. Le corselet est un peu plus long que large, légèrement rétréci en avant et atteint sa plus grande largeur après le milieu ; l'impression an-

térieure, qui porte de nombreuses stries longitudinales tant intérieurement qu'extérieurement, est profonde ; le sillon longitudinal est un peu moins enfoncé ; il est plus large à la base qu'au milieu et a, de chaque côté, quelques rugosités peu distinctes. Dans quelques individus, le corselet est moins large et un peu plus allongé, avec les côtés plus arrondis. Les élytres sont allongées et presque cylindriques ; elles sont un peu plus larges que le corselet et se dilatent avant le milieu ; les stries sont bien marquées dans toute leur étendue, fortement ponctuées dès leur base ; elles cessent de l'être dès le milieu ; le 3e intervalle porte trois points contre la 3e strie ; la strie marginale se prolonge jusqu'à la base en passant sur l'épaule ; elle est cependant moins distincte que dans le *D. thoracicus* ; je possède même une ♀ qui me porte aucune trace de cette strie à la base. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents bien marquées dont l'inférieure est étroite, prolongée et aigue à son extrémité, et dont la supérieure est plus marquée que dans la plupart des autres espèces du genre.

Il se trouve abondamment le long des lacs salés de l'Allemagne centrale ; on le rencontre également à Ostende, mais il n'y est pas commun.

Il en existe deux individus dans la collection Dejean : l'un sous le nom de *Cliv. œnea*, envoyé par M. Solier ; l'autre sous le nom de *Cliv. œnea var.* venant du midi de la France. M. Reiche en possède un qui a été pris en Corse.

M. de la Ferté m'en a communiqué trois individus à lui envoyés de Hongrie par M. Friwaldsky, dont deux sous le nom de *Cliv. metallica* Germ.

Bien que M. Schiödte ne signale point cette espèce dans sa Faune du Danemarck, elle existe cependant dans ce pays ; j'en ai vu un individu envoyé par M. Schiödte lui-même parmi des *D. œneus*.

40. *D. pusillus*. Dej.

Lucide œneus, nitidus ; clypeo bidentato, pronoto elongato-quadrato ; elytris elongatis, subcylindricis, striato-punctatis, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extrorsum acute bidenticulatis. — Long. 1 1/4 mill.

Dej. Spec. I. 425. 15. Icon. I. 223. pl. 24. fig. 3.

Cette espèce a été établie par Dejean sur un individu unique venant du Caucase et que j'ai en ce moment sous les yeux ; sa couleur, d'un brun-bronzé assez clair, paraît surtout dépendre de l'éclosion récente de l'insecte. Le dessous du corps, les pattes, les antennes, les palpes sont entièrement testacés. La tête, qui n'est point rugueuse comme dans le *D. angustatus*, est assez semblable à celle de l'*œneus* ; elle est cependant plus étroite ; l'élévation antérieure, en forme de cœur, est un peu moins prolongée en

arrière ; le vertex est coupé par deux sillons transversaux dont le premier, placé un peu avant le milieu des yeux, est le plus apparent ; les carènes interoculaires sont un peu moins larges, mais plus aigues que dans l'*æneus*. Le corselet est en carré allongé comme dans l'*angustatus*, mais encore moins rétréci en avant ; le sillon longitudinal est bien marqué dans toute son étendue. Les élytres sont de même forme que dans le *D. angustatus*, mais un peu plus courtes ; leurs stries sont moins profondes vers l'extrémité ; leurs points sont un peu plus gros ; les trois points du 3e intervalle sont tous bien distincts ; ils sont placés, non dans la 3e strie, mais au milieu de l'intervalle ; la strie marginale ne se prolonge pas vers la base des élytres ; elle se termine au dessous de l'épaule. Les tibias antérieurs portent à leur partie externe deux dents un peu plus étroites et plus aiguës que dans le *D. angustatus* ; la dent supérieure est plus longue que dans cette dernière espèce.

Caucase.

41. *D. angustatus*. Ahrens.

Obscure æneus ; clypeo bidentato, cavite rugoso ; pronoto oblongo ; elytris elongatis, subparallelis, crebre punctato-striatis, stria marginali per basin continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3 1/2. El. 2. Lat. 1 1/5 mill.

Cliv. angustata. Ahr. n° 9.
Cliv. sabulicola. Boisd. et *Lacord.* F. E. P. I. 163. 7.
D. pusillus. Steph. Ill. of Br. Ent. V. 370. — *Erichs.* Fn. Brdb. I. 40. 6.

D'un noir-bronzé, quelquefois d'un brun de poix, avec un reflet bronzé sur le corselet et les élytres ; les jambes, le dessous du corselet, les parties de la bouche, les antennes, l'épistôme et la partie antérieure du front, d'un brun-ferrugineux ; quelquefois les antennes sont plus obscures à l'extrémité. Le milieu de l'épistôme est un peu sinueux ; les dents latérales sont très-peu avancées ; l'élévation antérieure porte une impression dans son milieu ; elle est séparée du front par une ligne transversale profonde ; on voit ensuite entre les yeux une seconde élévation peu régulière, puis une ligne longitudinale enfoncée qui disparaît quelquefois au milieu des rugosités dont la tête entière est couverte. Le corselet est ovale, allongé, un peu rétréci après le milieu, à-peu-près d'égale largeur en avant et en arrière ; il paraît quelquefois moins allongé chez les ♀ ; l'impression antérieure est bien marquée ; elle porte, tant intérieurement qu'extérieurement, des stries longitudinales distinctes et nombreuses ; le long du sillon longitudinal qui est plus profond à la base et à l'extrémité, on remarque des rugosités transversales. Les élytres sont allongées et, à la première vue, elles paraissent cylindriques ; cependant

elles s'élargissent un peu en dessous des épaules et se rétrécissent légèrement vers l'extrémité ; leurs stries sont bien marquées dans toute leur étendue ; elles sont assez fortement et entièrement ponctuées ; la 3e porte trois points plus gros dont on ne distingue ordinairement que l'inférieur ; les autres se confondent avec les points de la strie ; la strie marginale se prolonge jusqu'à la base en passant au dessus de l'épaule. Les cuisses antérieures sont peu élargies ; les dents externes des tibias antérieurs, quoique obtuses à l'extrémité, sont très-marquées, surtout l'inférieure. Chez la ♀ le corselet ne porte aucune rugosité ; les stries des élytres sont moins enfoncées, plus fines à l'extrémité et moins fortement ponctuées.

Cette espèce, qui a été confondue avec la *Cliv. pusilla* Dej. dont elle est essentiellement distincte, ne se trouve même pas dans la collection Dejean. Elle semble habiter plus particulièrement l'Europe méridionale. Je l'ai rencontrée, mais rarement, dans les environs de Bruxelles. M. Schaum m'en a communiqué trois individus venant, l'un de Paris, l'autre d'Autriche, le 3e de Bavière ; ce dernier a tout au plus 2 mill. de longueur. M. Von Heyden en a trouvé un à Francfort et M. de la Ferté m'en a envoyé six dont quatre de Piémont et deux d'Autriche. Elle se rencontre également dans l'Allemagne centrale.

M. Chevrolat m'a communiqué l'individu d'après lequel M. Lacordaire a fait la description de sa *Cliv. sabulicola*.

42. *D. pallipennis*. Say.

Ferrugineus, palpis antennisque testaceis ; clypeo bidentato ; capite rugoso, pronoto ovato ; elytris oblongo-ovatis, striatis, striis obsoletissime punctulatis, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extus sub-bidenticulatis. — Long. 3 2/3. El. 2. Lat. 1 mill.

Say. Trans. of the Phil. Soc. N. S. p. 24. n° 7. — *Dej*. Spec. II. 480. 25.

Cet insecte, le plus élégant du genre, se distingue très-aisément de tous ses congénères par sa tête entièrement chagrinée après le sillon frontal, son corselet ovale, ses élytres en ovale-allongé, très-convexes au dessus et déprimées à la base, ses stries bien marquées et si peu distinctement ponctuées, qu'elles paraissent lisses, enfin par les deux dents externes de ses tibias antérieurs dont on distingue à peine la trace.

Amérique boréale. 1 ind. (Say). Coll. Dejean.

43. *D. curvispinus*.

Æneo-ferrugineus, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto oblongo ; elytris elongatis, subcylindricis, punctato-striatis, stria basali obsoletissima ; tibiis

anticis extus denticulatis; *spina terminali apice recurva*. — Long. 3. El. 1 2/3. Lat. 1 1/4 mill.

Entièrement ferrugineux, avec un reflet bronzé sur les élytres ; les palpes, la base des antennes et les pattes sont d'une couleur plus claire. Le dernier article des palpes labiaux est presque triangulaire comme dans le *D. thoracicus*; l'épistôme est tronqué ; son rebord est relevé et un peu échancré au milieu ; ses dents latérales sont avancées et arrondies à l'extrémité; l'élévation antérieure est hémisphérique, arrondie en avant où elle est peu distincte, brusquement tronquée en arrière par un sillon transversal profond ; le vertex ne porte aucune autre impression. Le corselet est oblong, très-convexe postérieurement où il a sa plus grande largeur, et se rétréci à peine vers l'extrémité ; les bords marginaux sont bien rebordés vers les angles antérieurs ; le sillon longitudinal est bien marqué ; il n'atteint pas le bord antérieur ; l'impression transversale antérieure est profonde et sillonée tant intérieurement qu'extérieurement par de petites stries longitudinales très-distinctes. Les élytres sont du double plus larges que le corselet, très-convexes, presque cylindriques, un peu élargies avant le milieu ; elles sont de la même largeur à la base et à l'extrémité ; les stries sont profondes sur toute leur surface ; les points sont bien marqués et disparaissent avant le dernier tiers ; on ne voit pas de traces de points sur le 3e intervalle ; la strie basale est à peine visible. La digitation qui termine extérieurement les tibias antérieurs est assez arquée; l'épine terminale interne qui est plus longue, est recourbée à l'extrémité presque aussi fortement que dans le *D. digitatus*. Les dents latérales sont comme dans le *D. æneus*.

Texas. (Galveston). 1 ind. Coll. Pilate.

44. D. sublævis.

Nigro-æneus, nitidus; clypeo bidentato; pronoto oblongo; *elytris cylindricis, punctato-striatis, stria basali indistincta ; tibiis anticis extus denticulatis, spina terminali apice subrecurva*. — Long. 3. El. 1 1/3. Lat. 1 mill.

Il ressemble beaucoup au *D. curvispinus*; les palpes, les antennes et les pattes sont entièrement testacés ; le dernier article des palpes labiaux est moins élargi ; l'épistôme est tronqué tout-à-fait droit au milieu ; la tête et le corselet sont exactement semblables, si ce n'est que ce dernier est un peu plus rétréci antérieurement et que l'impression transversale antérieure est tout-à-fait lisse. Les élytres sont moins convexes, plus étroites, plus cylindriques ; les stries sont moins profondes : elles ne prennent naissance que plus bas que les épaules et deviennent moins distinctes

vers le bord marginal et vers l'extrémité ; les points sont plus marqués ; la 8e strie n'est indiquée que par quelques points ; l'épine terminale des jambes antérieures est moins recourbée.

Texas. (Galveston). 2 ind. Coll. Pilate.

45. *D. substriatus*. Duft.

Nigro-æneus, macula apicali ferruginea ; clypeo bidentato ; thorace subgloboso, antice angustato : elytris elongatis, apice angustioribus, striis obsolete punctatis, neque basin neque apicem neque marginem attingentibus ; stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiarum anticarum dente inferiore magna, prominente. — Long. 3 1/2. El. 2. Lat. 1 1/5 mill.

Scar. substriatus. Duft. F. A. II. 8. 3.
D. bipunctatus. Grim. Steierm. Col. p. 31. n° 1.

Dessous du corps, pattes, parties de la bouche, épistôme, base des antennes et extrémité des élytres ferrugineux ; tête, corselet et élytres d'un noir-bronzé. Le milieu de l'épistôme est tronqué ; ses dents latérales sont étroites et relevées ; l'élévation antérieure est peu régulière et traversée par plusieurs rugosités ; dans les ♂ elle est moins largement séparée du front, lequel porte aussi quelques impressions transversales peu profondes et qui ne dépassent pas le milieu des yeux ; la partie postérieure de la tête est glabre. Le corselet, d'un noir brillant chez le ♂ et d'un noir mat chez la ♀, est plus long que large ; il a sa plus grande largeur après le milieu et se rétrécit bien distinctement vers l'extrémité ; l'impression antérieure est plus profonde chez le ♂ que chez la ♀ ; elle est accompagnée dans le premier sexe de petites stries longitudinales qui manquent presque complètement dans le second. Les élytres sont aussi allongées que dans le *D. angustatus*, mais plus larges à la base d'où elles se rétrécissent insensiblement jusqu'à l'extrémité ; leurs stries sont fines et munies de points assez espacés ; aucune, si ce n'est la strie suturale, ne dépasse le dernier tiers des élytres de même qu'aucune n'atteint leur base ; elles ne commencent qu'au 5e des élytres ; elles vont en s'affaiblissant vers le bord externe ; les trois ou quatre dernières sont à peine distinctes, même à l'aide d'une forte loupe ; le dernier tiers des élytres est ferrugineux, un peu obscur ; chacune d'elles porte au milieu du dernier quart une tache oblique d'une couleur plus claire. La dent inférieure de la partie externe des tibias antérieurs est grande et obtuse à l'extrémité ; la supérieure est fort peu distincte ; l'épine terminale interne est la plus forte et la plus longue ; elle est légèrement courbée à l'extrémité.

M. Schaum m'en a communiqué deux individus envoyés par M. Grimmer et provenant de Styrie, et M. de la Ferté trois venant de Piémont.

46. *D. rufus*. Chevr. (Coll.).

Ferrugineus, palpis antennisque testaceis ; clypeo antice truncato, angulis rotundatis ; capite ante frontem transversim subsulcato ; pronoto globoso ; elytris oblongo-ovatis, punctato-striatis, apice sublævibus, interstitio tertio unipunctato, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 3. El. 1 3/4. Lat. 1 3/5 mill.

Ferrugineux ; palpes et antennes testacés. L'épistôme, finement rebordé, est tronqué en avant et ses angles sont arrondis ; l'élévation antérieure est légèrement arrondie en avant, tronquée en arrière par un sillon transversal très-peu profond et que l'on ne distingue qu'à peine. Le corselet est globuleux, avec les angles antérieurs obtus, mais peu déprimés ; le bord antérieur est très-légèrement échancré ; le sillon longitudinal est profond dans toute son étendue ; l'impression antérieure est ponctuée et noirâtre. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, en ovale oblong, munies de stries dont les deux premières parviennent seules (et à peine) jusqu'à l'extrémité, et dont les points sont assez écartés les uns des autres ; on ne remarque qu'un seul point sur le 3e intervalle ; il est situé au dernier tiers des élytres. Les épaules sont proéminentes et la strie marginale se prolonge très-distinctement jusqu'à la base. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents aigues, mais peu longues.

Cuba. 1 ind. (Havane). Coll. Chevrolat.

47. *D. bimaculatus*. Bon

Viridi-æneus, antennis pedibusque rufis ; pronoto globoso ; elytris elongatis, ante apicem macula magna obliqua discoidali flavescente, striis 2 suturæ proximis striato-punctatis, abbreviatis. — Long. 3. Lat. 4/5 mill.

Bon. Obs. Ent. 2e p.

Cet insecte, qui paraît à peine distinct du *D. substriatus*, en diffère cependant en ce que les deux premières stries sont seules visibles ; elles commencent après la base et se terminent aux 2/3 des élytres.

Il habite les bords du Rhône.

Je ne l'ai point vu en nature et me suis borné à reproduire les indications de Bonelli.

48. *D. cylindricus*. Dej.

Nigro-æneus, nitidus ; clypeo bidentato ; pronoto ovato ; elytris elongatis, cylindricis, fort ter punctato-striatis, interstitio tertio tripunctato, stria mar-

ginali per basin continuata ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis.—Long. 4 1/4. Et. 2. Lat. 1 1/4 mill.

Dej. Spec. I, 423. 11. Icon. I. 221. pl. 23. fig. 6. — *Steph.* I. 41. 4.

D'un noir-bronzé ; le dessous du corps et le corselet un peu plus obscurs ; les pattes, les parties de la bouche, le bord antérieur de l'épistôme et le 1er article des antennes bruns ; les cuisses, le dernier article des palpes labiaux et les deux derniers articles des palpes maxillaires plus foncés. Le bord antérieur de l'épistôme est coupé presque droit ; les dents latérales sont avancées, arrondies à leurs angles et rebordées ; les sillons longitudinaux sont profonds et les carènes interoculaires tranchantes ; l'élévation antérieure est rétrécie postérieurement ; elle est suivie de plusieurs lignes transversales peu profondes et quelquefois assez peu distinctes. Le corselet est ovale, encore plus allongé que dans le *D. politus*, mais un peu moins rétréci au bord antérieur qui est tronqué ; les angles antérieurs sont droits, avec leur extrémité arrondie ; la ligne longitudinale est plus profonde que dans le *politus* ; l'impression antérieure est plus distincte et elle est munie de petites stries longitudinales plus nombreuses, mais qui ne la dépassent point ; le long du bord postérieur on distingue de petites lignes longitudinales enfoncées et bien marquées. Les élytres, qui sont presque tronquées antérieurement et ont les epaules un peu arrondies, ont leurs côtés bien parallèles et sont cylindriques ; leur extrémité, qui est arrondie, est à peine plus étroite que leur base ; les stries sont profondes dans toute leur étendue et elles sont munies de points plus gros que dans les espèces voisines ; vers l'extrémité, ces points deviennent un peu plus petits ; à la partie interne de la 3e strie, on voit trois points un peu plus gros ; la 8e strie est indiquée par quelques points alignés vers la base ; au milieu de l'élytre elle cesse d'être distincte, pour ne reparaître qu'à l'extrémité ; la strie marginale passe au dessus de l'épaule et longe la base de l'élytre jusqu'à l'écusson. Les dents externes des tibias antérieurs sont bien marquées, surtout l'inférieure ; elles égalent celles du *D. thoracicus* ; les epines terminales sont d'égale longueur ; l'interne est plus grêle ; l'externe est courbée à l'extrémité.

J'en ai examiné deux individus de la collection Dejean, et un 3e qui m'a été communiqué par M. Schaum ; tous les trois venant du midi de la France.

La collection Dejean renferme un autre exemplaire provenant de la même partie de l'Europe et qui diffère sous plusieurs rapports du type que je viens de décrire. Ce n'est cependant, je pense, qu'une variété ♀. Il est d'un brun obscur un peu bronzé ; le corselet est aussi allongé que dans le *D. extensus*, mais moins large à la base et moins rétréci en avant ; l'impression antérieure du corselet est moins nette ; elle est remplie par une dépression couverte de stries longitudinales beaucoup plus fortes et

que deux proéminences obtuses à l'endroit que ces dents devraient occuper ; cependant chez quelques individus elles sont plus marquées.

Cette espèce paraît répandue dans toute l'Europe. Bien que Dejean ne signale point sa présence en Espagne, sa collection en renferme un individu provenant de ce pays. Un autre individu, envoyé de St.-Pétersbourg par M. Mannerheim, y est inscrit sous le nom de *thoracicus*. M. de la Ferte m'en a communiqué des exemplaires des Pyrénées et du Piémont.

M. Schaum en possède un, venant de Styrie, dont le corselet est plus court que dans le type, plus convexe et presque globuleux.

51. *D. strumosus*. Illig.

Nigro-æneus, nitidus ; ore, palpis, antennisque testaceis, pedibus rufis ; clypeo bidentato ; pronoto elongato-subquadrato ; elytris subbylin tricis, fortiter punctato-striatis, interstitio tertio tripunctato, stria margin li per basin continuata ; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 5 1/2. El. 2 3/4. Lat. 1 3/4 mill.

Erichs. F. Brand. I. 38. 3. — *Dej.* Spec. I. 422. 9.

Le bord antérieur de l'épistôme est tronqué au milieu ; son rebord est un peu relevé ; les dents latérales sont proéminentes et leurs angles sont droits ; les carènes interoculaires sont tranchantes ; l'élévation antérieure est transversale ; en avant on distingue une dépression et en arrière un sillon large et profond du milieu duquel s'élèvent quelques rugosités transversales ; le vertex n'est interrompu par aucune autre impression. Le corselet est plus long que large ; sa plus grande largeur est vers sa base ; il se rétrécit vers l'extrémité dont les angles sont déprimés et arrondis ; l'impression antérieure est large et profonde ; le sillon longitudinal est plus marqué à l'extrémité et surtout à la base, qu'au milieu. Les élytres sont presque cylindriques ; elles ont la même forme que chez le *politus* ; les stries sont plus profondes et surtout plus fortement ponctuées que dans cette espèce ; les points deviennent moins gros et moins serrés vers l'extrémité ; les 2e et 3e stries ne commencent que plus bas que l'épaule ; le 3e intervalle porte trois points bien distincts ; la strie marginale se prolonge sur l'épaule le long de la base. Les tibias antérieurs portent deux dents aussi peu marquées que chez le *politus*.

Je n'en ai vu qu'un seul individu faisant partie de la collection Dejean, où il est indiqué comme variété de la *Cl. nitida*. Dejean l'avait reçu de M. Schüppel comme venant du Caucase.

52. *D. arenosus*. Steph.

Brunneo-æneus ; clypeo bidentato, pronoto obl ngo, angulis anticis deflexis ;

elytris oblongo-ovatis, profunde punctato-striatis, interstitio tertio bipunctato, stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis extus obtuse bidenticulatis. — Long. 4 3/4. El. 2 1/2. Lat. 1 1/2 mill.

Steph. Ill. of Br. Ent. I. 42, 5.

Cet insecte, que M. Hope m'a communiqué comme étant le *D. arenosus* (Leach) Steph. et auquel se rapporte la description de l'auteur anglais, ressemble assez par la forme et la taille au *D. nitidus*. Il a les élytres d'un brun-bronzé, le corselet noir, les pattes et les antennes brunes, avec la base de ces dernières d'une couleur plus claire. L'épistôme est bidenté; les dents latérales sont un peu plus avancées que dans le *nitidus*; les impressions de la tête sont moins distinctes que dans cette espèce. Le corselet est aussi long que dans le *politus*, mais moins rétréci en avant et beaucoup plus déprimé aux angles antérieurs; le sillon longitudinal du corselet est plus profond, l'impression transversale moins marquée. Les élytres sont aussi larges que dans le *D. nitidus*, mais plus courtes, plus arrondies à leur extrémité; leurs stries, très-larges et très-enfoncées (plus même que chez le *D. riparius*), conservent la même profondeur jusqu'à l'extrémité, et sont munies de points un peu plus gros que dans le *nitidus*; je n'ai pu distinguer que deux points sur le 3e intervalle; la strie marginale s'arrête au dessous de l'épaule. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux dents qui ne sont pas plus distinctes que dans le *D. politus*.

Je n'ai vu de cette espèce qu'un individu récemment transformé et qui a été trouvé en Angleterre.

53. *D. nitidus*. Dej.

Æneus, nitidus; clypeo bidentato; pronoto subrotundato; elytris oblongo-ovatis, punctato-striatis, interstitio tertio tripunctato, stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis extus obtuse bidenticulatis. — Long. 4 1/2, 5 1/4. El. 2 1/2, 3. Lat. 1 1/2, 2 mill.

Dej. Spec. I, 421. 9. Icon. I, 218. pl. 23. fig. 4. — *Ahr.* n° 1. — *Boisd.* et *Lac.* F. E. P. 161. 2. — *Erichs.* F. B. I. 37. 2. — *Heer.* Fn. Helv. I. 17. 2.

Sc. thoracicus? Oliv. III. 36. p. 14. n° 17. Tab. 2. f. 14. (excl. syn.). — *Herbst.* Natursyst. X. 272. n° 28. Tab. 177. f. 6. (excl. syn. Fab. Ross. et Illig.). — *Duft.* F. A. II. 6. 2.

D'un bronzé un peu verdâtre, cuivreux ou même bleu d'acier en dessus, presque noir en dessous; les pattes, les parties de la bouche et la base des antennes d'un rouge brun; l'extrémité des mandibules est noirâtre; la partie supérieure des bords latéraux de la tête est ferrugineuse, de même que le 1er article des antennes et la base des deux ou trois suivans. Le labre est un peu plus étroit et moins profondément échancré que dans le *D. thoracicus*; le bord antérieur de l'épistôme est ordinairement

un peu arqué au milieu ; quelquefois cependant il est coupé tout-à-fait droit ; il est rebordé, de même que les dents latérales qui sont un peu plus larges et dont l'angle interne est moins saillant que dans le *thoracicus* ; les deux sillons longitudinaux sont plus profonds et moins rugueux que dans cette espèce ; les carènes interoculaires sont plus relevées ; l'élévation antérieure est en demi-cercle et séparée du vertex par une impression transversale profonde ; quelquefois cependant elle se prolonge en arrière en une ligne élevée, comme dans le *chalceus*, mais toujours moins étroite que dans cette espèce ; le vertex porte ensuite au milieu une courte impression, puis deux lignes transversales assez larges, mais peu profondes et quelquefois très-peu distinctes. Le corselet est très-convexe, en ovale court, tronqué en avant où il est plus large que la tête, très-arrondi et distinctement élargi en arrière ; il est plus allongé et plus rétréci en avant que dans le *thoracicus* ; ses côtés forment avec le bord antérieur un angle ouvert dont l'extrémité est très-arrondie ; la ligne longitudinale est profonde et bien marquée dans toute son étendue ; elle est longée par de petites stries transversales et ondulées ; l'impression antérieure, qui est bien marquée, porte des stries semblables, mais plus nombreuses, disposées longitudinalement et envahissant ordinairement l'espace compris entre l'impression et le bord antérieur ; le long du rebord postérieur on remarque une ligne de points assez gros. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, ovales-allongées, presque tronquées en avant, arrondies en arrière, dilatées un peu au dessous de l'épaule, ensuite presque parallèles ; les stries sont aussi profondes à l'extrémité qu'à la base ; elles sont moins marquées vers l'extérieur ; leurs points sont plus gros que dans le *thoracicus* ; ils diminuent de grosseur dès le milieu des élytres et deviennent très-peu distincts dès le dernier tiers ; avec une forte loupe on peut cependant reconnaître qu'il en existe encore à l'extrémité dans les 1re et 2e stries ; la 1re strie porte a sa base un gros point ; la 3e strie en a intérieurement trois semblables dont le 1er est situé au premier quart, le 2e un peu avant le milieu, le 3e au dernier tiers de l'élytre ; quelquefois le point supérieur manque ; la strie marginale, qui s'approfondit dans sa moitié supérieure, ne dépasse pas l'épaule. Les cuisses antérieures sont très-épaisses ; les tibias sont également plus larges que dans les autres espèces ; les deux dents antérieures, qui sont d'égale dimension entre elles, sont petites et très-peu avancées.

Je possède un individu, venant de Paris, dont les élytres sont un peu plus allongées et plus parallèles que dans le type. Il appartient cependant bien certainement à cette espèce.

Le *D. nitidus* est répandu dans toute l'Europe.

54. *D. chalceus.* Erichs.

Æneus, nitidus; clypeo bidentato; pronoto subovato; elytris elongatis, subcylindricis, punctato-striatis, striis apice minus impressis, interstitio tertio bipunctato, stria marginali ad humerum abbreviata; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 5. El. 2 3/4. Lat. 1 3/4 mill.

Erichs. Fn. Brd. I. 36. 3. — *Schaum.* (*Germ.* Zeitsch. IV. 180. n° 1)

Le bord antérieur de l'épistôme est plus largement rebordé que dans le *nitidus*; les dents latérales sont un peu plus avancées; l'élévation antérieure du front est en demi-cercle; elle porte deux dépressions, l'une au devant, l'autre au milieu; elle est tronquée à sa partie postérieure par une ligne transversale profonde, interrompue au milieu par une petite carène élevée très-étroite qui unit au vertex l'élèvation antérieure; le vertex porte entre les yeux deux lignes transversales ordinairement assez apparentes. Le corselet est de la longueur et de la forme de celui du *nitidus*, mais il est plus allongé et un peu plus rétréci en avant; ses angles antérieurs sont plus droits; l'impression transversale antérieure est un peu moins distincte; elle porte aussi quelques stries longitudinales, mais ces stries, moins apparentes et moins nombreuses, ne pénètrent pas dans l'espace compris entre l'impression et le bord antérieur. Les élytres sont plus allongées que chez le *nitidus*, moins élargies au dessous de l'épaule, et presque parallèles; les stries sont également bien marquées, mais elles deviennent plus fines vers l'extrémité; leurs points sont un peu plus petits; dans aucun des trois individus que j'ai comparés, je n'ai trouvé plus de deux gros points sur la 3e strie; le 1er manquait comme cela arrive ordinairement chez le *politus*. Les cuisses antérieures sont aussi épaisses que dans le *D. nitidus*; les dents externes des jambes antérieures ne sont pas plus saillantes.

Cette espèce se trouve, mais toujours assez rarement, le long des lacs salés de l'Allemagne centrale (Schaum), dans les environs de Berlin (Erichson), en Crimée (Erichson): je l'ai également rencontrée, mais une seule fois, à Ostende.

55. *D. edentulus.*

Niger, nitidus, elytris æneis, palpis, antennis pedibusque brunneis; clypeo bidentato; pronoto elongato, antice angustissimo; elytris subcylindricis, antice fortiter punctato-striatis, interstitio tertio impunctato, stria marginali ad humerum desinente; tibiis anticis extus vix denticulatis. — Long. 7. El. 3 3/4. Lat. 2 1/8 mill.

Noir brillant, bronzé sur les élytres; palpes, antennes en entier de couleur brune de même que les pattes dont les antérieures sont un peu

plus foncées. Les dents latérales de l'épistôme sont larges et peu avancées ; le bord antérieur est droit et largement rebordé ; l'élévation antérieure est triangulaire, rétrécie en avant et tronquée en arrière ; elle porte au milieu un point enfoncé ; elle est suivie d'un sillon transversal profond auquel succèdent cinq autres moins marqués, situés à égale distance les uns des autres ; à la hauteur de la partie postérieure des yeux, on voit de chaque côté le commencement de deux autres sillons moins profonds et interrompus sur l'occiput ; le sommet de la tête, qui paraît lisse, porte cependant quelques très-petits points épars, à peine marqués et que l'on ne distingue que difficilement, même à l'aide d'une très-forte loupe ; les carènes oculaires sont peu élevées dans leur partie antérieure. Le corselet est oblong, assez allongé, aussi large en arrière que les élytres, et se rétrécit jusqu'à sa partie antérieure où il n'est pas plus large que la tête ; le sillon longitudinal est bien distinct, quoique finement marqué ; l'impression antérieure est beaucoup plus enfoncée et elle porte en arrière des stries courtes, très-larges, mais peu profondes. Les élytres sont presque deux fois aussi longues que le corselet, convexes, subcylindriques, à peine élargies vers le milieu, un peu rétrécies vers l'extrémité ; leur base est très-arrondie ; elles portent des stries bien marquées, fortement ponctuées, qui commencent plus bas que l'épaule et sont à peine distinctes à l'extrémité, sauf les deux premières ; elles cessent d'être ponctuées un peu après le milieu ; je n'ai remarqué aucune trace de points sur le 3e intervalle ; la strie marginale, qui est profonde, ne dépasse pas l'épaule ; le bord inférieur est brunâtre dans sa dernière moitié. Les tibias antérieurs portent à peine des traces des deux denticulations.

Texas. (Galveston). 1 ind. Coll. Pilate.

56. *D. oblongus*. Sturm.

Niger, nitidus ; clypeo bidentato, pronoto ovato ; elytris æneis, subcylindricis, elongatis, punctato-striatis, interstitio tertio bipunctato, stria marginali ad humerum abbreviata ; tibiis anticis extrorsum mermibus. — Long. 6. El. 4 1/2. Lat. 2 1/4 mill.

Sturm. Cat. 1844. p. 10.

C'est le plus grand des *Dyschirius* européens. Il est en dessous d'un noir brillant, qui se change en bronzé brillant sur les élytres ; cette teinte se réflète même un peu sur le corselet. L'épistôme est rebordé en avant ; l'élévation antérieure s'élargit de devant en arrière où elle occupe toute la surface du front ; elle est assez rugueuse, et s'unit par un prolongement très-étroit à une seconde élévation transversale beaucoup plus petite, en arrière de laquelle on voit deux sillons transversaux peu marqués. Le corselet est en avant de la largeur de la tête avec les yeux ; il s'élargit

jusqu'au delà du milieu, puis il s'arrondit fortement ; il a à-peu-près la même forme que dans le *D. politus* ; l'impression transversale antérieure est peu marquée et couverte de rugosités longitudinales ; le sillon du milieu est encore moins enfoncé que dans le *politus*, surtout antérieurement ; on voit de chaque côté quelques rugosités peu distinctes. Les élytres sont allongées, presque cylindriques, un peu rétrécies en arrière ; leurs stries sont bien marquées dans toute leur étendue ; les points, qui sont de la même grosseur que dans le *nitidus*, ne se distinguent au-delà du dernier tiers des élytres qu'à l'aide d'une forte loupe ; la 8e strie est remplacée à sa base par des points alignés ; la 3e strie porte des points plus gros dont le 1er est plus rapproché de la base que de l'extrémité. Les tibias antérieurs ne portent pas de dents à leur bord externe ; on ne remarque que deux ondulations aux endroits qui, dans les autres espèces, sont denticulés.

Un individu, unique dans la collection de M. Sturm, et désigné par cet entomologiste, sous le nom ci-dessus. Il a été trouvé dans la Russie méridionale.

57. *D. inermis.* Curtis.

Nigro-cœrulescens, nitidus ; pronoto subovato ; elytris subparallelis, striato-punctatis, stria tertia tripunctata ; tibiis anticis extrorsum inermibus.—Long. 5 mill.

Curtis. Guide Gen. 32. n° 1. Br. Ent. t. VIII. pl. 354.

C'est l'un des plus grands insectes européens appartenant à ce genre. Il est d'un noir-bleuâtre brillant ; les parties de la bouche, la base des antennes sont ferrugineuses, les jambes brunes. Le corselet est plus allongé et plus étroit postérieurement que chez le *D. thoracicus* ; les élytres sont plus parallèles que dans cette espèce ; leurs huit stries sont bien marquées dans toute leur étendue, et la 3e porte trois gros points ; les tibias antérieurs n'offrent aucune trace de dents à leur bord externe ; l'épine terminale externe est plus forte que l'autre et courbée.

Je n'ai point vu en nature cet insecte dont j'ai donné les caractères d'après la figure et la description de M. Curtis. Il a été trouvé en Angleterre, mais l'auteur ignore dans quelle localité. Il a beaucoup de rapports avec le *D. oblongus*, mais ce dernier est plus grand, ses élytres sont plus allongées, la 8e strie n'est pas entière, la 3e ne porte que deux gros points et les tibias antérieurs sont distinctement ondulés extérieurement.

58. *D. brevicarinatus.*

Ferrugineus, palpis, antennis pedibusque testaceis ; clypeo late emarginato, verticis sulcis duobus longitudinalibus abbreviatis ; pronoto convexo, subqua-

drato, basi angustato ; elytris elongatis, subcylindricis, striato-punctatis, apice lævigatis, stria marginali supra humerum neque basi continuata ; tibiis anticis extus bidenticulatis. — Long. 2 2/3. El. 1 1/2. Lat. 2/3 mill.

D'un ferrugineux brillant, un peu plus clair à l'extrémité des élytres; les pattes testacées, les palpes et les antennes d'un testacé plus pâle. L'épistôme est déprimé, largement échancré en avant ; ses angles sont arrondis et peu proéminens ; les carènes oculaires sont élevées presqu'en forme de tubercules, lisses et très-courtes ; les deux sillons longitudinaux sont profonds et viennent aboutir contre le milieu des yeux ; la tête ne porte aucun sillon transversal. Le corselet est convexe, presque carré, tronqué en avant ; ses angles antérieurs sont obtus ; les côtés sont droits et s'élargissent jusqu'aux angles postérieurs, puis se rétrécissent ensuite jusqu'à la base où l'on remarque une strie transversale munie d'un rang de gros points ; les sillons longitudinal et transversal sont bien marqués. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, allongées, avec la base et les épaules arrondies, les côtés presque droits, l'extrémité rétrécie; leur forme est à-peu-près la même que dans le *D. apicalis*, mais elles sont plus étroites à l'extrémité ; leurs stries sont bien marquées et les points profonds ; les uns et les autres disparaissent au dernier quart ; la strie marginale dépasse l'épaule, puis s'arrête brusquement sans se prolonger le long de la base. Les tibias antérieurs sont munis extérieurement de deux petites dents conformées comme dans le *D. æneus*.

Cuba. 2 ind. Coll. Putzeys.

G. CRYPTOMMA.

Ce genre, qui paraît assez voisin des *Lachenus*, en diffère par les caractères suivans :

La dent du *menton* et ses lobes latéraux sont simplement tronqués à leur sommet ; les côtés sont coupés droit. Les *antennes*, qui ne dépassent pas le milieu du corselet, sont plus épaisses à l'extrémité qu'à leur base ; elles sont pubescentes à partir du 3e article ; le 1er article est gros et cylindrique, échancré obliquement au bout qui est saillant extérieurement ; le 2e est plus court et plus étroit que le 1er, plus large à l'extrémité qu'à la base ; les trois suivans vont en diminuant de longueur ; les autres sont globuleux ; le dernier est un peu plus long et plus étroit vers l'extrémité. L'*épistôme* est échancré en demi-cercle. Les *yeux* ne sont pas visibles en dessus ; ils sont cachés par un rebord saillant des parties latérales de la tête ; ils sont fort petits et d'un testacé très-clair. Le *corselet* est presque carré, peu convexe ; sa base est peu prolongée. Les *élytres* sont soudées, oblongues, munies de petites côtes nombreuses. Les articles des *tarses*

sont plus larges que dans le *G. Lachenus* ; les 2e, 3e et 4e sont triangulaires.

C. multistriatum. Buquet. (Coll.).

Nigrum, parum nitidum ; capite pronotoque rugosis ; clypeo emarginato ; oculis minimis, supra non perspicuis, testaceis ; pronoto subquadrato, in basi ipsa angustato, antice emarginato, margine laterali serrato ; elytris oblongis, basi pronoto angustioribus, dein latioribus, costis elevatis foveolisque inter costas notatis ; tibiis anticis extus bidigitatis, unidentatis, intermediis calcaratis. — Long. 10. El. 5 1/3. Lat. 3 mill.

Tout l'insecte est d'un noir assez terne, à l'exception du dessous du corselet, des parties de la bouche, des antennes et des tarses, qui sont bruns. La dent du menton porte dans son milieu une ligne longitudinale élevée qui s'élargit en se rapprochant de la base. Les mandibules sont rugueuses en dessus. Le labre porte au milieu une impression longitudinale assez profonde, et le long du bord antérieur une rangée de gros points enfoncés. L'épistôme est échancré au milieu ; ses ailes forment deux angles aigus un peu arrondis à l'extrémité, mais elles sont plus reculées que la partie antérieure de l'épistôme ; en avant du front on voit, mais à peine, un sillon transversal irrégulier ; toute la surface de la tête est couverte de fortes rugosités qui s'entrecroisent, et qui sont un peu moins distinctes en avant et en arrière. Le corselet est un peu plus long que large, très-légèrement rétréci en avant, fortement échancré à son bord antérieur ; les bords marginaux sont parallèles, fortement et irrégulièrement dentelés, surtout vers les angles antérieurs qui sont obtus ; les angles postérieurs sont parfaitement arrondis ; la base est médiocrement prolongée par deux lignes obliques ; au milieu elle est tronquée ; toute sa surface est fortement chagrinée ; le sillon longitudinal est de la même profondeur dans toute son étendue ; il ne touche ni la base, ni le bord antérieur ; l'impression transversale est très-rapprochée du bord ; le long du bord marginal s'échappent quelques poils roux dirigés en arrière. L'écusson est cordiforme, arrondi en arrière, chagriné et divisé par un sillon longitudinal. Les élytres sont de 2/3 plus longues que le corselet, plus étroites que lui à leur base ; elles s'élargissent ensuite jusques après leur dernier tiers ; leur extrémité, qui est arrondie, reste plus large que la base ; elles portent huit côtes saillantes dont les six premières sont obtuses ; la 7e est beaucoup plus saillante et forme, surtout vers la région humérale, une carène aigue ; entre cette côte et le bord marginal on en remarque une 8e plus tranchée que les premières, mais moins élevée que la 7e ; la 7e et la 8e côtes se réunissent sur l'épaule d'où elles se dirigent jusqu'à la base ; elles se réunissent également à l'extrémité un peu avant la suture ; les intervalles entre toutes les côtes sont marqués de très-gros points arrondis et

espacés ; les 3e, 5e et 7e côtes portent trois points à peine plus gros que ceux des intervalles et qui se confondent parfois avec eux ; le rebord externe des élytres est rugueux et porte à la base deux rangs de gros points dont un seul se prolonge jusqu'à l'extrémité. Les tibias antérieurs sont sillonés en dessus, bidigités extérieurement et en outre munis d'une dent obtuse ; les tibias intermédiaires qui ne portent que quelques poils courts et raides ont extérieurement, avant l'extrémité, un fort éperon dont le bout est échancré en dessous.

J'ai vu de cet insecte trois individus : deux rapportés de la Nouvelle Grenade par M. Goudot et faisant partie des collections Reiche et La Ferté, le troisième rapporté de Colombie par M. Rostaine et appartenant à M. Buquet.

G. LACHENUS.

Menton presque carré ; ses lobes latéraux tronqués obliquement à leur partie supérieure, arrondis extérieurement, aussi élevés que la dent du milieu qui est large, tronquée à son sommet et échancrée au milieu. La *languette*, qui est cachée derrière la dent du menton, s'élargit à son extrémité, où elle est tronquée et munie de deux soies courtes et divergentes. Les *palpes* sont courts et assez épais ; le 2e article des labiaux est très-court, conique ; le 3e long, courbé et dilaté intérieurement ; le 4e est un peu plus court que le 2e ; il est un peu élargi intérieurement et se rétrécit de la base à l'extrémité qui est presque pointue. Le 2e article des palpes maxillaires est semblable au 3e des palpes labiaux ; le 3e est court, conique ; le dernier est semblable à l'article terminal des palpes labiaux. Les *mandibules* ne diffèrent pas de celles qui caractérisent les *Dyschirius*, si ce n'est qu'elles sont moins aigues et ont leurs bords tant interne qu'externe assez rebordés ; toute leur surface est rugueuse. Le *labre* est transversal, sinué à sa partie antérieure ; ses angles sont arrondis et garnis de poils raides. Le 1er article des *antennes* est le plus long, cylindrique ; le 2e en massue ; le 3e conique, de moitié plus court ; les autres manquent. Les *yeux* sont très-proéminens. Le *corselet* est en carré allongé, à peine prolongé à la base. *Écusson* en demi-cercle. *Élytres* en ovale allongé. *Cuisses* antérieures larges et très-comprimées ; tibias digités à l'extrémité et à leur bord externe. *Tarses* courts, à articles à peine élargis à leur extrémité ; le 1er est le plus long ; les deux suivans sont égaux entre eux ; le 4e est un peu plus étroit et un peu plus long que le 3e ; le dernier est de la longueur du premier, cylindrique ; les crochets sont petits, grêles et peu divergens ; l'épine terminale est très-courte ; les tibias intermédiaires sont armés extérieurement d'un éperon recourbé et dont l'extrémité est échancrée en dessous.

1. *L. impunctipennis.*

Niger, nitidus, palpis testaceis, antennis labroque brunneis; clypeo late emarginato, occipite transversim sulcato; pronoto oblongo, subquadrato, sulculis basalibus duobus impresso; elytris oblongis, basi apiceque angustatis, profunde sulcatis, impunctatis; tibiis anticis bisulcatis, extus unidigitatis atque dente obsoleto armatis. — Long. 9. El. 4 1/4. Lat. 2 1/2 mill.

Noir, avec les palpes testacés, les antennes et le labre bruns. Le labre porte, le long du bord antérieur, quatre gros points, et au milieu une légère impression longitudinale. L'épistôme est rebordé largement, mais peu profondément échancré ; ses angles ne se prolongent nullement ; ils sont seulement un peu relevés et obtus ; l'élévation antérieure est tronquée en arrière par un sillon profond ; elle est arrondie sur les côtés et en avant où elle devient moins distincte ; les carènes oculaires sont lisses ; elles portent au milieu une petite impression allongée ; en arrière des yeux, la tête est traversée par un sillon très-marqué. Le corselet est plus long que large, légèrement rétréci en avant ; depuis ses angles postérieurs qui sont marqués par un petit tubercule, jusqu'à la base, il est coupé obliquement ; la base même est légèrement échancrée au dessus de l'écusson ; les côtés se rétrécissent un peu après le premier tiers ; ils sont ensuite presque parallèles ; les angles antérieurs sont obtus ; le bord antérieur, qui est d'abord tronqué près des angles, est échancré au milieu pour recevoir la tête ; le sillon longitudinal, qui part de la base sans atteindre le bord antérieur, est bien marqué dans toute son étendue ; il est un peu plus large en avant ; l'impression transversale est profonde ; elle n'atteint pas le bord antérieur et est interrompue au milieu ; de chaque côté de la base on distingue une impression peu profonde qui remonte obliquement jusqu'au delà du premier quart du corselet. Les élytres sont en ovale allongé régulier, plus étroites à la base qu'en arrière ; leurs stries, non ponctuées, sont également profondes de la base à l'extrémité ; les intervalles sont saillans et forment des côtes arrondies ; le bord marginal est longé par un double rang de points enfoncés et de granulations ; le rebord inférieur porte près des épaules deux séries de gros points. L'abdomen, et surtout ses deux derniers segmens, sont fortement ponctués. Les tibias antérieurs portent deux sillons longitudinaux : la digitation terminale est plus forte que l'épine correspondante ; la digitation externe est de moitié plus courte ; on remarque au dessus une dent très-obtuse.

Je n'ai vu de cet insecte qu'un seul individu qui m'a été communiqué par M. Dupont comme venant d'Amérique, sans autre indication ; je suppose qu'il est originaire de l'Amérique centrale.

G. PYRAMIS.

Languette cornée, pyramidale; ses paraglosses membraneuses, de la même longueur, étroites, aigues. Tous les *palpes* courts : *labiaux* à 3e article en massue courte et fortement renflée à l'extrémité ; 4e article plus petit, en ovale très-court ; *maxillaires* à 2e article deux fois plus long que le premier, fortement renflé vers l'extrémité ; 3e de la longueur du premier, triangulaire, dilaté en dedans ; dernier deux fois plus long, en ovale plus allongé, et plus large à la base que le dernier des palpes labiaux. *Menton* transversal ; dent du milieu en fer de lance, plus élevée que les lobes latéraux qui sont tronqués obliquement à leur sommet. *Mandibules* larges, planes, recourbées comme dans le *G. Dyschirius*. *Labre* arrondi sur les côtés, avancé au milieu. *Épistôme* tronqué. *Antennes* courtes, composées d'articles très-épais, grossissant un peu vers l'extrémité ; le 1er est gros et cylindrique ; les 2e et 3e sont plus courts, triangulaires, égaux entre eux ; le 3e est globuleux, un peu rétréci à la base ; les suivans sont parfaitement globuleux ; le dernier est un peu prolongé et atténué à l'extrémité. Les *yeux* sont enfoncés en avant et en arrière, dans un orbite formé par les rebords de la tête ; ils sont transversaux, plus dilatés en dessus qu'en dessous ; la tête est fort renflée en arrière des yeux en une sorte de bourrelet après lequel elle se rétrécit brusquement. Le *corselet* est en carré allongé. Les *élytres* sont cylindriques ; toutes leurs stries partent de la base ; le 6e intervalle se prolonge en une sorte de côte élevée qui se rend jusqu'à l'extrémité, en laissant un sillon profond entre elle et le bord externe ; les cinq premières stries, toutes isolées à leur extrémité, se prolongent jusque contre cette côte. Les *cuisses* antérieures sont larges, comprimées ; les *tibias* triangulaires, échancrés intérieurement, portent au dessus et au dessous de cette échancrure une épine assez courte ; leur bord externe se termine en une digitation de même longueur que l'épine interne, et au dessus de laquelle on remarque deux dents dont l'inférieure est la plus longue ; les tibias intermédiaires, qui sont profondément sillonés et munis de poils spiniformes, ont, un peu au dessus de l'extrémité, un éperon recourbé, large et tronqué.

1. *P. crassicornis.*

Atra, nitida, antennis piceis; clypei alis prominulis, subrotundatis; vertice lævi, fronte antice transversim profunde sulcata; pronoto subplano, elongato, antice sublangustato, basi rotundato vix prolongato, margine antico late emarginato, sulcis longitudinali transversalique profundis, hoc ante marginem abbreviato, basi utrinque impressione oblonga obsoleta notato;

elytris pronoto vix latioribus, elongatis, cylindricis, humeris apiceque rotundatis, punctato-sulcatis, punctis majoribus versus apice impressis; segmentis abdominalibus extus basique punctatis; tibiis anticis sulcatis, extus bidentatis. — Long. 9. El. 4 1/8. Lat. 2 1/3 mill.

Nouvelle Grenade. 1 ind. Coll. La Ferté.

G. CLIVINA.

Le genre *Clivina* a été établi par Latreille qui en indiqua ainsi les caractères (1) :

« Antennes moniliformes; 2e article plus long que le 3e; mandibules » sans dentelures au côté interne; lèvre en languette allongée, avec 2 » oreillettes; jambes antérieures palmées dans quelques. »

Dans les additions de l'ouvrage (p. 411), Latreille rectifia l'indication relative aux mandibules et il dit : « mandibules sans dents bien remar- » quables au côté interne. »

Ce genre comprenait alors les *Tenebrio fossor*, Lin. (*Scarites arenarius* Fab.), *Scarites collaris*, Herbst, *Scar. globosus*, Herbst (*gibbus* Fab.), *Scarites thoracicus*, Rossi, et *Scar. bipustulatus*, Fab. (*Scar. quadrimaculatus*, Pal. Beauv.).

En 1810, Bonelli publia la première partie de ses *Observations entomologiques*, et y joignit un tableau indiquant les caractères essentiels des genres dont il proposait le maintien ou la création. Le genre *Clivina* était ainsi caractérisé :

« Mandibulis a basi ad medium denticulatæ; lingua angusta, acumi- » nata; thorax quadratus; tibiæ anticæ extus et apice digitatæ; alæ 2. »

Il en séparait, sous le nom de *Dyschirius* (2), les espèces qui n'avaient qu'une dent à la base des mandibules, dont la languette était entière, tronquée, plus courte que les paraglosses, le corselet globuleux, les jambes antérieures digitées seulement à l'extrémité.

Cependant, dans la 2e partie de son travail, qui parut en 1813, Bonelli ne considéra plus le groupe des *Dyschirius* que comme une division des *Clivina* de Latreille. Il décrivit deux espèces qui, aujourd'hui encore, font partie du *G. Clivina*, les *C. lobata* et *picipes*. Ce fut cette année-là même, que Panzer caractérisa d'après ses propres observations les *G. Clivina* et *Dyschirius* (3).

En 1824, M. Mac-Leay publia ses *Annulosa javanica* où nous voyons figurer une Clivine nouvelle : *Cliv. sabulosa*.

(1) *Consid. gén. sur les Cr. et les Ins.* p. 156.

(2) Ce genre, considéré d'abord par Latreille comme étant une division des Clivines (*Règne anim.* éd. 1817. IV. p. 188), a été admis par lui comme genre distinct dans l'édition de 1829 (t. IV. p. 386).

(3) *Index entomologicus*, etc. p. 66 et 67.

En 1825 parut le 1er volume du *Species général* de Dejean. L'auteur, rejetant le *G. Dyschirius*, réunit les espèces qui y appartiennent au *G. Clivina*. Les caractères qu'il donne à ce dernier genre sont loin d'être applicables à toutes les espèces : p. ex. *Lèvre supérieure peu avancée et coupée presque carrément* : dans plusieurs espèces, elle est fort avancée, et chez tous les *Dyschirius* elle est profondément échancrée. *Mandibules peu avancées* : dans tout le groupe sur lequel j'ai fondé le genre *Ardistomis*, elles sont, au contraire, très-avancées ; *et non dentées intérieurement* : elles sont dentées dans les *Clivina* proprement dites. *Dernier article des palpes labiaux presque cylindrique* : dans tous les *Dyschirius* cet article est plutôt ovalaire. *Antennes moniliformes* : dans plusieurs espèces, leurs articles sont cylindriques, etc. etc. Les autres caractères n'ont pas plus de fixité.

De ces observations, sur lesquelles je reviendrai plus loin, il résulte que si les caractères mentionés par Dejean doivent être admis, il faut nécessairement retrancher du genre tous les *Dyschirius* et plusieurs espèces qui ont été jusqu'à présent placées parmi les *Clivina*.

Quoiqu'il en soit, Dejean décrivit alors trois especes nouvelles : *Cliv. dentipes*, *crenata*, *rostrata* ; la première seule peut être maintenue dans le genre ; les deux autres sont des *Ardistomis*.

Dans le tome 2e du *Species* (1826), parut la description de la *Cliv. grandis*, et dans le tome 5e (1831) celle des *Cliv. mandibularis*, *angustata*, *senegalensis*, *sobrina*, *ypsilon*, *memnonia*, *americana*, *rufescens*, *striatopunctata* et *morio*.

En 1832, M. Klug (1) décrivit une espèce d'Égypte : *Cliv. rugiceps* ; en 1842, M. de Chaudoir donna la description d'une espèce orientale : *Cliv. lavifrons* ; enfin en 1843, M. Erichson fit connaître la *Cliv. aucta*, d'Angola, et M. de Chaudoir la *Cliv. basalis*, de la Nouvelle Hollande.

Je passe maintenant à l'examen détaillé des caractères génériques du genre :

Le *menton* est large et médiocrement élevé, quelquefois cependant très-court (*columbica*), quelquefois très-élevé (*angustata*) : sa surface antérieure est presque plane ; dans la plupart des espèces américaines, sa partie supérieure est plus enfoncée au milieu que sur les côtés. La dent du milieu est ordinairement large à la base, longue, aigue à l'extrémité et un peu plus courte que les lobes latéraux ; elle est quelquefois plus large (*americana*), ou arrondie à l'extrémité (*sobrina*), ou presque aussi élevée (*extensicollis*), ou même plus élevée (*javanica*, *fissipes*, *corvina*) que les lobes latéraux, ou enfin aussi courte que dans les *Dyschirius* (*Klugii*). Les lobes latéraux sont ordinairement arrondis, tant à leur sommet qu'à leurs angles et ont leurs deux côtés droits et parallèles ; tantôt cependant le côté ex-

(1) Symb. phys.

terne et le sommet sont seuls arrondis (*fossor*); tantôt le sommet est échancré (*grandis*, *javanica*), ou tronqué obliquement (*melanaria*, *fissipes*), ou arrondi obliquement (*mandibularis*), ou tronqué (*memnonia*), ou anguleux et formé par la réunion des deux côtés qui sont en arc de cercle (*sobrina*), tantôt enfin le sommet, anguleux comme dans la forme précédente, est formé par la réunion du bord interne, qui est arqué, avec le bord externe, qui est droit.

La *languette* est cornée, élevée, libre entre les paraglosses, mais sa forme est variable. Elle est, soit en fer de lance crénelé sur ses bords et prolongée en une longue pointe membraneuse, soit en triangle très-allongé, de la longueur des paraglosses (*grandis*) ou plus courte que les paraglosses (*mandibularis*), ou étroite, allongée et pointue, plus courte que les paraglosses, et terminée par une pointe membraneuse bilobée (*bipustulata*), ou enfin large et arrondie au sommet et terminée en une pointe membraneuse unique (*Klugii*).

Les *mâchoires* sont allongées, étroites, arquées, légèrement recourbées et pointues à l'extrémité ; cette extrémité est quelquefois plus recourbée (*corvina*). La pièce basilaire porte extérieurement à sa partie supérieure un appendice large et triangulaire (*mandibularis*, *grandis*), qui est parfois plus long et moins proéminent (*corvina*), ou qui disparaît tout-à-fait (*fossor*).

Le lobe externe des mâchoires se compose de deux articles grêles, égaux en longueur et dont le dernier, en massue allongée, ne dépasse pas l'extrémité de la mâchoire (*fossor*, *corvina*) ou est un peu plus long (*mandibularis*, *grandis*).

Les *palpes maxillaires* ont leur 1er article aussi long que le 3e, un peu plus large à l'extrémité qu'à la base ; le 2e est trois fois plus long que le 1er, en massue arquée extérieurement et un peu atténuée vers l'extrémité (*fossor*), quelquefois très-large (*mandibularis*) ; le 3e est presque conique ; le dernier est ordinairement aussi long que le 2e (*bipustulata*), ou un peu plus long (*corvina*), ou un peu plus court, presque acuminé, un peu rétréci à la base, légèrement tronqué à l'extrémité, avec le côté externe droit et le côté interne arrondi. Chez les espèces américaines à corselet non prolongé, ce dernier article est plus court et plus élargi au milieu.

Le 2e article des *palpes labiaux* est court, conique, arrondi à l'extrémité ; le 3e est de la même longueur que le 2e des palpes maxillaires, mais il est plus droit et moins large ; le 4e est de même longueur et de même forme que le dernier article des mêmes palpes, mais les côtés sont également arqués.

Le *labre* est transversal, assez avancé, de la largeur du milieu de l'épistôme, quelquefois plus large (*melanaria*), presque tronqué en avant dans la plupart des espèces africaines et orientales (excepté : *grandis*, *testacea*, *mandibularis* où il est assez profondément échancré), légèrement échancré

au centre dans les espèces américaines à corselet non prolongé en arrière (excepté : *americana*, *rufescens*), avancé au milieu dans les autres espèces du même pays. Les angles sont ordinairement arrondis, quelquefois cependant ils sont presque droits (*melanaria*). La surface supérieure est ordinairement plane ; cependant dans les espèces américaines, la partie antérieure est ordinairement très-déprimée, à l'exception du milieu ; quelquefois le milieu du labre porte un sillon longitudinal et profond (*mandibularis*, *bengalensis*).

Les *mandibules* sont semblables entre elles, ordinairement courtes, planes, larges à la base, fortement arquées extérieurement, droites dans leur première moitié intérieurement, courbées et aigues à l'extrémité ; elles portent intérieurement vers la base trois petites dents dont la supérieure est la plus marquée. Dans quelques espèces africaines et indiennes elles sont plus larges, plus courtes et ont l'extrémité plus obtuse (*assamensis*, *indica*, *melanaria*, *striata*, *extensicollis*, *testacea*) ; dans d'autres espèces de l'archipel indien elles sont beaucoup plus étroites et plus longues (*lobata*, *angustata*, *javanica*) ; de même aussi, mais à un moindre degré, dans quelques espèces américaines (*morio*, *cordata*). Elles sont ordinairement peu épaisses et munies tant extérieurement qu'intérieurement d'un rebord assez marqué, surtout vers l'extrémité, ce qui fait paraître leur surface creusée. Souvent elles sont partagées par une carène longitudinale élevée, plus ou moins distincte, qui s'étend jusqu'à l'extrémité. Lorsqu'elles sont épaisses (*corvina*, *dentipes*, *bidentata*, *dissimilis*), cette carène est plus élevée et les mandibules paraissent alors triangulaires ; l'espace compris entre la carène et le bord marginal externe est assez étroit et creusé surtout vers la base. Dans certaines espèces on ne remarque aucun rebord soit interne soit externe (*bengalensis*).

Les *antennes* sont ordinairement courtes, plus épaisses vers l'extrémité. Leur 1er article est le plus gros et cylindrique ; le 2e est en massue, aussi long que le premier ; le 3e conique, un peu allongé, du double plus court que le précédent ; le 4e de même forme que le 3e, mais encore plus court ; les suivans sont globuleux ; le dernier est ovale, atténué au bout. Quelquefois elles sont plus courtes, plus fortes ; les art. 5 à 9 sont presque transversaux et le dernier est arrondi au bout (*senegalensis*, *testacea*, *rufescens*) ; quelquefois, au contraire, elles sont un peu plus longues et leurs articles sont plus étroits, en triangle allongé (*cordata*, *javanica*, *elongata*, *americana*, *dentifemorata*, *corvina* et espèces à corselet non prolongé), ou bien enfin elles sont grêles et filiformes (*bengalensis*).

L'*épistome* est ordinairement débordé par les parties latérales de la tête ; il est cependant plus avancé dans les *Clir. javanica*, *elongata*, *lobata*. Il est, ou tronqué, ou sinué, ou échancré, jamais avancé, plus ou moins fortement rebordé ; ses angles ne sont visibles que lorsque les ailes sont situées plus en arrière (p. ex. *javanica*) : ils sont soit arrondis (*elongata*),

soit aigus ou droits (*lobata*, *tuberculata*, *bipustulata* et en général les espèces à corselet non prolongé). Il est séparé du front par un sillon ordinairement profond, quelquefois peu distinct et interrompu au milieu (*columbica*), ou même qui disparait tout-à-fait. Ce sillon est ordinairement droit ; quelquefois cependant il est arqué (*mandibularis*, *angustata*, *bipustulata*, *fasciata*).

Les rebords latéraux de la tête sont proéminens, ordinairement plus avancés que l'épistôme. Le premier (ailes de l'épistôme), est le plus étroit ; il est arrondi, tronqué ou anguleux. Il est isolé du second qui est situé plus en arrière et toujours arrondi ; quelquefois cependant il s'y réunit par une ligne oblique.

De chaque côté de l'épistôme part un sillon large et profond qui se prolonge jusques derrière les yeux et qui est un peu dilaté au milieu ; entre ce sillon d'un côté et les yeux de l'autre, on distingue un espace élevé en carène arquée et souvent interrompue (*carène oculaire*).

Le vertex est ou lisse ou ponctué, ou bien il porte une fossette arrondie ou oblonque, ou bien il est impressioné par des stries ou des dépressions. En arrière des yeux, l'occiput est ordinairement traversé par une strie transversale ponctuée, souvent interrompue au milieu.

Les *yeux* sont plus ou moins proéminens, hémisphériques, sessiles (*grandis*) ; quelquefois ils sont enchassés, surtout en arrière, dans les rebords latéraux de la tête (*corvina*).

En dessous, la tête est ordinairement chagrinée et ponctuée jusqu'en arrière des yeux. Au milieu, de chaque côté de la base du menton, part un sillon longitudinal qui se dirige vers la base de la tête. Ces deux sillons sont d'abord presque parallèles ; ils divergent ensuite plus ou moins dès le milieu ; l'espace compris entre eux n'est pas ponctué ; ils sont ordinairement profonds ; quelquefois cependant ils sont peu distincts (*tuberculata*, *bipustulata*).

Le *corselet* est carré, plus ou moins allongé, souvent un peu rétréci en avant, jamais en arrière avant les angles postérieurs. Le rebord marginal, toujours bien distinct, se prolonge obliquement depuis les angles postérieurs jusqu'à la base ; là il se redresse brusquement et forme un angle soit droit, soit aigu ; la base même, rebordée, est arrondie ; quelquefois cependant le rebord marginal, au lieu de se prolonger en arrière, se dirige en arc de cercle d'un angle à l'autre : un grand nombre d'espèces américaines présentent cette forme particulière. Les angles postérieurs sont souvent marqués par une petite dent ; quelquefois cependant ils sont complètement arrondis et ne sont plus indiqués que par un point assez profond situé intérieurement. Un point semblable se remarque encore contre le bord marginal un peu au dessous des angles antérieurs. Le bord antérieur est ou tronqué, ou sinué, ou même échancré au milieu ; les angles antérieurs sont ordinairement droits et arrondis à l'extrémité ;

quelquefois ils sont distinctement dirigés en avant (*mandibularis*). Le sillon longitudinal du milieu du corselet est ordinairement profond ; il part de la base et s'arrête à l'impression transversale antérieure ; quelquefois cependant il dépasse cette impression (*angustata, rufescens, indica, bipustulata*), quelquefois même, mais rarement, il atteint le bord antérieur (*javanica*). L'impression transversale est également bien marquée (quelquefois indistincte, *bengalensis*) et souvent ponctuée ; elle part du bord antérieur en face de chacun des côtés de la tête et s'écarte de plus en plus de ce bord jusqu'au milieu. Dans un certain nombre d'espèces cependant, elle ne touche point au bord antérieur ; elle prend naissance plus bas dans un point ordinairement assez marqué (*testacea, bengalensis, melanaria, indica, dentifemorata, laticeps, picipes*). Le dessous du corselet est ordinairement lisse ; quelquefois il est, soit chagriné, soit ponctué ; la pointe sternale ne dépasse pas les jambes antérieures ; elle est arrondie à son extrémité.

L'*écusson* est cordiforme ou oblong.

Les *élytres* sont en général un peu plus larges que le corselet, allongées, cylindriques, plus rarement en ovale allongé ; la base est plus ou moins tronquée et l'extrémité, qui est arrondie, est légèrement rétrécie. Les épaules sont le plus souvent proéminentes ; quelquefois cependant elles sont arrondies. Chaque élytre porte huit stries, plus une petite strie préscutellaire entre la 1re et la suture. Ces stries prennent naissance un peu après la base ; la 1re et la dernière atteignent seules l'extrémité où elles se rejoignent ; la 7e longe la strie marginale jusques près de la suture où elle touche la 1re avant l'extrémité ; les 3e et 4e, 5e et 6e se réunissent au bout. La strie marginale se prolonge le long de la base jusque près de l'écusson. Toutes ces stries sont plus ou moins distinctement ponctuées ou crénelées. Le 3e intervalle porte ordinairement trois ou quatre points contre la 3e strie. Le rebord inférieur de l'élytre porte au dessous de l'épaule une rangée de gros points enfoncés.

Les *pattes* antérieures sont courtes et fortes. Les cuisses sont larges, comprimées, parfois épineuses en dessous vers l'extrémité. Les tibias sont larges, en triangle allongé, ordinairement sillonés en dessus, et portent intérieurement, au dernier tiers inférieur, une échancrure profonde et arrondie au dessus de laquelle on distingue une épine presque membraneuse, assez courte et tortillée ; du dessous de cette épine il en part une seconde longue et légèrement arquée ; à l'extrémité interne on voit une épine ordinairement longue, et à l'extrémité interne se trouve un prolongement digitiforme très-long. Le bord externe est deux ou trois fois échancré et du dessus de ces échancrures partent soit des digitations, soit de simples dents.

Les cuisses intermédiaires et postérieures sont beaucoup moins larges et ordinairement moins comprimées ; les tibias intermédiaires sont le plus

souvent triangulaires, planes en dessous, creusés sur les deux surfaces supérieures. La côte externe est légèrement crénelée et munie de poils épineux; la dernière de ces crénelures, située au dernier quart, se prolonge souvent en un éperon long et oblique. L'extrémité du tibia porte deux épines longues et divergentes. Les tibias postérieurs sont un peu plus longs que les intermédiaires et légèrement courbés. Le 1er article des *tarses* est en massue allongé; les 2e, 3e et 4e sont triangulaires, plus arrondis dans la plupart des espèces américaines; le 5e est également en massue, mais plus étroit et plus court que le premier. Les crochets sont plus ou moins longs, plus ou moins grêles et recourbés; entre eux, et à leur base, on distingue ordinairement un long poil spiniforme et transparent. Le dessous des tarses est muni de deux rangs de poils simples.

La couleur ordinaire est le noir brillant ou le brun de poix; plusieurs espèces sont ferrugineuses ou testacées; quelques autres ont une tache de cette dernière couleur à l'extrémité ou à la base des élytres. Les palpes, les antennes, ou au moins leur base, et les pattes sont d'une teinte plus claire; les jambes antérieures sont régulièrement plus foncées.

On voit qu'outre les caractères généraux de la famille, les *Clivina* n'en présentent que deux qui soient constans : la languette en triangle allongée et terminée par une ou deux pointes membraneuses; le dernier article des palpes maxillaires du double plus long que le 3e et formant avec lui une sorte de fuseau.

Ce genre paraît répandu sur toute la surface du globe : des espèces connues, 3 habitent l'Europe, 14 l'Afrique et les îles voisines, 11 les Indes orientales, 2 l'Asie, 1 la Nouvelle Hollande et 38 l'Amérique.

1. *C. grandis.* Dej.

Nigro-picea, elytrorum margine inferiore apiceque, prothorace subtus, palpis, antennis pedibusque rufis; menti dente medio lobis lateralibus æquali, bisce supra rotundatis, emarginatis; ligula paraglossis æquali; antennis brevibus, articulo secundo tertio longiore, 4-10 globosis; labro emarginato, angulis rotundatis, a fronte carina arcuata separato; vertice furcula brevi longitudinali impresso, sulcisque duobus latis punctatisque pone oculos; oculis maxime prominulis. Pronotum transversum, antice subangustatum, angulis anticis rotundatis, posticis tuberculo minuto indicatis, margine antico sinuato; sulcus medius profunde impressus; impressio antica subinfuscata, longitudinaliter striolata. Elytra thoracis latitudine terque longiora, subcylindrica, postice angustata, basi truncata, dente humerali prominente; punctato-striata, interstitio tertio punctis majoribus 3 vel 4 (quandoque 2) pone striam tertiam impresso. Tibiæ anticæ extus bidigitatæ, denticuloque superiore armatæ; intermediæ spinoso-pilosæ, valide calcaratæ. Caput subtus bi-sulcatum, punctisque vali-

ois pone sulcos impressum ; thorax abdominisque latera punctata. Tarsorum spina terminalis unguiculis dimidio brevior.

Long. 13, 10. El. 6 3/4, 5 1/4. Lat. 3 3/4, 3 1/4 mill.

Dej. Spec. I. 478. 22.

Sénégal. La collection de M. Reiche renferme un individu venant d'Egypte.

2. *C. mandibularis.* Dej.

Brunnea, nitida, mandibulis apice nigris. Menti dens medius lobis lateralibus æqualis, hisce intus rotundatis, angulis exterioribus subrectis. Antennæ breves, articulo secundo tertio longiore, 4-10 globosis. Ligula paraglossis minor ; palporum maxillarium articulus secundus latissimus ; labrum emarginatum in medio longitudinaliter impressum ; clypei latera prominentia, rotundata ; margo inter illa truncatus ; frons a clypeo carina arcuata separata ; furcula media elongata profunda ; carinulæ plures pone oculos ; caput post oculos tantum punctulatum. Pronotum convexum, transversum, antice vix angustatum, angulis anticis prominulis, posticis tuberculo minuto indicatis ; margine antico sinuato, in medio emarginato ; sulcus medius profunde impressus ; impressio antica striolata. Elytra thoracis latitudine terque longiora, subcylindrica, apice angustata, basi truncata, dente humerali prominente ; punctato-striata, interstitio tertio punctis 2 vel 3 majoribus impresso. Tibiæ anticæ extus bidigitatæ, denticuloque superiore armatæ ; intermediæ spinoso-pilosæ, unicalcaratæ. Caput subtus bisulcatum, punctisque validis pone oculos impressum ; thorax subtus abdominisque latera punctata. Tarsorum spinula terminalis unguiculis tertia parte brevior.

Long. 13, 8 1/2. El. 6 1/2, 4 3/4. Lat. 3 1/2, 2 1/3 mill.

Dej. Spec. V. 498. 26. — *Laporte.* Hist. nat. Ins. I. 67. 7.

Cette espèce diffère particulièrement de la *Cliv. grandis* par sa tête plus large ; ses yeux moins proéminens ; son corselet plus court et dont les angles antérieurs sont plus avancés ; ses élytres un peu plus courtes et plus faiblement ponctuées ; enfin l'éperon des tibias intermédiaires qui est moins long.

Sénégal.

3. *C. Assamensis.* Hope. (Coll.).

Picco-brunnea, nitida ; capite rugoso, antice oblonge foveolato ; pronoto subquadrato ; elytris elongato-oblongis, striato-punctatis ; tibiis anticis bidigitatis, unidentatis ; intermediis breviter calcaratis. — Long. 9. El. 4 3/4. Lat. 2 3/4 mill.

La dent du milieu du menton est large et presque échancrée au milieu ; les lobes latéraux sont tronquées obliquement à leur sommet ; les mandibules sont obtuses ; le labre est légèrement avancé au milieu et arrondi sur les côtés ; l'épistôme est échancré au centre ; ses ailes, un peu proéminentes, sont larges, presque tronquées à leur sommet et arrondies extérieurement ; l'élévation antérieure est en arc de cercle dont la courbure est dirigée en avant, séparée par un sillon transversal d'un autre arc de cercle placé sur le devant de la tête et dont la courbure est dirigée en arrière ; le vertex porte à son sommet une fossette peu profonde qui se prolonge en avant en un large sillon longitudinal, lequel interrompt un autre sillon transversal également profond prenant naissance près des carènes oculaires ; en arrière des yeux, qui sont proéminens, on remarque une ligne transversale de gros points. Le corselet est conformé comme dans la *Cliv. mandibutaris* si ce n'est qu'il est un peu plus long et plus rétréci antérieurement. Les élytres sont comme dans cette espèce, mais cependant plus élargies au milieu, plus profondément striées et sans dent humérale ; les stries ne parviennent pas tout-à-fait à l'extrémité ; le 3e intervalle ne porte aucun point. Les tibias antérieurs, sillonés au milieu, portent extérieurement deux dents larges, mais assez courtes et, au dessus, une dent obtuse ; les tibias intermédiaires ont avant l'extrémité un éperon court et recourbé ; l'épine terminale des tarses est de moitié plus courte que les crochets.

Assam. 1 ind. Coll. Hope.

4. *C. indica.* Hope. (Coll.).

Nigro-brunnea, palpis testaceis, corpore subtus, antennis pedibusque brunneis ; labro clypeoque late sub-emarginatis ; capite rugoso impresso ; pronoto subquadrato, sulco longitudinali postice abbreviato ; elytris subcylindricis, apice angustioribus, fortiter punctato-striatis ; tibiis anticis extus valide tridentatis, intermediis calcaratis. — Long. 9. El. 5. Lat. 2 3/4 mill.

D'un noir-brunâtre, avec les palpes testacés, les antennes, les pattes et le dessous du corps bruns. La dent du milieu du menton est aigue, aussi large à la base que les lobes latéraux qui sont arrondis à leur sommet et à peine plus élevés. La languette est étroite, pointue et un peu plus longue que les paraglosses. Le 2e article des palpes maxillaires est le plus large de tous dans toute son étendue ; le pénultième et le dernier sont comme dans les *Dyschirius*. Les mandibules sont conformées comme dans ce dernier genre, mais elles sont un peu moins planes en dessus. Les antennes sont courtes et beaucoup plus épaisses vers l'extrémité, tellement que les derniers articles sont presque transversaux. Le labre est peu saillant, arrondi sur les côtés, finement rebordé, légèrement échancré au

milieu où il porte une ligne longitudinale enfoncée. L'épistôme est simplement arqué ; ses ailes sont sur la même ligne que le bord antérieur, arrondies, et un peu relevées ; l'élévation antérieure présente la forme d'un T dont la tête, dirigée en avant, est arrondie ; le vertex porte entre les yeux trois fossettes en avant desquelles se prolongent trois impressions peu régulières ; les carènes oculaires sont traversées par deux ou trois rugosités ; les yeux sont noirs et saillans ; entre les yeux et le vertex, on remarque un espace ordinairement ponctué qui, en arrière, se prolonge intérieurement de chaque côté en un sillon ponctué. Le corselet est de moitié plus large que la tête, un peu plus large que long, assez convexe, surtout en arrière où il est arrondi ; il se rétrécit légèrement en avant ; les angles antérieurs sont droits, avec leur extrémité arrondie ; les côtés sont rebordés ; ils sont longés inférieurement par un sillon ponctué ; le sillon longitudinal est plus profond en avant ; il ne touche point le bord antérieur et s'évanouit avant le bord postérieur ; l'impression antérieure est moins marquée ; elle prend naissance avant le bord antérieur et est interrompue près du sillon longitudinal. Les élytres sont de la largeur du corselet et presque trois fois plus longues ; en dessus, elles semblent tout-à-fait cylindriques, avec l'extrémité seulement un peu rétrécie ; la base est tronquée et les côtés sont sinueux ; elles portent huit stries profondes et ponctuées qui se réunissent deux à deux avant l'extrémité ; le bord marginal est longé par une série régulière de points enfoncés ; le bord inférieur porte une rangée de gros points dans sa partie antérieure. Tout le dessous du corps est ponctué. Les cuisses antérieures, très-comprimées, ont peu de largeur ; les tibias antérieurs sont sillonés en dessus ; l'épine interne est aussi longue que la digitation terminale ; au côté externe on remarque trois dents dont l'inférieure est au moins de moitié aussi forte que la digitation terminale ; les tibias intermédiaires sont couverts de poils raides d'un fauve doré ; l'éperon est court, épineux et droit ; les cuisses postérieures sont arquées extérieurement ; les tibias portent à leur extrémité des poils roux assez nombreux.

Je n'ai vu que deux individus de cette espèce : l'un dans la collection de M. Hope, venant du royaume de Mysore, l'autre communiqué par M. de la Ferté comme venant des Indes orientales, sans autre désignation.

5. *C. melanaria*. Hope. (Coll.).

Nigra, nitida, ore, antennis pedibusque piceis ; capite lœvi, vertice arcuatim impresso ; prototo subquadrato, antice angustato ; elytris e ongatis, punctato-striatis ; tibiis anticis extus obtuse bidentatis, intermediis non calcaratis. — Long. 8. El. 4 1/4. Lat. 2 1/4 mill.

Les lobes latéraux du menton sont tronqués obliquement à leur partie

supérieure ; les mandibules sont larges et courtes ; le labre est large, avancé, bisinué de telle sorte qu'il semble divisé par trois dents très-arrondies ; toute la tête est lisse ; l'épistôme est bisinué en avant ; ses angles sont un peu proéminens et obtus ; il est séparé de la tête par un sillon profond, arqué et dont la courbure se dirige en avant ; le vertex porte une impression en fer à cheval ; les yeux sont proéminens, quoique le rebord latéral et antérieur de la tête s'avance jusqu'à leur niveau ; en arrière des yeux on distingue des points nombreux. Le corselet est plus large que la tête, un peu plus long que large ; il se rétrécit en avant ; ses angles antérieurs sont arrondis et proéminens ; les angles postérieurs ne sont indiqués que par un gros point ; le sillon longitudinal est nettement marqué ; il dépasse à peine l'impression antérieure qui est profonde, n'atteint pas les bords et semble formée par de gros points alignés. Les élytres sont de la largeur du corselet, allongées, un peu élargies au milieu, également arrondies à la base et à l'extrémité ; les épaules ne sont point proéminentes et aucune dent humérale n'est distincte ; les stries sont munies de points moins visibles vers la suture ; la 4e strie et la strie marginale se réunissent à la base ; on ne remarque aucun point sur le 3e intervalle. Les tibias antérieurs suffiraient seuls pour faire distinguer cette espèce ; la digitation terminale est assez courte et obtuse à l'extrémité ; les digitations externes sont remplacées par deux grosses dents arrondies ; les tibias intermédiaires, qui sont épineux, ne portent aucun éperon. En dessous, la tête et l'abdomen sont ponctués, et le thorax est couvert de rides transversales.

Assam. 1 ind. Coll. Hope.

6. *C. Dumolinii.* Dupont. (Coll.).

Brunneo-picea, palpis, antennis pedibusque testaceis ; clypeo late emarginato, vertice foveolato ; pronoto subgloboso, utrinque punctulis agglomeratis impresso ; elytris elongato-ovatis, punctato-striatis ; tibiis anticis unidigitatis, unidentatis ; tibiis intermediis inermibus. — Long. 3 1/2. El. 2. Lat. 1 mill.

Le labre est avancé, très-légèrement échancré en avant ; son bord antérieur porte cinq petits tubercules pilifères ; l'épistôme est rebordé, légèrement cintré au milieu ; ses angles sont aigus et proéminens, ses ailes un peu plus reculées et arrondies ; l'élévation antérieure est arrondie en avant, longée en arrière par un sillon en demi-cercle ; le vertex porte dans son milieu une fossette prolongée en avant et dont le fond est ponctué ; les yeux sont presque masqués en avant par le rebord latéral de la tête ; ils sont proéminens, fortement granuleux ; la partie postérieure et latérale de la tête est couverte de points nombreux. Le corselet est presque

globuleux, très-arrondi en arrière, un peu rétréci en avant; ses bords latéraux sont droits; les angles postérieurs sont indiqués par un très-petit tubercule; l'impression transversale et le sillon longitudinal sont également bien marqués; il porte un peu après le milieu, plus près du bord marginal, une douzaine de petits points agglomérés. Les élytres sont de la largeur du corselet, cylindriques, tronquées à la base, avec les épaules arrondies, un peu rétrécies à l'extrémité et fortement ponctuées-striées; le 3e intervalle ne porte pas de points. Le dessous de la tête, sauf la partie comprise entre les deux sillons médians, est fortement chagriné et ponctué. Le dessous du corps est à peine ponctué; chacun des segmens abdominaux porte extérieurement une assez large fossette peu profonde. Les tibias antérieurs ont extérieurement une seule digitation à laquelle succède une forte dent obtuse; les tibias intermédiaires n'ont pas d'éperon; l'épine terminale des tarses est nulle.

Sénégal. 1 ind. Coll. Dupont.

7. *C. memnonia*. Dej.

Piceo-brunnea; clypeo emarginato, lateribus bidentato, vertice forcolato; oculis prominulis; pronoto subquadrato; elytris oblongis, punctato-striatis; tibiis anticis extus bidigitatis, supra unidenticulatis, intermediis ante apicem calcaratis. — Long. 7. El. 3 3/4. Lat. 2 1/4 mill.

Dejean. Spec. V. 503. n° 31.

La dent du menton est beaucoup plus courte que les lobes latéraux, qui sont tronqués au dessus et arrondis à leurs angles; le labre est légèrement sinué en avant; l'épistôme est largement échancré au milieu, bidenté sur les côtés; l'élévation antérieure est en demi-cercle et large; elle est limitée sur les côtés par deux fossettes profondes et arrondies, et en arrière par un sillon transversal; le vertex porte au milieu une dépression irrégulière, quelquefois peu distincte; les carènes oculaires sont lisses; en arrière des yeux, qui sont très-saillans, on remarque une série transversale de gros points enfoncés. Le corselet est très-convexe, un peu élargi vers les angles postérieurs qui sont très-arrondis et ne sont indiqués que par un petit tubercule accompagné d'un point enfoncé; il est sinué en avant; l'impression antérieure est profonde, marquée par de gros points, interrompue à ses extrémités et au milieu; le sillon longitudinal est très-enfoncé. Les élytres sont à peine plus larges que le corselet, deux fois et demie aussi longues, tronquées à leur base et vont en s'arrondissant à leur dernier tiers; les stries sont profondes et ponctuées; on ne distingue aucun point sur le 3e intervalle. En dessous, la tête est fortement chagrinée, le corselet et l'abdomen sont ponctués. Les digitations et la dent des tibias antérieurs sont plus marquées que dans la *Clir. mandibularis*; l'éperon des

tibias intermédiaires est large, mais peu prolongé ; l'épine terminale des tarses est des deux tiers plus courte que les crochets.

Java. 2 ind. Coll. Dejean, Putzeys.

8. *C. Senegalensis.* Dej.

Rufo-brunnea, nitida, mandibulis apice nigris. Menti dens medius lobis lateralibus subæqualis, hisce apice rotundatis ; antennarum articulus secundus tertio latiore multoque longiore, 5-10 transversim globosis ; mandibulæ latæ, breves ; labrum clypeusque late emarginati, hujus anguli rotundati ; frons a clypeo carinula lata arcuata separata ; vertex fossula oblonga impressus in qua carina longitudinalis prominet ; carinæ 2 postice punctatæ pone oculum utrumque conspiciuntur ; vertex ipse vage punctulatus. Pronotum subquadratum, postice subdilatatum, antice sinuatum, angulis anticis rectis apice obtuso, posticis vero nullis ; impressio antica brevis, quandoque interrupta ; impressio elongata, punctulata, basalis, punctumque pone angulos posticos. Elytra cylindrica, in medio marginis vix angustata, basi truncata, humeris obtusis, punctulato-striata, interstitio tertio uni-vel bi-punctato. Corpus subtus punctulatum. Tibiæ anticæ bidigitatæ denteque superiore armatæ ; intermediæ hispidæ, apice calcaratæ ; spina terminalis unguiculis bis brevior.

Long. 6. El. 3 1/4. Lat. 2 mill.

Dej. Spec. V. p. 500. n° 28.

Sénégal. Commune.

9. *C. sobrina.* Dej.

Picea, palpis, antennis pedibusque brunneis. Menti dens medius rotundatus ; lobi laterales acute rotundati ; labrum truncatum, lateribus rotundatum ; clypeus sub-emarginatus, planus ; fossula in vertice rotundata obsoleta ; oculi prominuli ; caput post oculos sulco punctulato transverso impressum, subtus et post oculos punctatum. Pronotum oblongum, basi rotundato-angustatum, antice sinuatum ; angulis anticis rotundatis, posticis tuberculo parvo punctoque indicatis ; sulco longitudinali impressioneque antica profundis notatum, hoc in medio minus profundo et marginem anteriorem attingente. Elytra subcylindrica, in medio subangustata, basi apiceque rotundata, profunde striato-punctata, punctisque 4 in interstitio tertio. Femora anteriora crassa, ante apicem subtus unidentatæ ; tibiæ anteriores sulcatæ, extus bidigitatæ, supra unidentatæ ; intermediæ parce piloso-spinosæ, calcare armatæ ; spina tarsorum terminalis ungulis tertia parte brevior. — Long. 6. El. 3 1/2. Lat. 2 1/2 mill.

Dej. Spec. V. p. 501. n° 29.

Sénégal. — L'individu quej 'ai sous les yeux fait partie de la collection

Dejean : c'est celui qui est mentionné dans le *Species* comme provenant de M. Leprieur Les tibias intermédiaires portent un peu au dessous du milieu un éperon bien distinct, mais peu prolongé, qui a échappé à l'examen de Dejean.

10. *C. femoralis.*

Nigra, subtus brunnea; clypeo emarginato, angulis acutis, alis retractis, truncatis, vertice uniforcolato, fronte occipiteque transversim sulcatis; pronoto quadrato; elytris subcylindricis, punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato; femoribus anticis subtus unidentatis; tibiis bidigitatis et unidentatis, intermediis non calcaratis. — Long. 6 1/4. El. 3 1/2. Lat. 1 2/3 mill.

Brune, noire en dessus. Les lobes latéraux du menton sont tronqués à leur sommet ; le dernier article des palpes est plus distinctement tronqué à son extrémité que dans la *Cliv. sobrina* ; le labre est comme dans cette espèce, mais plus avancé ; l'épistôme est plus échancré, ses angles sont plus aigus, plus relevés ; les ailes qui, dans la *sobrina*, sont placées presque sur la même ligne et arrondies, sont ici notablement reculées et tronquées en avant : l'élévation antérieure est arquée et limitée en arrière par un sillon profond ; le vertex porte au milieu une fossette irrégulière et bien marquée, et sur les côtés, deux impressions longitudinales ; les carènes oculaires sont lisses, tandis qu'elles sont rugueuses dans la *Cliv. sobrina*. Les yeux sont moins proéminens que dans cette dernière espèce qui porte, immédiatement en arrière des yeux, un sillon transversal formé par des points ; dans la *Cliv. femoralis*, ce sillon est plus éloigné des yeux ; il est beaucoup plus profond et n'est ponctué qu'à sa partie postérieure. Le corselet n'est pas plus long que large ; sa base est légèrement échancrée ; le bord antérieur est sinué comme dans la *Cliv. sobrina* ; les côtés sont plus parallèles ; ils ne se rétrécissent pas en arrière ; les angles postérieurs sont marqués par une petite dent et par un point intérieur ; le sillon longitudinal est profond dans toute son étendue. Les élytres sont comme dans la *Cliv. sobrina*, mais proportionellement un peu plus étroites, plus profondément ponctuées et les intervalles sont plus convexes. Les cuisses antérieures sont épaisses et portent en dessous, avant l'extrémité, une dent plus large et moins aigue que dans la *sobrina* ; les tibias qui, dans cette dernière espèce, sont sillonés en dessus, sont lisses dans la *femoralis* ; ils sont digités et denticulés de la même manière ; les tibias intermédiaires ne portent aucune trace d'éperon ; l'épine terminale des tarses est de moitié plus courte que les crochets.

Sénégal. 1 ind. Coll. Buquet.

11. *C. madagascariensis*.

Nigra, nitida, palpis, antennis tarsisque testaceis, prothorace subtus pedibusque brunneis; clypei alis rotundatis, vix prominulis, a clypeo separatis, vertice sulco transversali unico, punctoque obsoleto impresso, occipite punctis transversim dispositis notato; pronoto convexo, ante medium dilatato, basi maxime coarctato, sulco longitudinali profundo; elytris subcylindricis, fortiter punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato; tibiis anticis longissime digitatis, denticuloque superiore armatis, intermediis inermibus. — Long. 5 1/4. El. 3. Lat. 1 1/2 mill.

Le dessus est d'un noir brillant; les palpes, les antennes et les tarses sont testacés, le dessous du corselet et les pattes bruns. Les lobes latéraux du menton sont tronqués obliquement à leur partie supérieure; les antennes, qui grossissent légèrement vers l'extrémité et sont composées d'articles presque cylindriques, dépassent les angles postérieurs du corselet de toute la longueur de l'article terminal. Le labre est étroit, avancé, relevé en avant et tronqué; ses angles sont arrondis et presque cachés sous des soies fauves recourbées. L'épistôme est, au milieu, de la même largeur que le labre; son bord antérieur est relevé et très-légèrement échancré au centre; ses angles sont obtus, ses ailes à peine plus avancées et parfaitement arrondies sur les côtés; elles sont séparées de l'épistôme par deux impressions profondes. L'élévation antérieure est peu marquée et arquée en avant; le sillon qui la borde en arrière est assez éloigné du bord antérieur; il est profond, arqué et se joint aux deux sillons longitudinaux qui s'écartent à mesure qu'ils approchent de la partie postérieure de la tête; le vertex porte une impression très-peu distincte; en arrière des yeux, la tête est finement granulée; elle porte une série transversale de gros points, plus serrés en arrière des yeux et en dessous. Le corselet est convexe, aussi long que large, plus étroit en avant; ses bords marginaux sont arrondis et dilatés un peu avant les angles postérieurs; la base est un peu prolongée et fortement rétrécie; le bord antérieur est largement échancré; ses angles sont très-déprimés et arrondis; les angles postérieurs sont marqués par une petite dent proéminente et par un point interne d'où sort un poil fauve; le sillon longitudinal est très-profond dans toute son étendue et divise le corselet en deux parties convexes; il ne dépasse pas l'impression antérieure qui est profonde et porte de gros points enfoncés. Les élytres sont d'un cinquième plus larges que le corselet, presque cylindriques, plus étroites à l'extrémité qu'à la base qui est arrondie; elles sont profondément ponctuées et le 3e intervalle porte quatre gros points. Les digitations et les épines des tibias antérieurs sont très-longues et grêles; au dessus de la seconde digitation on remarque une grosse dent obtuse; les tibias intermédiaires sont étroits et ne portent pas

d'éperon. Les crochets des tarses sont petits et grêles ; l'épine terminale est de moitié plus courte.

Madagascar. 1 ind. Coll. La Ferté.

12. *C. javanica.* Chevrolat. (Coll.).

Nigra, nitida, ore, antennis pedibusque brunneis ; clypeo emarginato, lateribus bidentato, vertice lævi, foveolato ; pronoto subquadrato ; elytris elongatis, cylindricis, punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis extus bidigitatis et unidentatis, intermediis angustatis, calcaratis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 1/8 mill.

Les lobes latéraux du menton sont échancrés à leur sommet ; la dent du milieu est plus élevée ; les mandibules sont longues, étroites et arquées ; les antennes sont terminées par des articles en triangle allongé ; le labre est largement arrondi en avant. L'épistôme est échancré et rebordé, surtout à ses angles qui sont proéminens ; les lobes latéraux sont plus reculés et arrondis ; il est plan et séparé du front par une ligne très-peu marquée ; le vertex qui est lisse, sauf deux rangées latérales de quelques petits points, porte dans son milieu une fossette profonde et arrondie. Les yeux sont proéminens ; le derrière de la tête est traversé par un sillon formé de gros points plus nombreux sur les côtés. Le corselet est aussi long que large, à-peu-près carré ; ses bords latéraux sont sinués, longés par un sillon profond qui s'étend depuis les angles postérieurs jusqu'au bord marginal antérieur ; le bord antérieur est échancré au milieu et sinué latéralement ; le sillon longitudinal est profond et atteint le bord antérieur ; l'impression antérieure est bien marquée et porte intérieurement quelques stries longitudinales. Les élytres sont presque trois fois plus longues que le corselet, cylindriques, avec les épaules arrondies et avancées ; elles sont profondément striées-ponctuées ; le 3e intervalle porte quatre gros points enfoncés ; le dessous de la tête est chagriné et ponctué ; le corselet porte en dessous quelques petits points à peine distincts ; la base externe de chaque segment de l'abdomen est fortement ponctuée. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux fortes digitations et au dessus une dent obtuse ; les tibias intermédiaires sont peu élargis et sont munis d'un éperon avant leur extrémité ; l'épine terminale des tarses est plus longue que les crochets.

Java. 1 ind. Coll. Chevrolat.

13. *C. striata.* Hope. (Coll.).

Picea, ore, antennis pedibusque brunneis ; clypeo verticeque arcuatim impressis ; pronoto quadrato, basi utrinque punctulato ; elytris elongatis, cylin-

dricis, fortiter punctato-striatis, tibiis anticis extus unidigitatis, unidentatis, intermediis non calcaratis. — Long. 6. Et. 3 1/2. Lat. 1 1/2 mill.

Les mandibules sont larges et courtes ; les antennes sont courtes et notablement plus épaisses vers l'extrémité ; le labre est presque tronqué en avant et ses angles sont arrondis ; l'épistôme est rebordé, arrondi en avant, avec une petite échancrure au milieu ; les ailes sont larges, arrondies à l'extrémité, proéminentes ; l'élévation antérieure est à peine distincte ; elle porte au milieu une impression en fer à cheval. Les yeux, bien que proéminens, sont presque couverts en avant par le prolongement des parties latérales de la tête. Le corselet est large et carré, arrondi en arrière ; les côtés et le bord antérieur sont droits ; l'impression transversale n'atteint le bord à aucune de ses extrémités ; de chaque côté, entre les angles postérieurs (indiqués par un simple point) et le sillon longitudinal, on distingue quelques très-petits points enfoncés. Les élytres, de la largeur du corselet, sont conformées comme dans la *Cliv. fossor*, mais un peu plus convexes ; les stries et les points sont plus marqués ; la strie basale est plus distincte ; on ne voit pas de points sur le 3e intervalle. Les digitations des tibias antérieurs sont plus fortes que dans la *Cliv. fossor* ; la supérieure est même encore moins avancée ; les tibias intermédiaires sont épineux, mais n'ont pas d'éperon ; l'épine terminale des tarses est très-courte. La tête et le corps sont ponctués en dessous ; le thorax porte des rides ondulées.

Mysore. 1 ind. Coll. Hope.
Coromandel. 1 ind. Coll. Reiche.

14. *C. basalis.* Chaud.

Nigro-picea, antennis, palpis pedibusque ferrugineis, elytrorum basi late, extrorsum longius rufa ; mandibulis validis, brevibus, obtusis, clypeo emarginato ; pronoto subelongato-quadrato ; elytris elongatis, parallelis, subcylindricis, profunde punctato-striatis, interstitio tertio extus quadripunctato. — Long. 7. Lat. 1 2/3 mill.

Chaud. Bull. Mosc. 1843. p. 755.

Nouvelle Hollande.

Je n'ai point vu cet insecte.

15. *C fossor.* Lin.

Nigro-picea, ore, antennis pedibusque rufis ; menti dente medio lobis lateralibus breviore, horum angulis exterioribus rotundatis, interioribus vero rectis ; labro antice subtruncato ; epistomo late emarginato, angulis parum prominulis ; vertice haud transversim sulcato, oblonge foveolato ; pronoto

subquadrato, angulis anticis rotundatis, margine antico late emarginato; elytris elongatis, cylindricis, striato-punctatis, humeris rotundatis, interstitio tertio punctis tribus impresso; tibiis anticis extus bidigitatis, denticuloque obsoletissimo armatis, intermediis vix spinoso-pilosis, carinatis, calcare valido apice infra emarginato munitis. — Long. 6. El. 3 1/2. Lat. 1 2/3 mill.

Tenebrio fossor. Lin. S. N. 2. 6757. F. S. n° 817. (Cf. *Brullé.* Obs. sur la Syn. des Car. in *Silb.* Rev. Ent. II. p. 89).

Attelabus fossor. Degeer. Ins. IV. 350. 1. t. 30. f. 12.

Scarites fossor, Illig. K. Pr. 111. 2. — *Duft.* F. A. II. 5. 1.

Clivina fossor. Latr. Gen. Cr. et Ins. I. 211. 1. — *Gyll.* I. S. II. 169. 2. —*Sahlb.* I. F. Cliv. n° 2. — *Steph.* Ill. of. Br. Ent. I. 39. n° 1. — *Brullé.* Hist. nat. des Ins. V. p. 69. pl. 4. fig. 1. — *Zetterst.* F. L. I. 40. I. L. 44. n° 1. — *Erichs.* F. Braud. I. 33. n° 1. — *Heer.* Die Kæf. der Schw. II. 1. p. 7. n° 1. Fn. Helv. I. 16. n° 1. — *Ramb.* Fn. Andal. I. 45. n° 1. — *Schiœdte.* Danm. Eleuth. I. 115. 1. Tab. 4. fig. A.

Scarites arenarius. Fab. S. E. I. 125. 15. E. S. I. 96. 6. — *Panz.* Fn. 45. 11. — *Schoenh.* S. I. I. 128. 18. — *Sturm.* D. F. II. 188. 2.

Cliv. arenaria. Clairv. Ent. Helv. II. 57. — *Dej.* Spec. I, 413. 1. Icon. I. 215. pl. 23. fig. 1. — *Boisd.* et *Lacord.* F. E. P. I. 161. 1. — *Laporte.* Hist. nat. des Ins. I. 67. n° 1.

Cette espèce habite toute l'Europe, depuis les bords de la Méditerranée jusqu'aux contrées les plus septentrionales.

16. *C. collaris.* Herbst.

Nigro-picea, clytris, ore, antennis pedibusque rufis; vertice oblonge foveolato; pronoto subquadrato; elytris elongatis, cylindricis, striato-punctatis, interstitio tertio punctis quatuor impresso, humeris rotundatis; tibiis anticis extus bidigitatis, denticuloque obsoletissimo armatis, intermedus calcaratis. — — Long. 5 1/2. El. 3 1/4. Lat. 1 1/2 mill.

Herbst. Archiv. V. p. 141. Tab. 29. fig. 15. — *Heer.* Kæf. der Schw. II. 1. p. 8. Fn. Helv. I. 16. n° 2.

M. Heer indique comme caractères distinguant cette espèce de la précédente, sa taille plus petite, le corselet plus lisse, les élytres plus planes, moins distinctement ponctuées et dont cependant le 3e intervalle est plus fortement quadriponctué. J'avoue qu'il m'a été impossible de reconnaître ces indications comme constantes. Je ne doute pas cependant que ces insectes n'appartiennent à des espèces séparées : la différence de taille et de coloration est trop régulière pour que l'un ne soit qu'une variété de l'autre.

Presque toujours la suture est noirâtre ; lorsque cette couleur s'étend de manière à former une tache centrale, c'est la *Clivina discipennis*, Meg.

Les individus récemment transformés et qui sont d'un jaune pâle constituent la *Cliv. gibbicollis*, Meg.

Toute l'Europe.

17. *C. foveiceps.*

Testacea, labro subemarginato, clypeo in angulis bidentato, vertice fovea lata impresso cujus latera elevata; pronoto elongato-quadrato; elytris cylindricis, punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato; tibiis intermediis calcare spiniformi, recto, armatis. — Long. 5. El. 3. Lat. 1 1/2 mill.

Testacée, avec les mandibules noires. Le labre est très-légèrement échancré ; l'épistôme, assez fortement rebordé, a ses angles latéraux divisés en deux dents aigues ; l'élévation antérieure est bien marquée; elle porte de chaque côté une fossette profonde et arrondie ; le milieu de la tête est occupé par une dépression très-large dont les bords latéraux sont fortement relevés. Le corselet est un peu plus long que large ; ses côtés sont parfaitement parallèles ; il est légèrement échancré en avant ; ses angles postérieurs sont marqués par une petite dent près de laquelle on voit un gros point enfoncé ; sa surface ast couverte de rugosités et de quelques points peu marqués ; le sillon longitudinal et l'impression antérieure sont profonds et colorés en noir. Les élytres sont cylindriques, avec leurs épaules un peu avancées ; les stries sont ponctuées ; le 3e intervalle porte quatre points près de la 3e strie; la strie marginale se réunit à la base à la 4e. La tête et le thorax sont rugueux en dessous; l'abdomen légèrement et vaguement ponctué ; les pattes antérieures manquent ; les tibias intermédiaires, qui portent quelques longs poils épineux, sont munis avant l'extrémité extérieure d'un éperon long et aigu ; l'épine terminale des tarses est de moitié plus courte que les crochets.

Sénégal. 1 ind. Coll. Dupont.

18. *C. rugiceps.* Klug.

Nigro-picea, pedibus piceis, mandibulis apice nigris, palpis antennisque rufo-testaceis; clypeo subquadrato, fronte rugosa; pronoto subquadrato; elytris elongatis, cylindricis, striatopunctatis, interstitio tertio punctis quatuor impresso, humeris rotundatis; tibiis anticis extus bidigitatis. — Long. 7 mill.

Klug. Symb. phys. Dec. III. (1832). Tab 23. f. 6.

Égypte supérieure et Nubie.

Je n'ai pas vu cet insecte dont j'établis la diagnose d'après la description et la figure qu'en a donné M. Klug.

19. *C. ypsilon.* Dejean.

Rufa; menti lobis lateralibus apice truncatis, capite toto rugoso-punctato, labro in medio prominulo, clypeo in medio profunde emarginato, angulis

latis, truncatis, margine elevato, carina antice arcuata notato, a vertice sulco irregulari transversali separato, vertice ipso in medio longitudinaliter foveolato ; pronoto subquadrato, in medio sulcato, utrinque linea apice biloba impresso ; elytris cylindricis, punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis extus acute bidigitatis, denteque superiore armatis, intermediis parce spinoso-pilosis, ante apicem extus calcare valido, acuto, infra sub-emarginato. — Long. 6. El. 3 1/2. Lat. 1 3/4 mill.

Dej. Spec. V. p. 502 n° 30. Icon. I. 217. pl. 23. fig. 2.— *Laporte.* Hist. nat. Ins. I. 67. 2.

Des bords de la mer Caspienne.

20. *C. scripta.*

Rufo-testacea ; vertice late foveato; pronoto subquadrato antice latiore, utrinque impressione litteram Y referente notato; elytris cylindricis, punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis extus longe bidigitatis denteque superiore armatis ; intermediis calcare spiniformi ante apicem munitis. — Long. 5. El. 2 3/4. Lat. 1 1/3 mill.

D'un brun-testacé, plus clair sur les élytres, avec les mandibules noires. Le milieu du labre est plus avancé que ses angles qui sont arrondis ; l'épistôme est largement échancré ; ses lobes latéraux sont avancés, échancrés et les angles externes sont proéminens; l'élévation antérieure est en demi-cercle, peu marquée, bornée en arrière par un sillon large, mais peu profond ; le vertex porte au milieu une fossette large, arrondie, beaucoup moins profonde et autrement configurée que la fossette qui se trouve chez les *Cliv. fossor* et *Ypsilon*; l'occiput porte quelques points qui deviennent plus nombreux près des yeux. Le corselet est un peu plus long que large ; ses bords latéraux sont sinués ; ils se dilatent sensiblement près des angles antérieurs qui sont saillans ; le bord antérieur est sinué ; le sillon longitudinal et l'impression antérieure sont profonds; on remarque, de chaque côté, une impression en Y semblable à celle de la *Cliv. Ypsilon*. Les élytres sont allongées, cylindriques, tronquées à la base, avec les épaules arrondies, un peu rétrécies à l'extrémité, striées-ponctuées ; le 3e intervalle porte quatre gros points près de la 3e strie. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux longues digitations et au dessus une dent large et obtuse ; les tibias intermédiaires ont avant leur extrémité un éperon long, pointu, légèrement échancré en dessous ; l'épine terminale est très-étroite, de moitié plus courte que les crochets.

Cet insecte, qui m'a été communiqué par M. Lucas comme venant d'Algérie, diffère de la *Cliv. Ypsilon* par sa taille, la forme de l'épistôme, les impressions de la tête, ses antennes plus longues, la forme particulière du corselet qui est d'ailleurs proportionellement plus large et par les tibias antérieurs dont les digitations sont plus allongées.

21. *C. aucta.* Erichson.

Nigro-picea, nitida, antennis pedibusque rufo-piceis ; pronoto subquadrato ; elytris subtilius punctato-striatis, stria extima integra, striis interioribus apice obsolescentibus, interstitio quarto punctis quatuor impresso ; femoribus anticis apice subdentatis, tibiis extus fortiter tridentatis. — Long. 2 3/4 lin.

Erichs. Ins. Fn. v. Angola. (*Wiegm.* Arch. 1843).

Angola.

Je ne connais cet insecte que par la description de M. Erichson.

22. *C. elongata.* Chaud.

Nigro-picea, antennis pedibusque rufis ; clypeo emarginato, alis retractis, rotundatis, capite antice posticeque sulcato sulcisque duobus interruptis mediis ; pronoto subquadrato ; elytris elongatis, parallelis, profunde punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus bidigitatis, intermediis calcaratis. — Long. 5 , 6 1/2. El. 3 1/8 , 3 1/2. Lat. 1 1/3 , 1 2/3 mill.

Chaudoir. Bull. Mosc. 1843. p. 734.

Cette espèce diffère de la *Cliv. americana* avec laquelle elle est confondue dans plusieurs collections, par sa taille plus grande, ses élytres proportionellement plus allongées, moins convexes ; son corselet, qui est plus rétréci en avant, a les angles antérieurs plus avancés ; l'impression transversale n'atteint pas le bord antérieur ; il n'existe point au milieu, de chaque côté, d'espace ponctué ; l'épistôme est à peine rebordé et plus profondément échancré ; ses ailes sont situées plus en arrière ; le vertex ne porte pas de point au centre, mais entre les deux sillons transversaux on en remarque deux autres moins distincts, irréguliers et interrompus au milieu ; les yeux sont plus saillans ; les antennes sont aussi longues, mais leurs articles sont plus triangulaires ; la dent du menton est plus élevée, plus aigue et les lobes latéraux sont arrondis à leur sommet ; les tibias antérieurs sont plus larges et portent extérieurement deux digitations ; les tibias intermédiaires sont éperonnés ; l'épine terminale des tarses est un peu plus longue que les crochets.

Cayenne. 4 ind. Coll. Buquet (Leprieur), Hope et Dupont. Ce dernier individu est indiqué comme venant de l'Amérique du nord.

23. *C. americana.* Dejean.

Nigro-picea, antennis pedibusque rufis ; clypeo subtruncato, capite transversim bisulcato, vertice unipunctato ; pronoto subquadrato, utrinque in me-

dio punctulato; *elytris elongatis*, *parallelis*, *profunde punctato-striatis*, *interstitio tertio quadripunctato*; *tibiis anticis extus bidentatis*, *intermediis inermibus*. — Long. 5. El. 3. Lat. 1 1/2 mill.

Dej. Spec. t. V. p. 505. no 52.

La dent du menton est large, moins élevée que les lobes latéraux qui sont tronqués à leur sommet et qui portent une petite dent élevée vers les angles externes. Les antennes, composées d'articles presque triangulaires, atteignent les angles postérieurs du corselet. L'épistôme, régulièrement rebordé, est très-légèrement échancré au milieu; ses angles sont obtus, ses ailes arrondies et de très-peu plus reculées; l'élévation antérieure est en demi-cercle, arrondie en avant, tronquée en arrière par un sillon profond et lisse; le sillon placé en arrière des yeux est ponctué; on remarque au milieu du vertex un gros point un peu allongé. Le corselet a la base un peu plus prolongée que dans la *Cliv. fossor*; ses angles postérieurs sont indiqués par un point et par une petite dent; l'impression transversale atteint de chaque côté le bord antérieur; de chaque côté du corselet on remarque un espace ponctué; toute la surface porte des rides transversales plus distinctes vers les bords externes. L'extrémité du dernier segment est ferrugineuse; elle porte de part et d'autre deux points rapprochés l'un de l'autre, dont les deux internes sont les plus petits; les épines terminales des tarses sont de la longueur des crochets.

Amérique boréale. (Caroline). 4 ind. Coll. Dejean et Schaum.

24. *C. rufescens.* Dejean.

Rufa, *palpis*, *antennis pedibusque rufo-testaceis*; *clypeo antice truncato*, *angulis subprominulis*, *alis oblique retrorsum truncatis*, *capite bisulcato*; *pronoto subquadrato*, *sulco medio lato*, *transversali*, *in medio interrupto*; *elytris elongatis*, *parallelis*, *striatis*, *striis obsolete punctatis*, *interstitio tertio quadripunctulato*; *tibiis anticis extus quadridentatis*, *intermediis subcalcaratis*. — Long. 5. El. 2 7/8. Lat. 1 1/8 mill.

Dejean. Spec. V. 504. 33.

Les antennes n'atteignent pas tout-à-fait les angles postérieurs du corselet; elles grossissent très-distinctement vers l'extrémité; le 3e article est plus court que le précédent, pyriforme; le 4e est triangulaire; les suivans, sauf le dernier, sont transversalement globuleux. Le labre est large, sinué en avant, arrondi sur les côtés; l'épistôme est rebordé et tronqué; ses angles sont un peu plus fortement rebordés, un peu avancés et relevés; les ailes sont à peine plus reculées et tronquées obliquement; le sillon transversal placé au devant du front est peu profond; celui qui existe en arrière des yeux est ponctué, interrompu au milieu où l'on ne distingue

plus que quelques points ; les angles postérieurs du corselet sont marqués par un simple point intermédiaire ; le sillon longitudinal est profond, surtout en avant, et très-large ; l'impression transversale est interrompue au milieu ; les tibias intermédiaires ne sont pas sillonés en dessus ; l'épine terminale des tarses est plus courte que les crochets.

Amérique boréale. (Caroline du sud). Coll. Dejean, Hope, Schaum et Dupont.

25. *C. analis.*

Nigro-picea, palpis, antennis pedibusque testaceis, elytrorum margine externo, sutura extrema, segmentorum abdominalium margine ferrugineis ; clypeo truncato, alis retractis, rotundatis, liberis ; capite transversim bisulcato, vertice unipunctato ; pronoto quadrato ; elytris oblongis, striato-punctatis, interstitio tertio tri-vel quadripunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus bidentatis, intermediis inermibus. — Long. 4 3/4. El. 2 3/4. Lat. 1 1/8 mill.

D'un noir de poix, avec le dessous du corps et les pattes antérieures bruns, les palpes, les antennes et les quatre pattes postérieures testacés. Le labre est tronqué en avant, arrondi sur les côtés ; l'épistôme est tronqué, ses angles légèrement relevés sont obtus ; les ailes, situées un peu plus en arrière, sont étroites, arrondies, isolées du rebord latéral du front ; en arrière de l'épistôme on voit un sillon transversal profond et en arrière des yeux un second sillon peu marqué, mais large et ponctué ; le vertex porte un petit point dans son milieu ; les yeux sont proéminens et d'un blanc brillant ; le corselet est carré ; sa base est fortement prolongée après les angles postérieurs qui sont marqués par une petite dent ; le bord antérieur est largement échancré et les angles antérieurs sont déprimés ; toute sa surface est couverte de rugosités transversales ; les sillons longitudinal et transversal sont profonds ; le premier est légèrement rugueux. Les élytres sont oblongues, arrondies à la base et à l'extrémité, légèrement dilatées après le milieu ; elles sont profondément striées-ponctuées ; les stries sont un peu moins marquées vers l'extrémité ; le 3e intervalle porte trois ou quatre points plus gros ; le bord externe des élytres, l'extrémité, tant de la suture que des segmens abdominaux, sont ferrugineux. Les tibias antérieurs, sillonés en dessus, sont munis extérieurement de deux dents dont l'inférieure est très-longue ; les tibias intermédiaires ne sont point éperonnés extérieurement ; l'épine terminale des tarses est de la longueur des crochets.

Texas. 1 ind. Coll. Pilate.

26. *C. lobata.* Bonelli.

Brunnea, antennis pedibusque testaceis ; mandibulis angustis, apice nigris ;

vertice foveolato ; pronoto quadrato ; elytris subcylindricis, punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato ; femoribus anticis latissimis, dentatis, tibiis anticis extus longe bidigitatis dentatisque, intermediis infra medium calcaratis. — Long. 5 1/2. El. 3 1/4. Lat. 1 1/4 mill.

Bonelli. Obs. Ent. 2e pic. p. 49. n° 2. — *Dej.* Spec. I. 414. n° 2. — *Laporte.* Hist. nat. Ins. I. 67. n° 3.

Les lobes latéraux du menton sont tronqués obliquement en dessus ; les mandibules sont plus longues et plus étroites que dans les autres espèces ; le labre est arrondi en avant ; l'épistôme est échancré, mais l'échancrure n'est point en arc de cercle ; elle est formée de deux lignes droites ; les angles sont droits et proéminens ; les ailes sont plus reculées et arrondies ; l'élévation antérieure est peu prononcée, assez irrégulière et un peu rugueuse ; on remarque en arrière un sillon transversal interrompu au milieu ; le vertex porte une fossette un peu oblongue, dont le fond est arrondi ; en arrière des yeux, on distingue les deux extrémités d'un sillon transversal profond dont le milieu est interrompu. Le corselet est en carré, arrondi en arrière, sinué au bord antérieur, légèrement rétréci aux deux tiers du bord marginal, fortement rebordé ; la dent qui marque les angles postérieurs est bien distincte ; le sillon longitudinal est profond et atteint presque le bord antérieur ; de chaque côté, un peu avant le milieu, on distingue un espace couvert de quelques points épars. Les élytres sont de la largeur du corselet, presque cylindriques, avec les bords légèrement rétrécis au milieu, profondément ponctuées-striées ; le 3e intervalle porte quatre gros points près de la 3e strie ; les cuisses antérieures sont très-grosses, rugueuses, bidenticulées en dessous ; les tibias antérieurs sont carénés et portent extérieurement deux digitations allongées au dessus desquelles on distingue en outre une dent obtuse ; les tibias intermédiaires sont munis d'un éperon allongé ; l'épine terminale des tarses postérieures est aussi longue que les crochets.

Indes orientales. (Bengale). 2 ind. Coll. Dejean. 1 ind. Coll. Chevrolat sous le nom de *Cliv. fodiens* Illig.

27. *C. sabulosa.* Mac-Leay.

Nigro-brunnea ; fronte antice transversim sulcato, vertice impunctato ; pronoto subquadrato, subplano ; elytris elongatis, cylindricis, crenato-striatis.

Mac-Leay. Annul. Jav. ed. Lequien. p. 124. n° 44.

Java.

Je ne connais point cet insecte qui, d'après la description très-succincte de M. Mac-Leay, diffère des autres espèces des Indes orientales.

28. *C. extensicollis.*

Nigro-picea, palpis testaceis, antennis pedibusque brunneis; capite antice punctulato, vertice foveolato; pronoto elytrisque cylindricis, his fortiter punctato-striatis, interstitio tertio quadripunctato; tibiis anticis extus bidigitatis, intermediis calcaratis. — Long. 5 3/4. El. 3. Lat. 1 1/3 mill.

Le menton est très-concave et ses lobes latéraux sont presque tronqués à leur sommet, à peine plus élevés que la dent du milieu; les palpes sont courts et les deux derniers articles des maxillaires sont conformés comme chez les *Dyschirius*; les mandibules sont très-obtuses à leur extrémité; le labre est légèrement avancé au milieu; l'épistôme est régulièrement échancré en arc de cercle, uniformément rebordé; ses angles sont arrondis; l'élévation antérieure est elliptique, déprimée au milieu; le sillon qui lui succède est large et profond; le vertex porte une large fossette se bifurquant antérieurement; on remarque de gros points enfoncés sur toute la partie antérieure de la tête et derrière les yeux qui sont proéminens; ces derniers points se prolongent jusques sur l'occiput. Le corselet est très-allongé, presque cylindrique, se rétrécissant légèrement en avant; les angles antérieurs sont arrondis; les postérieurs sont indiqués par un point que n'accompagne aucun tubercule; le sillon longitudinal se prolonge presque jusqu'à l'extrémité; il est profond, régulier et lisse de même que l'impression antérieure; à quelque distance de la base de chaque côté, on distingue quelques points réunis. Les élytres sont de la largeur du corselet et n'ont que deux fois sa longueur; elles sont cylindriques, fortement ponctuées-striées, et le 3e intervalle porte trois ou quatre points contre la 3e strie; les épaules sont arrondies; les cuisses antérieures sont fort larges; les tibias antérieurs courts et triangulaires, non carénés, portent extérieurement deux digitations presque aussi fortes que dans la *Cliv. mandibularis*; il n'y a point de dent au dessus; les tibias intermédiaires sont élargis au milieu, épineux et armés d'un fort éperon à leur tiers inférieur; les crochets des tarses sont petits et grêles.

Java. 1 ind. Coll. Putzeys.

29. *C. angustata.* Dej.

Brunnea, nitida, mandibulis apice nigris. Caput latum, supra fere planum; menti angusti dens medius lobis lateralibus brevior, bisce elevatis, apice rotundatis; antennæ breves, eorum articulis secundus tertio longior et gracilior, 4-10 globosi; mandibulæ longiores, arcuatæ, angustiores, apice acuto; labrum in medio porrectum; clypei alæ intus rotundatæ, extus magis prominentes, angulis externis obtusis; margo inter illas truncata; vertex a clypeo carinula brevi arcuata separatus; fossula oblonga

lata neque profunda inter oculos; carinæ oculares vix rugosæ; punctum majus in capitis lateribus versus oculum utrumque, punctulaque multa post oculos parum prominentes. Pronotum capite vix latius, elongatum, angulis basalibus tuberculo nullo indicatis, marginibus parallelis; angulorum anticorum apex ipse prominens; margo anticus late emarginatus; impressio anterior abbreviata, sulcusque longitudinalis profunde impressi; fossula punctiformis pone utrunque angulum posticum. Elytra elongata, subcylindrica, in medio marginis angustiora, basi truncata angulo humerali nullo, apice ipso rotundato vix angustiore; striata, punctulis in striis parum distinctis; interstitio tertio punctis 4, quinto vero puncto unico, impressis. Caput, thorax abdomenque subtus rugosa atque punctulata; tibiæ anticæ longe bidigitatæ, denteque superiore armatæ; intermediæ fere glabræ, extus incurvæ, paulo post medium calcaratæ; spina tarsorum terminalis unguiculis æqualis.

Long. 7 5/4. El. 4. Lat. 2 1/8 mill.

Dej. Spec. V. p. 499. n° 27.

Sénégal. 2 ind. Coll. Dejean et Buquet.

30. *C. testacea.* Buquet. (Coll.).

Testacea, mandibulis nigris, pronoto rufo; *Cliv. mandibulari* simillima. Sequentibus distincta statura minore, capite angustiore, impressionibus minus distinctis, oculis magis prominulis; pronotum longius, planius, basi vix prolongato, in medio emarginato, sulco longitudinali minus profundo; elytra in medio latiora, apice angustiora, striis minus profundis; menti lobi laterales oblique subtruncati; tibiæ intermediæ minus hispidæ, calcare latiore longioreque armatæ; tarsorum spina terminalis unguiculis brevior

Long. 8. El. 4 1/2. Lat. 2 1/2 mill.

Sénégal. 1 ind. Coll. Buquet.

31. *C. ephippiata.* Chevrolat. (Coll.).

Nigra, ore, antennis, elytrorum basi atque margine, pedibusque brunneis; capite lævi, vertice unipunctato; antennarum articulis elongatis; pronoto oblongo, antice angustato, utrinque longitudinaliter impresso; elytris cylindricis, striato-punctatis, interstitio tertio quadripunctato, stria basali vix perspicua; tibiis anticis extus bidentatis, intermediis infra medium valide calcaratis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 1/4 mill.

Les lobes latéraux du menton sont arrondis; les mandibules sont courtes et larges; le labre est tronqué antérieurement; l'épistôme est légèrement échancré et ses angles sont arrondis et peu relevés; l'élévation an-

térieure est à peine distincte ; elle porte de chaque côté deux gros points ; on remarque au milieu du vertex une petite fossette et en arrière des yeux quelques points enfoncés ; toute la partie supérieure de la tête, y compris les carènes oculaires, est lisse ; les articles des antennes sont moins épais et plus allongés que dans les espèces voisines. Le corselet est peu convexe, plus long que large, se rétrécissant vers l'extrémité ; ses angles antérieurs sont déprimés, mais droits ; le bord antérieur est légèrement échancré ; le sillon longitudinal est profond, mais moins large que l'impression antérieure ; toute la surface du corselet porte des rugosités transversales éparses et peu distinctes ; de chaque côté, à la hauteur des angles postérieurs, on remarque deux impressions oblongues formées par cinq ou six gros points alignés. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet et plus de deux fois plus allongées ; elles sont presque cylindriques ; les épaules sont arrondies ; la strie basale n'est pas plus marquée que dans certains *Dyschirius* européens, (*thoracicus* p. ex.) ; la 4e strie se recourbe vers l'épaule et s'y réunit à la strie marginale ; les trois premières partent de la base même ; toutes sont bien distinctement ponctuées, mais elles deviennent moins profondes à l'extrémité ; les intervalles sont planes ; le 3e porte contre la 3e strie quatre points allongés fortement marqués. Les digitations des tibias antérieurs sont assez courtes ; la seconde n'est même pas plus développée que la dent placée au dessus des digitations dans la *Cliv. grandis* ; les tibias intermédiaires, légèrement dilatés au milieu, portent extérieurement, un peu plus bas que le milieu, un éperon long, fort, bien que peu dilaté à sa base ; l'épine terminale des tarses antérieurs est d'un tiers plus courte que les crochets ; celle des jambes postérieures est plus longue.

Java. 1 ind. Coll. Chevrolat.

32. *C. Bengalensis.* Dupont. (Coll.).

Brunneo-testacea ; clypeo sub-emarginato, angulis prominulis, elevatis ; capite lævigato ; pronoto oblongo-quadrato ; elytris cylindricis, striatis striis obsolete punctulatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis extus bidigitatis denteque obsoleto armatis, tibiis intermediis calcaratis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 mill.

D'un brun-testacé, avec la base des antennes, les palpes et les pattes d'une teinte plus pâle. Les lobes latéraux du menton sont tronqués à leur sommet ; les mandibules, dont l'extrémité est noire, sont arquées, planes, peu aigues et non rebordées ; les antennes ne grossissent nullement vers l'extrémité et atteignent la base du corselet ; leurs articles sont allongés et cylindriques ; le labre est transversal, faiblement avancé au milieu ; il porte au centre une impression longitudinale ; ses angles sont un peu

proéminens ; l'épistôme est large, tronqué en avant ; ses angles sont fort relevés ; le bord marginal porte au milieu une dépression qui le rend échancré, et de plus, deux impressions arquées situées intérieurement sur les côtés ; la tête est lisse. Le corselet a la même forme que dans la *Cliv. fossor* ; seulement il est un peu plus allongé et moins convexe ; la base est plus échancrée au milieu, un peu plus arrondie sur les côtés ; le point qui avoisine les angles postérieurs est situé plus intérieurement ; le sillon longitudinal est plus faiblement marqué ; il atteint le bord antérieur ; l'impression transversale, qui est à peine distincte, est plus rapprochée du bord antérieur qu'elle ne touche point à ses extrémités. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, presque trois fois plus longues, cylindriques, arrondies à la base humérale, un peu plus étroites à l'extrémité, peu convexes, munies de stries faiblement ponctuées qui tendent à disparaître vers l'extrémité ; les intervalles sont planes ; le 3e porte quatre gros points ; les tibias antérieurs ont deux digitations externes et une petite dent obtuse ; les tibias intermédiaires ont, plus bas que le milieu, un éperon spiniforme long et légèrement recourbé ; l'épine terminale des tarses antérieurs est d'un tiers plus courte que les crochets ; celle des tarses postérieurs est aussi longue.

Bengale. 1 ind. Coll. Dupont.

33. *C. cordata.*

Nigra, nitida, palpis, antennis pedibusque posticis testaceis ; antennis longioribus, clypeo truncato, alis retractis, rotundatis ; capite transversim bisulcato, vertice oblonge fovcolato ; pronoto subcordato ; elytris oblongis, basi subrotundatis, apice angustatis, striato-punctatis, apice lævibus, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus acute bidigitatis, intermediis inermibus. — Long. 6 1/4. El. 3 1/2. Lat. 1 7/8 mill.

Noire, avec les pattes antérieures brunes ; les palpes, les antennes et les quatre pattes postérieures testacés. Les mandibules sont assez prolongées ; les antennes sont longues, assez grêles et composées d'articles presque cylindriques ; l'épistôme est étroit, tronqué en avant, ses angles sont arrondis ; les ailes sont situées un peu en arrière, libres et arrondies ; au devant du front on remarque un sillon transversal, et en arrière des yeux un autre sillon moins profond, mais ponctué et un peu arqué ; le vertex porte dans son milieu une fossette oblongue. Le corselet est peu convexe, presque orbiculaire, mais le prolongement de sa base le fait paraître cordiforme ; les angles antérieurs sont très-déprimés et arrondis ; les sillons longitudinal et transversal sont profonds ; toute la surface est couverte de petites stries transversales ondulées. Les élytres sont oblongues ; la base est plutôt tronquée obliquement qu'arrondie ; l'extrémité est

légèrement rétrécie ; les stries sont profondes, peu régulières ; elles disparaissent au dernier quart ; leur ponctuation est assez faible ; le 3e intervalle porte quatre gros points. Les tibias antérieurs sont sillonés en dessus, bidigités extérieurement ; les intermédiaires ne portent pas d'éperon distinct ; l'épine terminale des tarses est plus courte que les crochets qui sont longs et peu courbés.

Nouvelle Orléans. 1 ind. Coll. Pilate.

34. *C. brunnea.*

Brunnea, antennis longioribus ; clypeo emarginato, angulis subprominulis, alis retractis, rotundatis, liberis ; capite bisulcato, vertice bi-foveolato ; pronoto subplano, quadrato, basi parum prolongata, rotundata ; elytris elongatis, cylindricis, basi humerisque rotundatis, punctato-striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus unidigitatis atque bidentatis, intermediis calcaratis. — Long. 6 1/2. El. 3 3/4. Lat. 2 7/8 mill.

Brune, avec les palpes, la base des antennes, le dessous du corps et les pattes d'une teinte plus claire. Les antennes sont composées d'articles plutôt triangulaires que globuleux ; elles atteignent les angles postérieurs du corselet ; le labre est bisinué, avancé au milieu, avec les angles arrondis ; l'épistôme est échancré ; ses angles sont peu proéminens ; les ailes sont situées plus en arrière ; elles sont arrondies et libres entre le côté de l'épistôme et le rebord externe de la tête ; la surface de l'épistôme est occupée par plusieurs carènes ondulées et irrégulières ; le sillon au devant du front est profond et transversal ; le vertex porte dans son milieu un gros point arrondi au devant duquel on en voit un autre moins distinct ; les yeux sont proéminens et dépassent d'un tiers le rebord latéral ; en arrière des yeux, on distingue un second sillon transversal, ponctué. Le corselet est assez plan, carré, à peine rétréci en avant ; la base, dont les côtés sont arrondis, est peu prolongée en arrière ; le bord antérieur est faiblement échancré et les bords marginaux sont arrondis ; la place des angles postérieurs n'est indiquée que par une petite dent qui ne dépasse point le rebord du corselet ; les sillons longitudinal et transversal sont profonds ; le 1er dépasse un peu le second dont les deux extrémités n'atteignent pas le bord antérieur du corselet ; toute la surface est couverte de rides transversales ondulées. Les élytres sont allongées, cylindriques, peu convexes ; la base et les épaules sont arrondies ; les stries, qui partent de la base même, sont ponctuées et distinctement moins profondes vers l'extrémité ; le 3e intervalle porte cinq points contre la 3e strie ; le corselet a, en dessous, le long de son bord antérieur un large sillon très-profond, interrompu au milieu. Les tibias antérieurs sont sillonés en dessus ; ils portent extérieurement une digitation très-longue, au dessus de laquelle on

remarque une grosse dent obtuse, puis une très-petite dent à peine distincte; les tibias intermédiaires sont éperonnés extérieurement; l'épine terminale des tarses est plus longue que les crochets qui sont petits et grêles.

Mexique. 1 ind. Coll. Dupont.

35. *C. erythropus.* Dupont. (Coll.).

Picea, palpis, antennis pedibusque brunneis; antennis longioribus, clypeo bisinuato, alis prominulis, rotundatis; capite subpunctulato; pronoto oblongo-quadrato, antice angustato, punctulato, basi bi-impresso; elytris elongato-oblongis, basi humerisque rotundatis, leviter striato-punctatis, interstitio tertio quadripunctato; segmento anali cribrato; tibiis anticis extus bidentatis, intermediis calcaratis. — Long. 6 1/4. El. 3 1/2. Lat. 1 7/8 mill.

Couleur de poix en dessus; le dessous du corps, les palpes, les antennes et les pattes bruns. Les antennes atteignent presque les angles postérieurs du corselet; leurs articles sont un peu allongés; le labre est avancé, étroit, et tronqué en avant, arrondi sur les côtés; l'épistôme est bisinué; les ailes sont beaucoup plus avancées et arrondies; la tête est finement et vaguement ponctuée; elle ne porte aucun sillon transversal et ce n'est qu'avec peine que l'on distingue une dépression au milieu du vertex. Le corselet est peu convexe, presque en carré allongé, rétréci des angles postérieurs à l'extrémité; le bord antérieur est échancré, les côtés sont droits, arrondis près des angles postérieurs qui sont marqués par une dent proéminente; les côtés de la base sont obliques et peu prolongés; la base elle-même est échancrée au milieu; le sillon longitudinal atteint le bord antérieur; toute sa surface est assez distinctement ponctuée; on remarque de chaque côté de la base, à la hauteur des angles postérieurs et plus près de ceux-ci que du milieu, une impression oblongue et ponctuée assez peu distincte. Les élytres sont allongées, un peu élargies après le milieu; la base, les épaules et l'extrémité sont arrondies; elles sont finement striées-ponctuées; le 3e intervalle porte quatre gros points près de la 3e strie. Les tibias antérieurs sont munis extérieurement de deux fortes dents; les tibias intermédiaires ont un éperon long et étroit. Le dernier segment de l'abdomen est entièrement couvert d'une ponctuation serrée, excepté le long du bord externe; l'épine terminale des tarses est de la largeur des crochets.

Colombie. 1 ind. Coll. Dupont.

36. *C. Boliviensis.*

Fusca; antennis longioribus, clypeo bisinuato, alis prominulis, rotunda-

tis ; capite subpunctato ; pronoto oblongo-quadrato, punctulato, basi bi-impresso ; elytris elongatis, parallelis, basi humerisque rotundatis, leviter striato-punctatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus bidigitatis, intermediis calcaratis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 mill.

Entièrement brune. Elle diffère de la *Cliv. erythropus* par sa taille plus grande, ses élytres plus allongées, plus parallèles et dont la base est un peu moins arrondie, par son corselet moins élargi en arrière, par conséquent plus carré, et dont les angles postérieurs sont moins marqués ; l'épistôme est plus large, ses ailes sont moins relevées, moins proéminentes ; le dernier segment de l'abdomen n'est pas distinctement ponctué ; les tibias antérieurs sont sillonés en dessus et bidigités extérieurement.

Bolivia. 1 ind. Coll. de M. de la Ferté qui l'a reçu de M. Guérin.

37. *C. fissipes.*

Brunnea, nitida ; elytris longioribus ; clypei alis retractis, rotundatis, vertice unipunctato ; pronoto subquadrato ; elytris elongatis, cylindricis, crenato-striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; femoribus anticis subtus apice dentatis ; tibiis extus digitatis, intermediis extus calcaratis. — Long. 8 3/4. El. 5. Lat. 2 1/2 mill.

Elle ne diffère de la *Cliv. dentifemorata* que par sa couleur brune, ses antennes un peu plus épaisses, ses élytres plus allongées, plus planes, la dent des cuisses antérieures moins forte, les tibias antérieurs non sillonés en dessus et leur dent supérieure un peu plus marquée.

Texas. 1 ind. Coll. Chevrolat.

38. *C. Lebasii.* Dej. (Catal.).

Brunnea, capite pronotoque piceis, ore, antennis palpisque testaceis ; clypeo truncato, vertice lævi, unipunctato ; pronoto subquadrato, angulis posticis dentatis ; elytris elongatis, parallelis, planis, leviter striato-punctatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis extus bidigitatis, intermediis breviter calcaratis. — Long. 6 1/4. El. 3 3/4. Lat. 2 mill.

Brune, avec la bouche, les antennes et les pattes testacés ; la tête et le corselet sont plus foncés ; les mandibules sont noires. Les lobes latéraux du menton sont presque tronqués à leur partie supérieure ; le labre est transversal, à peine avancé au milieu, arrondi sur les côtés ; l'épistôme est rebordé et tronqué en avant ; ses angles, nullement proéminens, sont arrondis ; l'élévation antérieure, peu marquée, est arrondie en avant, unie en arrière au vertex, qui porte au milieu un point enfoncé, mais n'est traversé par aucun sillon, les yeux sont très-proéminens : les côtés

de la tête sont légèrement ponctuées en arrière. Le corselet, peu convexe, est presque carré ; le bord antérieur est échancré au milieu ; les angles antérieurs sont arrondis ; les bords marginaux sont parallèles jusqu'aux angles postérieurs qui sont marqués par une petite dent saillante et par un point situé intérieurement ; ils se rétrécissent ensuite fortement jusqu'à la base qui est tronquée ; les sillons longitudinal et transversal sont bien marqués ; on distingue un large sillon le long du bord marginal, entre l'angle postérieur et le point situé au dessous de l'angle antérieur. Les élytres sont d'un quart plus larges que le corselet, deux fois et demie plus allongées, parallèles, planes, avec les épaules et l'extrémité arrondies ; les stries sont faiblement ponctuées ; les intervalles sont planes ; le 3e porte quatre points enfoncés contre la 4e strie. Les tibias antérieurs sont sillonés ; ils portent extérieurement deux fortes digitations ; les intermédiaires ont avant l'extrémité un éperon assez court et tronqué ; le dernier segment de l'abdomen porte extérieurement de chaque côté deux points, l'un à la base, l'autre à l'extrémité anale ; l'épine terminale des tarses est aussi longue que les crochets. — Le corselet est moins long que dans la *Cic. fossor* ; les angles postérieurs sont beaucoup plus marqués ; les élytres sont plus planes et moins profondément striées ; les antennes et les digitations des tibias antérieurs sont plus allongées.

Colombie. 2 ind. Coll. Dejean et Buquet.

39. *C. dentifemorata*. Chevrolat. (Coll.).

Nigra, nitida, ore antennisque longioribus testaceis ; clypei alis retractis, rotundatis, vertice unipunctato ; pronoto subquadrato : elytris elongatis, cylindricis, crenato-striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; femoribus anticis subtus apice dentatis ; tibiis sulcatis, extus bidigitatis, intermediis extus calcaratis. — Long. 8 3/4. El. 4 3/4. Lat. 2 1/2 mill.

D'un noir brillant ; les parties de la bouche et les antennes sont testacées. La dent du menton est aussi élevée que les lobes latéraux qui sont plus reculés et tronqués obliquement à leur bord supérieur ; le dernier article des palpes maxillaires est trois fois plus long que le pénultième ; il est presque cylindrique, à peine un peu élargi vers le milieu, et tronqué obtusément à l'extrémité. Les antennes, qui atteignent les angles postérieurs du corselet, sont peu épaisses et grossissent à peine vers l'extrémité ; le 2e article est en massue, un peu plus long que le 3e ; celui-ci et les deux suivans sont allongés, coniques ; les autres sont subcylindriques, un peu plus étroits à leur base ; le dernier est un peu plus long et atténué à l'extrémité. Le labre est arrondi et légèrement sinué en avant ; l'échancrure de l'épistôme est formée par deux lignes droites, disposées obliquement ; il est rebordé, et ses angles sont droits, bien qu'obtus à leur ex-

trémité ; ses ailes sont parfaitement arrondies et situées plus en arrière ; l'épistôme est séparé du front par un sillon transversal et lisse ; le vertex porte au milieu un point un peu allongé ; les yeux sont proéminens et couverts en avant jusqu'à leur milieu par le rebord latéral de la tête ; les sillons latéraux sont profonds ; en arrière des yeux on remarque un sillon transversal muni de quelques points ; le dessous de la tête est couvert de gros points et de rugosités profondes. Le corselet est presque carré, un peu plus étroit en avant, tronqué à son bord antérieur, arrondi en arrière, légèrement échancré à la base ; les angles antérieurs sont un peu avancés ; les côtés sont rebordés, rétrécis au dernier quart où se trouve le premier point marginal, puis légèrement arrondis jusqu'aux angles postérieurs qui sont marqués par une petite dent dirigée en avant et par un point intérieur ; le sillon longitudinal est lisse et profond ; il dépasse à peine l'impression transversale antérieure qui est plus large, rugueuse extérieurement et qui, n'atteignant pas les bords, se perd de chaque côté dans un gros point enfoncé ; toute la surface du corselet est ridée par des stries transversales ondulées peu distinctes. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, allongées, cylindriques ; la base et les épaules sont arrondies ; l'extrémité est à peine rétrécie ; les stries sont profondément crénelées ; la ponctuation est peu marquée à l'extrémité ; le 3e intervalle porte cinq gros points contre la 3e strie ; les cuisses antérieures ont en dessous vers leur extrémité une forte dent triangulaire ; les tibias sont sillonés en dessus et bidigités extérieurement ; l'épine terminale des tarses est plus longue que les crochets ; les tibias intermédiaires portent extérieurement à leur dernier quart un éperon long et spiniforme ; le dernier segment abdominal est bi-ponctué.

Mexique. ♂♀ 2 ind. Coll. Chevrolat et Dupont.

40. *C. armata.*

Picea, ore, antennisque longioribus, testaceis ; clypei alis retractis, rotundatis, vertice unipunctato ; pronoto subquadrato ; elytris elongato-ovatis, crenato-striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; femoribus anticis subtus apice dentatis ; tibiis sulcatis, extus digitatis, intermediis calcaratis.— Long. 7 3/4. El. 4. Lat. 2 1/4 mill.

Cette espèce diffère de la *Cliv. dentifemorata* par sa couleur, sa taille plus petite, ses élytres plus courtes, plus larges, son corselet dont la base est un peu plus prolongée et dont le sillon longitudinal atteint presque le bord antérieur, par l'épistôme plus déprimé à son bord antérieur, et ses cuisses moins larges et munies d'une épine moins longue.

J'en ai vu dans la collection de M. Dupont deux individus, dont l'un

est indiqué comme venant de Carthagène, l'autre de l'Amérique boréale; il est probable que tous les deux sont originaires de Colombie.

41. *C. corvina.*

Nigra, nitida, ore antennisque piceis; clypei alis retractis, rotundatis, vertice unipunctato; pronoto convexo, quadrato; elytris elongatis, crenato-striatis, interstitio tertio quinquepunctato; femoribus anticis subtus apice dentatis; tibiis anticis extus bidigitatis, intermediis extus calcaratis. — Long. 9. El. 4 3/4. Lat. 2 1/2 mill.

Très-voisine de la *Cliv. dentifemorata* dont elle diffère par sa taille un peu plus grande, ses élytres proportionellement plus courtes, ses épaules moins arrondies, son corselet plus large, plus convexe, encore moins rétréci en avant et dont le sillon longitudinal atteint le bord antérieur; par la dent des cuisses et les digitations des tibias antérieurs plus longues; les antennes sont aussi plus obscures.

Nouvelle Orléans. 2 ind. Coll. Pilate.

42. *C. dentipes.* Dejean.

Nigra, nitida, ore, antennisque longioribus testaceis; clypei alis retractis, rotundatis, vertice unipunctato; pronoto quadrato; elytris angustis, elongatis, cylindricis, crenato-striatis, interstitio tertio quinquepunctato; femoribus anticis subtus apice dentatis; tibiis extus bidigitatis, intermediis extus calcaratis. — Long. 7 1/2, 8. El. 4, 4 1/3. Lat. 2 1/8, 2 1/4 mill.

Dej. Spec. I. 415. 3.

Elle est très-distincte de la *Cliv. dentifemorata*; son corselet est moins convexe, moins rétréci en avant, par conséquent plus carré; ses élytres sont beaucoup plus étroites et plus allongées; la dent des cuisses antérieures est moins longue et les tibias ne sont point sillonés en dessus.

Amérique boréale. Cuba. Coll. Dejean et Hope.

43. *C. latimana.*

Atra, nitida; palpis, antennarum basi, pedibus anoque testaceis; labro marginato, in medio emarginato, alis rotundatis; capite transversim basuleato, vertice obsolete foveolato; pronoto elongato-quadrato, angulis depressis; elytris angustis, cylindricis, crenato-striatis, interstitio tertio quinquepunctato; tibiis anticis sulcatis, extus bidigitatis atque dentatis, intermediis calcaratis. — Long. 6 1/2. El. 3 7/8. Lat. 1 3/4 mill.

D'un noir brillant en dessus; dessous du corps brun; palpes, base des

antennes et pattes testacés. Les mandibules sont étroites, aigues; le labre, large et tronqué est, en dessus, avancé au milieu ; l'épistôme dépasse un peu les ailes qui sont arrondies ; il est fortement relevé antérieurement et profondément échancré au milieu ; en avant du front, on voit un sillon transversal large et profond, et en arrière des yeux, un second sillon moins marqué et ponctué ; le vertex porte l'empreinte d'un enfoncement oblong ; les yeux sont proéminens et dépassent, de la moitié, les rebords latéraux du front Le corselet est presque carré, un peu plus long que large, non rétréci en avant; le bord antérieur est sinué ; les angles antérieurs sont déprimés et les côtés parfaitement parallèles ; les sillons longitudinal et transversal sont profonds et bien nettement marqués; le dernier n'atteint pas le bord antérieur à ses deux extrémités, et des deux gros points où il se termine, on voit descendre jusqu'au milieu de chaque côté un sillon large, mais fort peu distinct. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, allongées, cylindriques, avec la base, les épaules et l'extrémité arrondies ; elles sont munies de stries profondes, crénelées par des points serrés ; le 3e intervalle porte cinq points enfoncés contre la 3e strie. Les tibias antérieurs sont larges et sillonés ; ils portent extérieurement deux digitations dont la première surtout est très-longue, et au dessus desquelles on distingue une petite dent obtuse ; l'éperon des tibias intermédiaires est gros et long ; la base des segmens abdominaux est ponctuée, de même que le dernier segment en entier ; celui-ci est ferrugineux à son bord externe.

Colombie. 1 ind. Coll. La Ferté.

44. *C. stenocephala.* Brullé.

Fusca, antennis pedibusque ferrugineis; capite angusto; pronoto antice angustato; elytris profunde striatis, striis subpunctatis, interstitio tertio triaut quadripunctato; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 3. Lat. 3/4 lin.

Brullé. Voy. d'Orbigny. Ins. p. 40. n° 168.

Prov. de Corrientes.

Je ne connais cet insecte que par la description qu'en donne M. Brullé.

45. *C. Columbica.* Buquet. (Coll.).

Nigra, nitida, subtus picea, ore antennisque brunneis; clypeo emarginato, alis retractis, rotundatis, capite bisulcato uniquepunctato; pronoto convexo, subquadrato; elytris subcylindricis, profunde striato-punctatis, interstitio tertio quinquepunctato; femoribus anticis subtus dentatis, tibiis bidigitatis atque unidentatis. — Long. 7 1/2. El. 4. Lat. 2 1/8 mill.

Le menton est très-court ; la dent du milieu est large, aigue à l'extré-

milié, aussi élevée que les lobes latéraux qui sont plus reculés et tronqués obliquement en dessus ; les antennes n'atteignent pas les angles postérieurs du corselet ; elles sont à peine plus larges à l'extrémité qu'à la base, composées d'articles presque cylindriques, un peu plus étroits à leur base ; le labre est avancé au milieu ; l'épistôme est légèrement échancré et rebordé ; ses angles sont droits ; ses ailes, plus reculées, sont arrondies, unies aux rebords latéraux de la tête par une ligne presque droite ; l'élévation antérieure est hémisphérique, coupée en arrière par un sillon transversal ; le vertex des deux côtés duquel on remarque le commencement d'un second sillon, porte, au milieu, un point enfoncé ; un sillon transversal ponctué occupe la partie postérieure de la tête. Le corselet est convexe, presque carré, avec les côtés et la base arrondis ; le bord antérieur est légèrement échancré ; les angles postérieurs sont indiqués par une petite dent ; le sillon longitudinal est bien marqué, quoique peu profond ; il atteint le bord antérieur ; l'impression transversale est ponctuée au fond et interrompue de chaque côté ; toute la surface est couverte d'ondulations transversales. Les élytres sont de très-peu plus larges que le corselet, cylindriques, arrondies à la base et à l'extrémité ; le bord marginal est légèrement sinué ; elles sont profondément striées-ponctuées ; les points disparaissent presque entièrement vers l'extrémité ; le 3e intervalle porte cinq points près de la 3e strie ; les cuisses antérieures ont une forte dent en dessous avant l'extrémité ; les tibias sont bidigités extérieurement ; au dessus de la 2e digitation on voit une petite dent très-peu marquée ; les tibias intermédiaires manquent ; l'épine terminale des tarses est de la longueur des crochets.

Cet insecte diffère surtout de la *Cliv. dentipes* par son corselet plus long, dont la base est plus prolongée et dont le sillon longitudinal atteint le bord antérieur ; par les ailes de l'épistôme qui sont plus isolées du rebord latéral de la tête ; enfin par la dent moins longue tant des cuisses que des tibias antérieurs.

Colombie. 1 ind. Coll. Buquet. (Rostaine).

46. *C. bidentata*. Chevrolat. (Coll.).

Nigra, nitida, antennis brunneis, palpis tarsisque testaceis ; clypeo emarginato, angulis rectis prominulis, alis retractis rotundatis ; capite transversim bisulcato, vertice unipunctato ; pronoto subquadrato, antice angustato, marginibus antico lateralique sinuatis, angulis anticis prominulis, posticis dentatis ; elytris elongatis, subparallelis, profunde crenato-sulcatis, basi transversim carinatis, interstitio tertio quinquepunctato ; femoribus anticis bidentatis ; tibiis sulcatis, extus bidigitatis, intusque unidentatis ; tibiis intermediis calcaratis. — Long. 8. El. 4 1/4. Lat. 2 1/8 mill.

D'un noir brillant, avec les antennes brunes, les palpes et les tarses testacés. Le labre est avancé et arrondi au milieu ; l'épistôme est plus avancé que les ailes ; il est largement échancré et ses angles sont droits et proéminens ; la tête porte deux sillons transversaux, le 1er en avant du front, lisse et peu profond au milieu, le 2e en arrière des yeux, plus large et ponctué ; sur le vertex on distingue un point enfoncé ; les yeux sont proéminens. Le corselet est presque carré, bisinué en avant, légèrement échancré au milieu ; ses angles antérieurs sont avancés, ses côtés bisinués, un peu élargis en arrière ; les angles postérieurs sont marqués par une dent obtuse et saillante ; le sillon longitudinal se prolonge jusqu'au bord antérieur ; le sillon transversal est interrompu des deux côtés et se perd dans une fossette profonde ; toute la surface porte des stries transversales ondulées, mais peu distinctes. Les élytres sont de la largeur du corselet en arrière, allongées, presque cylindriques, avec la base et les épaules arrondies ; elles sont profondément crénelées-striées ; les stries n'atteignent pas la base qui est occupée par une carène transversale formée par le prolongement de la suture et du bord externe ; la 6e strie interrompt cependant cette carène et se prolonge sur la base ; le 3e intervalle est marqué de cinq points dont le dernier est peu distinct ; les cuisses antérieures portent en dessous deux dents : l'une avant l'extrémité, l'autre, un peu plus petite, au milieu. Les tibias antérieurs sont sillonés en dessus, bidigités extérieurement et l'on voit au milieu des traces d'une dent assez large ; les tibias intermédiaires sont munis d'un éperon large et peu prolongé ; l'épine terminale des tarses est plus courte que les crochets qui sont grêles et peu courbés.

Brésil. (Campos). 1 ind. ♂. Coll. Chevrolat.

47. *C. laticeps.*

Nigro-picea, palpis, antennis longioribus, pedibusque brunneis ; capite lato, plano ; clypeo rotundato, alis retractis prominulis, vertice lævi, bisulcato, oculis prominulis pedunculatis ; pronoto subplano, subquadrato, antice parum angustato ; elytris oblongis, striato-punctatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis unidigitatis unique dentatis, intermediis calcaratis. — Long. 9. El. 5. Lat. 2 2/3 mill.

D'un noir de poix, un peu plus clair sur les élytres ; les palpes, les antennes et les pattes bruns. La dent du menton est aigue, aussi élevée que les lobes latéraux qui sont plus reculés et échancrés à leur bord supérieur ; la tête est large et plane ; les antennes atteignent les angles postérieurs du corselet ; elles sont peu élargies, composées d'articles presque cylindriques et un peu rétrécies à la base ; l'épistôme et ses angles latéraux sont arrondis ; ses ailes sont plus reculées, larges et arrondies ; il est un

peu élevé au milieu et séparé du front par un sillon profond; un autre sillon ponctué, se remarque en arrière des yeux, qui sont écartés, pédonculés et proéminens; le dessous de la tête est chagriné et ponctué. Le corselet est à peine plus large que la tête, y compris les yeux, presque carré, légèrement échancré à la base et à l'extrémité, sinué près des angles antérieurs qui sont un peu avancés; depuis le 1er point marginal jusqu'aux angles postérieurs, les côtés se dilatent légèrement en s'arrondissant; ces derniers angles sont marqués par une petite dent dirigée en avant; les sillons longitudinal et transversal sont bien marqués; le dernier n'atteint pas le bord antérieur à ses deux extrémités. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, oblongues, arrondies à la base et à l'extrémité; le bord marginal est largement rétréci au milieu; elles sont fortement striées-ponctuées, surtout à leur base; le 3e intervalle porte cinq points enfoncés; le 6e se réunit au dessus de l'épaule au bord marginal. Les cuisses antérieures portent avant l'extrémité une petite dent peu proéminente; les tibias sont larges; ils portent extérieurement une digitation très-longue et une dent obtuse au dessus de laquelle on aperçoit quelques traces d'une 3e dent; les tibias intermédiaires sont munis d'un éperon large et tronqué; les épines terminales des tarses sont de la longueur des crochets.

Colombie. 1 ind. Coll. Buquet. (Rostaine).

48. *C. dissimilis.*

Nigro-picea, palpis, antennis longioribus, pedibusque brunneis; capite lato, plano, clypeo rotundato, alis retractis, rotundatis, vertice bisulcato, lævi, oculis prominulis pedunculatis; pronoto oblongo-quadrato; elytris oblongis, striato-punctatis, interstitio tertio quinquepunctato; tibiis anticis extus unidigitatis unique dentatis, intermediis calcaratis. — Long. 7 3/4. El. 4. Lat. 2 1/4 mill.

Elle diffère de la *Clv. laticeps* par les points suivans: le bord antérieur de l'épistôme est légèrement échancre; le corselet est plus convexe et moins large, plus allongé; le bord antérieur est plus échancré et ses angles sont plus avancés; la base est prolongée en arrière; les élytres sont proportionellement plus étroites, moins rétrécies au milieu du bord marginal, moins arrondies à la base; les tibias antérieurs sont sillonés; leurs digitations, tant terminale qu'externe, sont moins longues; l'epine terminale des tarses dépasse les crochets.

Colombie. 2 ind. Coll. La Ferté et Dupont.

49. *C. fuscicornis.* Chevrolat. (Coll.).

Nigra, nitida, palpis, antennis pedibusque rufis; clypeo emarginato, angu

lis acutis prominulis, alis rotundatis, sulco transversali anteriore in medio angulato, vertice bipunctato; pronoto subquadrato, antice angustato, postice dilatato, basi rotundato nec prolongato; elytris oblongis, crenato-striatis, interstitio tertio bipunctato; tibiis anticis extus bidentatis, intermediis non calcaratis. — Long. 6 1/2. El. 3 1/2. Lat. 1 3/4 mill.

Noire; palpes, antennes et pattes d'un brun rougeâtre. Le labre est très-court et sinué; l'épistôme, rebordé et largement échancré en avant, a ses angles proéminens, aigus et relevés; les ailes sont arrondies et se confondent avec les rebords latéraux de la tête; le sillon situé en avant du front forme dans son milieu un angle sortant; le vertex porte de chaque côté un point enfoncé; toute la surface de la tête est parsemée de très-petits points écartés et que l'on ne distingue qu'avec peine, même à l'aide d'une forte loupe; les yeux sont saillans et dépassent un peu le rebord latéral du front; le dessous de la tête est ponctué et les points s'avancent jusque sur les côtés derrière les yeux. Le corselet est convexe, plus étroit en avant qu'en arrière; les angles postérieurs sont très-arrondis; la base n'est nullement prolongée; le bord antérieur est légèrement sinué et ses angles sont déprimés; le sillon longitudinal est peu profond et ne dépasse pas le sillon transversal qui atteint des deux côtés le bord antérieur: la surface du corselet porte de petits points semblables à ceux de la tête. Les élytres sont à peine aussi larges que le corselet en arrière, oblongues, tronquées à la base, avec les épaules arrondies, légèrement rétrécies à l'extrémité; les stries sont plus profondes à la base que vers l'extrémité et extérieurement; leurs points sont gros et bien marqués; le 3e intervalle est biponctué; les cuisses antérieures sont larges et épaisses; les tibias, sillonés en dessus, portent extérieurement deux grosses dents obtuses; les tibias intermédiaires n'ont point d'éperon externe. Les segmens abdominaux sont finement ponctués surtout vers leur bord externe. Les épines terminales des tarses sont nulles.

Brésil. (Campos). 1 ind. ♂. Coll. Chevrolat.

50. *C. tuberculata.*

Nigra, nitida, subtus picea, ore, antennis pedibusque intermediis atque posticis brunneis; labro emarginato, clypeo bidentato, alis extus dentatis, vertice quadrituberculato; pronoto lato, subquadrato, postice dilatato; elytris cylindricis, profunde punctato-striatis, interstitio tertio bipunctato; tibiis anticis sulcatis, extus tridentatis, intermediis inermibus. — Long. 10. El. 5 1/2. Lat. 2 2/3 mill.

D'un noir brillant en dessus, couleur de poix en dessous; les palpes, les antennes et les quatre pattes postérieures, brunes. La tête est large,

assez plane ; la dent du menton est large et courte ; les lobes latéraux ont leur bord supérieur élevé avant le milieu, puis tronqué obliquement ; le labre est échancré au milieu et arrondi sur les côtés ; l'épistôme est tronqué en avant ; ses angles sont avancés en forme de dents aigues ; les ailes, coupées obliquement, ont leur angle externe proéminent, aussi aigu et aussi avancé que les angles de l'épistôme ; les rebords latéraux de la tête sont larges, arrondis et dépassent en avant le milieu des yeux ; l'élévation antérieure a la même forme que le rebord antérieur de l'épistôme ; elle est assez courte et bornée en arrière par un sillon transversal sinué ; le sommet de la tête est occupé par quatre élévations peu régulières, séparées par deux lignes enfoncées qui se croisent sur le vertex. Le corselet est presque carré, fort arrondi et dilaté en arrière où il est plus large que les élytres, légèrement sinué en avant ; ses angles postérieurs sont arrondis et proéminens ; le bord marginal est rétréci au milieu ; entre les deux points marginaux on distingue un sillon interne assez profond. Le sillon longitudinal est profond dans toute son étendue et il atteint le bord antérieur ; l'impression transversale est également profonde et ponctuée. Les élytres sont trois fois plus longues que le corselet, cylindriques, avec la base coupée obliquement, les épaules arrondies, le bord marginal un peu sinué, l'extrémité arrondie ; leurs stries sont profondes et ponctuées également dans toute leur étendue ; le 3e intervalle ne porte que deux points près de la 3e strie, l'un en avant, l'autre en arrière ; les stries n'atteignent pas la base des élytres ; aucune d'elles ne s'y réunit à une autre strie. Les cuisses et les tibias antérieurs sont larges ; ces derniers sont sillonés en dessus et fortement tridentés à l'extérieur ; les tibias intermédiaires ne portent pas d'éperon ; les épines terminales des tarses sont très-grêles et plus courtes que les crochets. Les sillons longitudinaux en dessous du corselet sont très-peu marqués. Le dernier segment de l'abdomen a de chaque côté deux points marginaux : ceux près de l'anus sont très-rapprochés ; les deux autres sont situés au milieu du bord marginal.

Bogota. 2 ind. Coll. Reiche et Chevrolat.

51. *C. bipustulata.* Fab.

Atra, nitida, palpis, antennis, elytrorum basi maculisque posticis rotundatis, pedibusque rufis ; clypeo bidentato, alis oblique truncatis, fronte arcuatim sulcata, vertice foveolato atque bipunctato ; pronoto subquadrato ; elytris oblongo-parallelis, punctato-striatis, interstitio tertio bipunctato ; tibiis anticis extus tridentatis, intermediis inermibus. — Long. 6 1/2, 7 1/2. El. 3 3/4, 4. Lat. 1 3/4, 2 1/8 mill.

Fabr. S. E. I. p. 125. n° 14.
Schoenh. S. I. I. p. 128. n° 18.
Pal. Beauv. p. 103. t. 15. f. 6.

Dej. Spec. I. 417. 5.
Laporte. Hist. nat. Ins. I. 67. n° 5.

Cette espèce, qui est assez répandue dans les collections, varie un peu quant à la teinte des taches qui ornent ses élytres ; celles qui occupent l'extrémité et qui sont arrondies, sont plus colorées ; les deux premières, qui s'étendent sur tout le premier tiers des élytres, sont ordinairement plus obscures et quelquefois très-peu distinctes ; c'est sur un de ces derniers individus que Fabricius a établi son *Scarites bipustulatus ;* les premiers sont le *Scarites quadrimaculatus* de Palisot de Beauvois.

L'examen de tous les individus que j'ai eu sous les yeux ne m'a pas permis de confirmer la supposition de M. Say, que les *Scar. bipustulatus* et *quadrimaculatus* constitueraient des espèces différentes. (Voy. Brullé. *Rev. Ent. Silberm.* II. 89.).

A la description de Dejean j'ajouterai quelques observations. La dent du menton est courte ; les lobes latéraux sont élevés, arrondis tant à leur sommet qu'intérieurement et extérieurement. Les antennes sont courtes, et grossissent vers l'extrémité ; les articles 4-10 sont presque globuleux. Le labre, vu en dessus, paraît légèrement échancré, mais dans la réalité, il est tronqué en avant. L'épistôme est légèrement sinué ; ses angles sont relevés, aigus et rebordés ; les ailes sont larges, un peu plus reculées, tronquées obliquement en dessus, avec leurs angles externes obtus ; elles s'unissent presque aux rebords latéraux de la tête qui s'étendent jusqu'en face du milieu des yeux ; l'épistôme est relevé en arrière et suivi par un sillon arqué très-distinct ; au milieu de la tête on remarque une fossette allongée peu profonde de chaque côté de laquelle sont deux gros points ; entre la fossette du vertex et le sillon antérieur, on distingue ordinairement quelques petits points. Le 3e intervalle des élytres porte deux points contre la 3e strie, l'un en avant, l'autre situé en arrière. Les tibias antérieurs sont larges et sillonés en dessus ; les trois dents externes sont fortes et assez courtes ; les deux sillons longitudinaux en dessous du corselet sont peu marqués. Chaque segment abdominal porte quelques points groupés au milieu de sa base ; le dernier est entièrement couvert de points beaucoup plus petits et distincts seulement à l'aide d'une très-forte loupe ; de chaque côté de l'anus on remarque un gros point pilifère ; un autre point semblable se trouve au milieu du bord marginal ; l'épine terminale des tarses n'est pas distincte.

Amérique boréale. Louisiane.

52. *C. striatopunctata.* Dejean.

Nigro-picea, subtus picea, palpis antennis pedibusque rufo-brunneis ; clypei angulis alisque prominulis, vertice oblongo foveolato punctisque duobus

impresso ; pronoto subquadrato, antice distincte angustato, basi nequaquam prolongato, superficie tota vage punctata ; elytris elongatis, parallelis, fortiter striato-punctatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis latis, sulcatis, tridentatis, intermediis inermibus ; abdominis segmentis margineque punctatis, ultimo toto punctato. — Long. 5. El. 2 3/4. Lat. 1 1/3 mill.

Dej. Spec. V. p. 505. 34.

Aux caractères signalés par Dejean j'ajouterai les suivans : les antennes sont plus courtes et plus épaisses à l'extrémité que dans la *Cliv. americana ;* l'épistôme est légèrement sinué au milieu, ses angles sont proéminens et relevés ; les ailes sont un peu plus reculées, mais leurs angles externes sont aigus et tout aussi avancés ; les bords latéraux de la tête sont aussi larges que les yeux ; à la partie postérieure de l'épistôme on remarque une carène élevée, plus avancée au milieu, et longée par un sillon de même forme ; le vertex porte une fossette oblongue qui se prolonge en avant jusqu'au sillon transversal et de chaque côté de laquelle on voit un gros point enfoncé ; toute la surface du corselet est couverte d'une ponctuation bien distincte, disposée sans ordre et un peu plus serrée des deux côtés du sillon longitudinal ; immédiatement après les angles qui sont très-arrondis, le bord postérieur est presque tronqué par un rebord transversal ; l'épine terminale des tarses est plus courte que les crochets.

Amérique boréale. 1 ind. Coll. Dejean.

53. *C. fuscipes.* Reiche. (Coll.).

Nigra, nitida, ore, antennis pedibusque fuscis ; clypeo truncato, angulis prominulis, alis extus denticulatis, vertice trifoveolato anticeque angulatim sulcato ; pronoto subquadrato, postice rotundato, antice angustato ; elytris oblongis, subcylindricis, fortiter punctato-striatis, interstitio tertio unipunctato ; tibiis anticis sulcatis, bidentatis, intermediis non calcaratis. — Long. 3 3/4. El. 3 1/4. Lat. 1 1/2 mill.

D'un noir brillant en dessus, d'un brun de poix en dessous ; palpes, antennes et pattes fauves. Les antennes sont courtes et moniliformes ; le labre est court, échancré au milieu ; l'épistôme est rebordé, tronqué, avec ses angles aigus, proéminens et relevés ; les ailes sont un peu plus avancées que le bord antérieur de l'épistôme, mais plus reculées que les angles ; elles sont régulièrement arrondies ainsi que les rebords latéraux ; elles présentent cependant une petite dent relevée ; la partie postérieure de l'épistôme est relevée et le sillon longitudinal qui la suit est profond et forme au milieu un angle au fond duquel on aperçoit une petite fossette assez marquée ; le vertex porte dans son milieu une fossette oblongue, assez peu distincte, et de chaque côté deux autres fossettes semblables, mais

beaucoup plus profondes. Le corselet est convexe, presque carré, très-arrondi à sa base qui n'est point prolongée, rétréci vers l'extrémité; son bord antérieur est droit; le sillon longitudinal est bien distinct et dépasse le sillon transversal sans cependant atteindre le bord antérieur; cette dernière impression est entière; toute la surface du corselet est parsemée de très-petits points fort écartés les uns des autres. Les élytres sont de la largeur du corselet en arrière, allongées, presque cylindriques, tronquées à la base, avec les épaules arrondies, un peu rétrécies à l'extrémité; elles sont profondément striées-ponctuées et le 3e intervalle ne porte qu'un seul point distinct vers le dernier quart; le bord externe des élytres est brunâtre vers l'extrémité. Les tibias antérieurs sont larges, sillonés en dessus et fortement bidentés extérieurement; les tibias intermédiaires n'ont pas d'éperon à leur bord externe. Les épines terminales des tarses ne sont point distinctes.

Colombie. 1 ind. Coll. Reiche.

54. *C. marginipennis.*

Nigra, nitida, palpis, antennis, pedibus, elytrorum margine suturaque postica ferrugineis; clypeo truncato, angulis prominulis, alis extus denticulatis, vertice trifoveolato anticeque angulatim sulcato; pronoto subquadrato; elytris oblongis, subcylindricis, basi subrotundatis, fortiter punctato-striatis, interstitio tertio unipunctato; tibiis sulcatis, extus bidentatis, intermediis inermibus. — Long. 6 3/4. El. 3 1/2. Lat. 2 mill.

D'un noir brillant en dessus, brun en dessous; palpes, antennes et pattes ferrugineux de même que le bord externe des élytres et la dernière moitié de la suture. La tête est semblable à celle de la *Cliv. fuscipes*, mais un peu plus forte; le corselet est moins allongé, plus large dans toutes ses proportions et particulièrement en avant; il est toutefois moins carré et a les angles antérieurs moins déprimés que dans la *Cliv. media*; il est antérieurement plus large que dans la *Cliv. striato-punctata*; les stries et leur ponctuation sont plus fortes que dans la *Cliv. fuscipes*; les dents externes des tibias antérieurs sont moins proéminentes.

Nouvelle Orléans et Yucatan. 3 ind. Coll. Pilate.
Guadeloupe. 1 ind. Coll. Chevrolat.

55. *C. media.*

Nigra, nitida, ore, antennis pedibusque fuscis; clypeo truncato, angulis prominulis, alis subtruncatis, extus denticulatis, vertice bifoveolato anticeque angulatim sulcato; pronoto subquadrato, postice rotundato, antice subangustato; elytris oblongis, subcylindricis, fortiter punctato-striatis, interstitio

tertio unipunctato ; *tibiis sulcatis, bidentatis, intermediis non calcaratis.* Long. 6. El. 3 1/2. Lat. 2 mill.

Elle ressemble tout-à-fait à la *Cliv. fuscipes* dont elle ne diffère que par les caractères suivans : les ailes de l'épistôme sont moins arrondies à leur sommet ; le vertex ne porte que les deux points latéraux ; le corselet est plus court, plus large et moins rétréci antérieurement ; les angles postérieurs, coupés obliquement, sont plus arrondis et plus déprimés ; le sillon longitudinal est moins profond ; la ponctuation de la surface est encore moins distincte ; les élytres sont plus larges, plus fortement tronquées à la base ; leur bord externe est brun depuis le milieu jusqu'à l'extrémité ; les dents des tibias antérieurs sont un peu plus courtes.

Buénos-Ayres. 1 ind. Coll. Dupont.

56. *C. tristis.*

Nigra, nitida, palpis testaceis, antennis pedibusque brunneis ; clypeo truncato, angulis subprominulis, alis rotundatis, vertice bifoveolato ; pronoto quadrato, vage punctato ; elytris oblongis, subcylindricis, basi truncatis, fortiter punctato-striatis, interstitio tertio bipunctato ; tibiis anticis sulcatis, bidentatis, intermediis inermibus. — Long. 4 1/2. El. 2 1/2 Lat. 1 1/2 mill.

La forme de cette espèce la rapproche de la *Cliv. media* dont elle diffère par sa taille beaucoup plus petite, ses antennes et ses pattes plus obscures ; son corselet, encore moins rétréci antérieurement, est parsemé sur toute sa surface de points aussi marqués que dans la *Cliv. bisignata* ; la base des élytres est encore plus tronquée que dans cette dernière espèce ; les tibias antérieurs sont plus larges, plus profondément sillonnés en dessus ; leurs dents externes sont un peu plus longues et l'on distingue les traces d'une troisième.

Nouvelle Grenade. 1 ind. Coll. La Ferté.

57. *C. bisignata.*

Nigra, nitida, palpis, antennis, pedibus, elytrorum margine externo notisque duabus brunneo-ferrugineis ; clypeo truncato, alis rotundatis, vertice trifoveolato ; pronoto quadrato, vage punctulato, angulis maxime depressis ; elytris oblongis, basi humerisque rotundis, apice angustatis, striato-punctatis ; tibiis anticis sulcatis, extus unidentatis, intermediis inermibus. — Long. 5 1/4. El. 3. Lat. 1 1/3 mill.

D'un noir brillant en dessus, d'un brun de poix en dessous ; les palpes, les antennes et les pattes d'un brun-rougeâtre. L'épistôme est tronqué en

avant et ses angles sont à peine marqués par une petite dent ; les ailes sont sur la même ligne, arrondies, et elles se confondent avec les rebords latéraux ; le sillon transversal au devant du front est arqué, large, mais peu profond ; le vertex porte au milieu une fossette plus marquée ; on remarque quelques points en arrière des yeux. Le corselet est carré, à peine rétréci en avant, très-arrondi à la base qui n'est nullement prolongée, légèrement sinué à son bord antérieur ; les angles antérieurs sont très-déprimés et arrondis ; toute la surface est parsemée de points assez gros et irrégulièrement disposés ; le sillon longitudinal est bien marqué, quoique peu profond ; il dépasse de très-peu le sillon transversal qui est presque interrompu au milieu et qui atteint des deux côtés le bord antérieur. Les élytres sont de la largeur du corselet, oblongues, avec la base et les épaules très-arrondies et les bords marginaux se rétrécissant vers l'extrémité ; elles sont striées-ponctuées ; les stries et les points sont bien marqués dans toute leur étendue, quoiqu'ils deviennent moins profonds vers l'extrémité ; il n'existe pas de points distincts sur le 3e intervalle ; la dernière moitié du bord marginal est ferrugineuse, et chaque élytre porte au milieu du dernier tiers une tache arrondie de même couleur. Les tibias antérieurs qui sont sillonnés en dessus, ne portent extérieurement qu'une seule grosse dent ; on distingue à peine la trace d'une seconde dent au dessus de la 1re ; les tibias intermédiaires ne sont point éperonnés ; l'épine terminale des tarses est à peine distincte.

Amérique boréale. 1 ind. Cet insecte se trouve dans la Coll. Dejean sous le nom de *Cliv. bipustulata*, var.

58. *C. picea.*

Picea, palpis antennisque testaceis, pedibus elytrorumque margine posteriore brunneis ; clypeo truncato, alis rotundatis, vertice trifoveolato ; pronoto quadrato, vage punctato ; elytris elongatis, basi subrotundatis, striato-punctatis, interstitio tertio bipunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus bidentatis, intermediis inermibus. — Long. 4 3/4. El. 2 1/2. Lat. 1 1/4 mill.

Elle diffère de la *Cliv. bisignata* par son corselet moins large, moins convexe, non rétréci à l'extrémité, avec ses angles antérieurs moins déprimés ; ses élytres sont moins rétrécies à l'extrémité, presque parallèles, un peu moins arrondies à la base ; le 3e intervalle porte deux points enfoncés, l'un en avant, l'autre en arrière ; le bord postérieur des élytres est brun ; on ne distingue aucune trace de tache vers l'extrémité ; les tibias antérieurs sont sillonés et munis extérieurement de deux fortes dents ; les tibias intermédiaires n'ont pas d'éperon distinct.

Louisiane. 1 ind. Coll. Chevrolat.

59. *C. stigmula.*

Picco-nigra, nitida, palpis, antennis pedibusque testaceis, elytrorum margine externe notisque duabus ferrugineis ; clypeo truncato, alis rotundatis, vertice trifoveolato ; pronoto subquadrato, antice angustato ; elytris oblongis, basi humerisque rotundatis, apice angustatis, striato-punctatis ; tibiis anticis sulcatis, extus bidentatis, intermediis inermibus. — Long. 5. El. 2 3/4. Lat. 1 1/2 mill.

Cette espèce est voisine de la *Cliv. bisignata* dont elle diffère particulièrement par la forme du corselet qui est moins convexe, plus allongé, rétréci de la base à l'extrémité et dont les angles sont beaucoup moins déprimés ; sa surface n'est nullement ponctuée ; ses trois fossettes sont moins profondes et lisses ; les élytres sont un peu plus étroites et les deux taches de l'extrémité sont moins circonscrites ; on distingue en arrière un point sur le 3e intervalle contre la 3e strie ; les tibias antérieurs qui sont sillonés en dessus, ont leur digitation terminale plus forte et plus longue ; on voit au côté externe deux fortes dents.

Texas. 2 ind. Coll. Pilate.

60. *C. morio.* Dejean.

Nigra, nitida, subtus nigro-picea, palpis antennisque longioribus testaceis, pedibus brunneis ; clypei alis rotundatis, capite unipunctato et bisulcato ; pronoto subovato ; elytris oblongo-ovatis, antice profunde striato-punctatis, postice lævigatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis extus bidigitatis, intermediis inermibus. — Long. 8. El. 4 1/2. Lat. 2 2/3 mill.

Dejean. Spec. V. 506. n° 55.

Je n'ai que peu de chose à ajouter à la description de Dejean :

La dent du menton est très-large et occupe presque toute l'échancrure ; les lobes latéraux sont étroits, très-divergens et arrondis à leur sommet ; les antennes sont longues et atteignent les angles postérieurs du corselet ; elles grossissent à peine vers l'extrémité ; leurs derniers articles sont cylindriques ; le labre est arrondi ; l'épistôme est tronqué en avant, avec ses angles arrondis ; ses ailes sont un peu plus reculées, arrondies et isolées des rebords latéraux de la tête ; en arrière de l'épistôme se trouve un sillon transversal lisse ; un autre sillon ponctué se remarque en arrière des yeux ; le vertex porte un point enfoncé ; l'épine terminale des tarses est plus longue que les crochets.

Amérique boréale. 1 ind. Coll. Dejean.

61. *C. picipes*. Bonelli.

Atra, nitida, subtus picea, palpis, antennis, pedibusque brunneis; clypeo subemarginato, alis prominulis, obtusis, postice sulco lobato a fronte separato, vertice arcuatim impresso, utrinque unipunctato; pronoto subquadrato, postice rotundato, antice vix angustato; elytris oblongis, punctato-striatis; tibiis anticis extus tridentatis, intermediis inermibus. — Long. 8. El. 5 1/2. Lat. 2 1/3 mill.

Bonelli. Obs. Ent. 2e partie, p. 49. n° 3.
Dej. Spec. I. 416. 4. — *Laporte.* Hist. nat. Ins. I. 67. n° 4.

D'un noir brillant en dessus, couleur de poix en dessous; palpes, antennes et pattes bruns. Le menton est transversal; la dent du milieu est large et courte; les lobes latéraux sont arrondis à leur sommet et aux angles externes; les antennes sont courtes et grossissent vers l'extrémité; leurs articles, à partir du 4e, sont courts et presque globuleux; le labre est relevé, sinué en avant; le milieu est avancé; les angles sont arrondis et recouverts de poils fauves inclinés; l'épistôme est peu rebordé, légèrement échancré au milieu; ses ailes sont avancées, en angle obtus à leur sommet; leurs côtés externes sont plus longs que les côtés internes; le sillon qui sépare l'épistôme du front est arqué; il a au milieu une saillie dirigée en avant; le vertex porte une fossette en fer à cheval des deux côtés de laquelle on remarque un point enfoncé; les yeux sont proéminens, mais ils ne dépassent pas la saillie marginale du front. Le corselet est presque carré, fortement arrondi en arrière, avec les côtés de la base très-peu prolongés, à peine un peu rétréci en avant; le bord antérieur est légèrement sinué; les angles sont arrondis et proéminens; le bord marginal est un peu rétréci avant le milieu; les angles postérieurs ne sont indiqués par aucune dent; le dessous du corselet fait un peu saillie; le sillon longitudinal est bien marqué sans être profond; il dépasse quelque peu l'impression transversale qui est ponctuée, et interrompue à ses deux extrémités. Les élytres sont à peine plus larges que le corselet, en ovale allongé, convexes, avec la base arrondie et un peu plus large que l'extrémité; elles sont striées-ponctuées; la 1re strie est la plus profonde; le 3e intervalle n'a pas de points distincts. Les pattes sont courtes et fortes; les tibias antérieurs ont leur digitation terminale peu prolongée et à leur côté externe on distingue trois dents bien marquées; les tibias intermédiaires ne sont point éperonnés. Tous les segmens abdominaux sont ponctués à leur base vers les bords.

Cet insecte, dont je n'ai vu qu'un seul individu, fait partie de la collection de M. Dejean qui l'a décrit comme étant la *Cliv. picipes* de Bonelli. La description de Bonelli étant très-courte et pouvant s'appliquer à plu-

sieurs espèces, je n'oserais point affirmer que la *Cliv. picipes* de Dejean soit celle de l'entomologiste de Turin.

Amérique boréale. 1 ind. Coll. Dejean.

62. *C. fasciata.* Pilate. (Coll.).

Brunnea, palpis, pedibus elytrisque ferrugineis, hisce fascia lata mediana nigra notatis; clypeo antice truncato, angulis subprominulis, sulco transverso antico arcuato; vertice sulco longitudinali sulculisque duobus impresso; pronoto subquadrato, antice subangustato, basi rotundato, angulis anticis depressis; elytris elongato-cylindricis, basi truncatis, humeris prominulis, striato-punctatis, interstitio tertio bipunctato; tibiis anticis sulcatis, extus tridentatis, intermediis inermibus. — Long. 5. El. 2 3/4. Lat. 1 1/8 mill.

Brune, avec les palpes, les quatre pattes postérieures et les élytres ferrugineux; ces dernières traversées, un peu après leur milieu, par une large bande noire qui remonte un peu le long de la suture. Les antennes atteignent à peine le milieu du corselet; le labre qui, en dessous, est tronqué, est légèrement échancré au dessus; l'épistôme est tronqué en avant; ses angles sont aigus, peu prolongés et un peu relevés; les ailes sont presque sur la même ligne, étroites et anguleuses; le sillon transversal en avant du front est arqué; le milieu de la tête est occupé par un sillon longitudinal large et profond, de chaque côté duquel on en distingue deux autres, beaucoup plus courts et obliques. Le corselet est carré, arrondi en arrière, avec le milieu de la base légèrement échancré, les côtés un peu sinués et se rétrécissant vers les angles antérieurs qui sont très-déprimés et arrondis; le bord antérieur est légèrement échancré au milieu; le sillon longitudinal dépasse un peu le sillon transversal; toute la surface est parsemée de points extrêmement petits et à peine perceptibles au moyen d'une très-forte loupe. Les élytres sont de la largeur du corselet en arrière, allongées, cylindriques, avec la base tronquée et les épaules à peine arrondies; elles sont striées-ponctuées et le 3e intervalle porte deux gros points contre la 3e strie. Les tibias antérieurs qui sont sillonés en dessus, portent extérieurement deux fortes dents au dessus desquelles on en distingue une troisième très-petite; les tibias intermédiaires ne sont point éperonnés; l'épine terminale des tarses n'est point distincte.

Yucatan. (Merida). 5 ind. Coll. Chevrolat, Pilate et Putzeys.

63. *C. Klugii.* Dejean. (Coll.).

Brunnea, palpis, pedibus elytrisque ferrugineis, hisce fascia media lata nigra notatis; clypeo antice truncato, angulis subprominulis, sulco transverso

antico arcuato ; vertice sulco longitudinali sulculisque duobus impresso ; pronoto quadrato, margine laterali sinuato ; elytris elongatis, subcylindricis, basi truncatis, apice angustatis, striato-punctatis, interstitio tertio bipunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus tridentatis, intermediis inermibus. — Long. 5. El. 2 3/4. Lat. 1 1/2 mill.

Cette espèce diffère de la *Cliv. fasciata* par sa taille moindre, son corselet moins convexe, nullement rétréci en avant, quoique plus distinctement rétréci en dessous des angles antérieurs qui ne sont point déprimés ; les élytres sont moins allongées et plus rétrécies en arrière.

Colombie. Un individu figure dans la collection Dejean sous le nom que j'ai conservé à cette espèce : il provient de M. Klug qui l'avait nommé *sulcifrons*. J'en possède un second individu venant de Cumana.

64. *C. sculptifrons.* La Ferté. (Coll.).

Brunnea, palpis, pedibus elytrisque ferrugineis, hisce fascia media lata nigra notatis ; clypeo antice truncato, angulis subprominulis, sulco transversali antico arcuato ; vertice sulco longitudinali sulculisque duobus impresso ; pronoto subquadrato, postice latiore, lateribus rectis, angulis anticis depressis ; elytris elongatis, cylindricis, basi truncata, striato-punctatis, interstitio tertio bipunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus bidentatis, intermediis inermibus. — Long. 5. El. 2 3/4. Lat. 1 1/8 mill.

Elle ne diffère de la *Cliv. fasciata* que par son corselet un peu plus court, plus large en arrière et moins sinué extérieurement ; les tibias antérieurs ne portent extérieurement que deux dents.

Colombie. 3 ind. Coll. La Ferté, Dupont et Reiche.

Chez les individus récemment transformés, tout le corps est de couleur plus claire et la bande noire est à peine distincte.

65. *C. brunnipennis.*

Brunnea, capite thoraceque piceis ; clypeo antice emarginato, angulis prominulis ; sulco transversali antico arcuato, vertice sulco longitudinali sulculisque duobus arcuatis impresso ; pronoto subquadrato, postice sublatiore, angulis anticis depressis ; elytris elongato-cylindricis, basi truncatis, humeris subrotundatis, striato-punctatis, interstitio tertio bipunctato ; tibiis anticis sulcatis, extus bidentatis, intermediis inermibus. — Long. 5 3/4. El. 3. Lat. 1 1/2 mill.

Voisine de la *Cliv. fasciata*, mais plus grande ; la tête et le corselet sont couleur de poix et les élytres entièrement brunes ; le milieu de l'épistôme

est échancré ; les ailes sont plus proéminentes ; les sillons latéraux du vertex sont arqués en fer à cheval et atteignent presque le sillon du milieu ; le corselet est un peu plus élargi en arrière ; les épaules sont plus arrondies ; les stries sont plus faibles et les points plus petits.

Mexique. 2 ind. L'un fait partie de la collection Dejean où il est indiqué comme étant la *Cliv. mexicana* du Catalogue ; l'autre m'a été communiqué par M. Hope.

Observation.

Pour compléter ce que j'ai dit du genre *Clivina*, je me bornerai à signaler la *Cliv. lævifrons* Chaud. (Bull. Mosc. 1842) d'Astrabad, dont je ne connais pas même la description.

Dans l'ouvrage de Herbst *(Natursyst. aller Ins.)* figurent encore deux insectes qui semblent appartenir au genre *Clivina* ; mais ni les descriptions, ni les figures, ne permettent de les reconnaître.

Ce sont : *Scarites attenuatus* (X. p. 264. Tab. 176. f. 7. c.) de l'Amérique septentrionale, et *Scarites unicolor* (ib. p. 265. Tab. 176. f. 9. g.) des Indes orientales.

G. ASPIDOGLOSSA.

Le *menton*, plus large à la base qu'à l'extrémité, est transversal ; ses lobes latéraux, arrondis extérieurement, se terminent en pointe et sont plus élevés que la dent du milieu, laquelle est toujours simple. La *languette* est très-étroite, allongée, coriacée, membraneuse à son extrémité où elle se bifurque et se prolonge en deux pointes membraneuses très-aigues ; les paraglosses ne dépassent point cette bifurcation. Le 3e article des *palpes* labiaux est cylindrique, un peu renflé vers sa partie supérieure, à la naissance des deux soies raides que l'on y remarque ; le 4e est plus court, presque fusiforme, tronqué à l'extrémité. Les *mâchoires* et les palpes maxillaires sont comme dans le genre *Ardistomis* ; seulement, le 2e article de ces derniers est plus rétréci à la base et à l'extrémité. Les *mandibules* sont courtes, arquées, planes, peu aigues. Les *antennes* sont ordinairement plus courtes que dans les *Ardistomis* et leurs derniers articles sont souvent presque globuleux. Le *labre* est transversal, arrondi sur les côtés, un peu arrondi au milieu, presque recouvert par de fortes soies partant des angles latéraux et du bord antérieur. L'*épistôme* est large, tronqué ou sinueux en avant ; ses angles latéraux sont proéminens et arrondis ; de leur base partent deux impressions profondes et irrégulières qui se prolongent jusqu'en arrière des yeux. Tantôt le vertex est lisse, tantôt il porte une fossette qui se bifurque et dont chaque branche va se perdre près de l'angle antérieur de l'épistôme. En arrière des yeux, on

distingue de chaque côté le commencement d'un sillon transversal interrompu avant le milieu de la tête. Le *corselet* est très-convexe ; ses bords latéraux sont marqués par un rebord qui se dirige jusqu'à la base en laissant à découvert les côtés inférieurs. Les *élytres* diffèrent peu de celles des *Ardistomis*, si ce n'est que leurs stries sont plus profondes et ordinairement crénelées ; elles portent souvent une tache ferrugineuse, mais longitudinale et atteignant l'extrémité. Les *cuisses* sont plus épaisses que dans les *Ardistomis ;* les *tibias* antérieurs, un peu plus larges, sont plus fortement dentés à leur bord externe. Le premier article des *tarses* est triangulaire, très-allongé ; les 2e, 3e et 4e sont en triangle court et large, souvent même plus prolongé extérieurement qu'intérieurement ; le dernier est en massue allongée. Ces articles sont plus étroits dans les ♀. Les *tibias* intermédiaires ne sont point éperonnés. Les *crochets* sont grêles et longs ; l'épine qui est placée entre eux est au moins aussi prolongée.

Il est souvent difficile de tracer les limites précises qui séparent la plupart des espèces appartenant à ce genre : des descriptions comparatives peuvent seules faire sentir suffisamment où gissent les caractères distinctifs.

Je place à la suite des *Aspidoglossa* trois espèces qui présentent quelques particularités *(cribrata, ærata, intermedia)* : les tarses antérieurs, dont les 2e, 3e et 4e articles sont élargis à la base, présentent plutôt la forme d'un demi-cercle que d'un triangle ; le dernier article est aussi large à la base qu'à son extrémité ; sous ce rapport, ces espèces se rapprochent des *Ardistomis*. Sur la tête, on ne remarque pas les impressions particulières au genre *Aspidoglossa ;* les yeux sont beaucoup moins saillans. Le 3e intervalle seul porte quelques points ; les deux gros points situés à l'extrémité du dernier segment abdominal sont plus écartés. Sous tous les autres rapports, ces insectes ressemblent aux *Aspidoglossa* avec lesquelles je les laisse provisoirement.

1. *A. submetallica.* Buquet. (Coll.).

Nigra, elytris nigro-æneis, palpis, antennis mandibularumque basi testaceis, pedibus brunneis ; clypeo in medio elevato, emarginato, alis prominulis, rotundatis ; pronoto convexo, suborbiculato, antice angustato ; elytris oblongis, crenato-striatis, interstitiis tertio quintoque quadripunctatis ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 9. El. 5. Lat. 3 1/4 mill.

D'un noir légèrement bronzé sur les élytres ; le dessous du corps couleur de poix ; palpes, antennes, base des mandibules testacés ; pattes brunes. Les antennes sont composées d'articles cylindriques, un peu plus épais à l'extrémité ; elles dépassent quelque peu les angles postérieurs du corselet ; le labre est sinué en avant ; le milieu de l'épistôme est re-

levé, échancré au centre; les angles sont très-avancés, plus arrondis extérieurement qu'intérieurement; le vertex est lisse et ne porte qu'une fossette très-peu distincte. Le corselet a à-peu-près la même forme que dans le *Dyschirius thoracicus*; il est très-convexe, la base et les angles postérieurs sont arrondis; il se rétrécit vers l'extrémité antérieure qui est tronquée; les angles antérieurs sont arrondis, les postérieurs ne sont indiqués que par un gros point placé intérieurement; la partie latérale du corselet qui, depuis le milieu, dépasse le bord marginal, est également arrondie; elle est un peu plus saillante que dans l'*Ardistomis fasciolata*; le sillon longitudinal est plus profond à ses extrémités, et surtout à sa base, qu'au milieu; il dépasse l'impression transversale antérieure, laquelle est profonde et lisse. Les élytres sont d'un demi mill. plus larges que le corselet; elles sont presque trois fois plus longues, arrondies à la base, échancrées et rétrécies à l'extrémité; le bord marginal se rétrécit un peu au premier tiers; le rebord basal est saillant près du 4e intervalle auquel il se réunit; les stries sont profondes, crénelées par de gros points qui disparaissent vers l'extrémité; les intervalles sont convexes et relevés; les 3e et 5e portent quatre points un peu plus forts que ceux des stries. La digitation terminale externe des tibias antérieurs est deux fois plus grosse et plus longue que l'épine terminale interne; elle est assez fortement recourbée; la première dent externe est deux fois moindre et la seconde est peu saillante. Le dernier segment de l'abdomen ne porte pas de points distincts; il est couvert de rugosités dirigées obliquement.

Colombie. 2 ind. ♂ ♀. Coll. Buquet (Rostaing) et Chevrolat.

2. *A. spharodera*. Reiche.

Nigro-picea, nitida, palpis, antennis mandibularumque basi testaceis, pedibus rufis; clypeo in medio elevato, emarginato, alis prominulis, rotundatis; pronoto convexo, subtus culato antice angustato; elytris elongato-ellipticis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quadripunctatis; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 10. El. 5 3/4. Lat. 3 1/4 mill.

Reiche. Col. Colomb. Rev. Zool. 1842. p. 376. n° 47.

Cet insecte diffère de l'*A. submetallica* par sa couleur qui n'est nullement bronzée; par les ailes de l'épistème qui sont plus larges et plus régulièrement arrondies; par son corselet moins élargi en arrière; par ses élytres plus convexes et proportionellement plus courtes.

Venezuela. 2 ind. ♂ ♀. Coll. Reiche et La Ferté.

3. *A. pallida*. Buquet. (Coll.).

Brunnea, mandibulis nigris, elytrorum margine, antennis pedibusque pal-

lide testaceis; pronoto subglobuloso; elytris elongatis, cylindricis, apice subangustatis, fortiter punctato-striatis, interstitiis tertio atque quinto quadripunctatis; tibiis anticis extus bidigitatis. — Long. 8 1/2. El. 5. Lat. 3 mill.

Brune, avec le bord externe et l'extrémité des élytres ainsi que les antennes et les pattes d'un testacé pâle, les palpes testacés, les genoux, l'extrémité des tibias et les tarses bruns. Les mandibules, qui sont noires, sont longues, aigues et peu arquées; les sept derniers articles des antennes sont carrés et non globuleux; le labre est court, transversal, simplement sinué en avant; les angles sont arrondis et munis de poils jaunâtres recourbés en avant et qui s'étendent jusque sur le bord antérieur; les dents latérales de l'épistôme sont rebordées, arrondies, proéminentes, à peine plus avancées que le milieu qui est largement rebordé et légèrement échancré à sa partie antérieure; l'impression antérieure est en forme de marteau dont la tête arrondie occupe le devant de l'épistôme, tandis que la partie postérieure se prolonge jusqu'entre les yeux; au dernier quart des yeux, on remarque deux fortes impressions transversales et un peu rugueuses. Le corselet est très-convexe, à peine plus large que la tête antérieurement; ses côtés arrondis vont en se dilatant jusqu'au dernier tiers d'où ils se rétrécissent obliquement jusqu'à la base; le dessous du corselet dépasse le rebord marginal; le sillon longitudinal est peu marqué, surtout au milieu; l'impression transversale antérieure est beaucoup plus profonde. Les élytres sont un peu plus larges que le corselet, une fois et demie plus longues, cylindriques; leurs épaules sont arrondies; l'extrémité est rétrécie; les stries sont profondes et fortement ponctuées; les intervalles sont un peu convexes; les 3e et 5e portent chacun trois ou quatre points enfoncés; le rebord de la base s'unit au 3e intervalle, puis il se recourbe vers l'écusson. Les tibias antérieurs sont assez étroits; la digitation terminale est recourbée et beaucoup plus forte que l'épine opposée; au bord externe on remarque deux digitations bien marquées; l'extrémité de chacune de ces digitations est brune.

Colombie. 1 ind. ♂. Coll. Buquet. (Rostaine).

4. *A. crenata.* Dejean.

Nigra, nitida, in elytris aneo-micans, palpis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque testaceis; pronoto subgloboso, antice angustato, in angulis posticis parum dilatato; elytris elongato-oblongis, humeris atque basi rotundatis, apice subangustatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6 3/4. El. 3 7/8. Lat. 2 1/4 mill.

Dej. Spec. I. p. 418. 6.

Dejean a décrit sous ce nom une espèce de Cayenne à laquelle, par la

suite, il a réuni dans sa collection et dans son Catalogue des individus provenant de divers pays et qui doivent être considérés comme constituant des espèces distinctes. C'est d'après un type, qui a servi à la description du *Species*, que je vais indiquer les caractères qui ont été omis dans cette description.

Le pénultième article des palpes maxillaires est un peu plus court que le dernier ; le labre est du double plus large que long, arrondi, surtout à ses angles ; son bord antérieur est fortement déprimé et muni, en dessus de la dépression, de cinq gros points d'où sortent autant de poils fauves dirigés en avant ; ses côtés sont garnis d'une rangée de poils semblables, courbés et se dirigeant également en avant ; il est déprimé au milieu dans toute sa longueur. L'épistôme est relevé de chaque côté d'une échancrure médiane ; chacun de ces rebords est arrondi ; les ailes sont beaucoup plus avancées que le bord antérieur ; elles sont régulièrement arrondies à leur sommet et creusées au centre ; l'élévation antérieure, large en avant, se prolonge en se rétrécissant jusqu'au vertex ; elle est longée par deux sillons profonds, réunis en arrière, divergens en avant ; l'occiput ne porte aucune trace d'un sillon transversal. Le corselet est globuleux, à peine plus large aux angles postérieurs qu'en avant ; ses côtés inférieurs débordent à peine plus que dans l'*Ardist. fasciolata* ; le sillon longitudinal est très-fin et se prolonge jusqu'au bord antérieur ; à la hauteur des angles postérieurs, on remarque de chaque côté un gros point d'où part un sillon plus large que celui du milieu ; ces deux sillons, profonds à leur base et un peu avant l'impression antérieure, sont moins distincts au milieu. Les élytres sont oblongues, de $\frac{1}{3}$ plus longues que le corselet, plus rétrécies à l'extrémité qu'à la base qui est déprimée et fortement arrondie ; les intervalles sont élevés et forment presque des côtes arrondies ; le rebord marginal se recourbe sur l'épaule, se prolonge le long de la base et s'unit au 4e intervalle ; les 1re et 2e stries sont, à leur base, courbées en dehors ; la 3e est droite ; les autres sont courbées en dedans ; les 3e et 5e intervalles portent cinq ou six points enfoncés ; la tache angulaire fauve occupe l'extrémité des 4e, 5e, 6e et 7e intervalles ; elle ne remonte pas au dessus du dernier quart de chaque élytre. Les tibias antérieurs ne portent aucune trace de carène ; leur surface est lisse et convexe ; la digitation terminale est plus longue et plus épaisse que l'épine terminale interne ; elle est un peu dilatée avant l'extrémité et fortement recourbée ; la 1re dent externe est de la moitié de la longueur de la digitation terminale ; la 2e dent de moitié plus courte que la première ; on ne voit aucune trace d'une 3e dent. De chaque côté de l'anus, on distingue deux points disposés le long du bord apical.

Cayenne et Venezuela. 10 ind. ♂ ♀. Coll. Dejean, La Ferté, Buquet, Hope, Reiche et Dupont.

5. *A. Mexicana.* Chaud.

Nigra, nitida, in elytris subæneo-micans, palpis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque testaceis; pronoto subgloboso, antice angustato, postice maxime dilatato; elytris elongato-oblongis, humeris atque basi subrotundatis, apice subangustatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6, 7. El. 3 1/2, 4 1/4. Lat. 2 1/8, 2 1/2 mill.

Chaudoir. Bull. Mosc. 1837. n° 8.

Elle diffère particulièrement de l'*A. crenata* par son corselet très-dilaté aux angles postérieurs, les épaules des élytres moins élevées et leur base moins arrondie.

Mexique. Tuspan. Yucatan. 7 ind. ♂ ♀. Coll. Dupont, Chevrolat, Pilate et Putzeys.

Dans le doute où me laisse l'insuffisance de la description de M. de Chaudoir, j'applique le nom sous lequel il a désigné une espèce mexicaine à l'espèce la plus répandue de ce pays, et qui d'ailleurs figure dans la collection de M. Reiche comme étant la *Cliv. mexicana*, Chaud.

6. *A. rivalis.*

Nigra, nitida, in elytris æneo-vel violaceo-micans, palpis testaceis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque rufis; pronoto subgloboso, antice angustato, in angulis posticis parum dilatato; elytris oblongis, humeris atque basi rotundatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6. El. 3 3/4. Lat. 2 1/8 mill.

Notablement plus courte que la *crenata* et moins rétrécie à l'extrémité. Les épaules des élytres sont tout aussi arrondies; les intervalles sont plus étroits et la ponctuation est plus serrée; les angles antérieurs du corselet sont plus déprimés.

Colombie et Brésil. 4 ind. ♂ ♀. Coll. Dejean, Dupont, Schaum et Chevrolat.

7. *A. torrida.*

Nigra, nitida, in elytris æneo-micans, palpis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque testaceis; pronoto subgloboso, postice dilatato; elytris elongato-oblongis, humeris rotundatis, apice subangustatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6 3/4. El. 4. Lat. 2 1/2 mill.

Elle ressemble beaucoup à la *crenata* avec laquelle elle est confondue dans la collection Dejean ; les ailes de l'épistôme sont moins arrondies, surtout moins isolées du rebord latéral de la tête avec lequel elles s'unissent presqu'en ligne droite ; le dessous du corselet est plus proéminent sous les angles postérieurs ; les élytres sont un peu plus allongées et semblent moins rétrécies en arrière ; la digitation terminale des tibias antérieurs est moins arquée ; au dessus des deux dents externes on en voit une troisième très-peu distincte.

Mexique. 1 ind. ♂. Coll. Dejean.

3. *A. Guadeloupensis.* Dupont. (Coll.).

Nigra, nitida, palpis testaceis, antennis elytrorumque maculis posticis pedibusque rufis ; pronoto transverso-globoso, postice latiore ; elytris elongato-oblongis, basi subrotundatis, apice subangustatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6 1/2, 7. El. 3 3/4, 4. Lat. 2 1/8, 2 1/2 mill.

Elle diffère de l'*A. crenata* par son corselet notablement plus large dans toutes ses proportions, ses élytres plus allongées, dont les côtés sont plus parallèles, et dont la base est moins arrondie.

Guadeloupe. 5 ind. ♂ ♀. Coll. Dupont et Putzeys.

9. *A. vicina.*

Nigra, nitida, palpis testaceis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque testaceis ; pronoto subgloboso, postice dilatato ; elytris elongatis, basi rotundatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 7 1/2. El. 4 1/2. Lat. 2 1/3 mill.

Elle diffère de l'*A. fraterna* par ses élytres plus allongées, plus étroites, plus parallèles ; par son corselet qui porte des traces des deux sillons longitudinaux que l'on distingue dans l'*A. crenata* le long du sillon médian ; on voit aussi quelque trace d'une 3e dent externe.

Caroline. 2 ind. ♂. Coll. Chevrolat.

10. *A. fraterna.*

Nigra, nitida, palpis testaceis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque rufis ; pronoto subgloboso, postice dilatato ; elytris elongato-oblongis, humeris rotundatis, basi obliquatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 7, 7 3/4. El. 4, 4 3/4. Lat. 2 1/4, 2 1/2 mill.

Cette espèce, confondue dans la collection Dejean avec l'*A. crenata*, en diffère par sa taille plus grande, ses élytres plus allongées, moins déprimées et moins arrondies à la base qui est plutôt tronquée obliquement; les intervalles des stries sont plus larges; par son corselet, qui est plus élargi aux angles postérieurs, plus prolongé et plus rétréci à la base et dont le sillon longitudinal est simple; ses tibias antérieurs dont la digitation terminale est moins courbée, moins élargie; on distingue des traces très-faibles d'une 3e dent externe aux tibias antérieurs. Les antennes, les pattes et les taches des élytres sont d'un brun ferrugineux; ces dernières sont ordinairement moins distinctes.

Amérique boréale. 7 ind. ♂ ♀. Coll. Dejean, Hope, Buquet et Schaum.

11. *A. vulnerata.*

Nigra, nitida, in elytris æneo-micans, palpis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque testaceis; pronoto subgloboso, antice angustato, postice dilatato; elytris oblongis, humeris rotundatis, basi subtruncatis, apice subangustatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 1/8 mill.

Le corselet est moins convexe, plus large dans toutes ses proportions, surtout en arrière, que dans l'*A. crenata;* les élytres sont plus courtes, un peu plus larges, avec les côtés moins parallèles, les épaules moins arrondies et la base presque tronquée obliquement.

La ♀ a la digitation terminale presque tout-à-fait droite; c'est probablement accidentel.

Cuba. 2 ind. ♂ ♀. Coll. Dejean et Reiche.

12. *A. Cayennensis.* Dej. (Coll.).

Nigra, nitida, in elytris æneo-micans, palpis, antennis, elytrorum maculis posticis pedibusque testaceis; pronoto subgloboso, postice dilatato; elytris oblongis, humeris atque basi rotundatis, apice subangustatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6,El. 3 2/3. Lat. 2 1/3 mill.

Elle diffère de l'*A. crenata* par ses élytres plus courtes, proportionellement plus larges, plus ovales, plus planes; par son corselet plus plan et notablement plus large; le sillon longitudinal est simple et peu marqué; les ailes de l'épistôme sont plus larges, tronquées obliquement à leur bord antérieur, aigues à l'angle interne; l'élévation antérieure est moins distincte et le vertex porte un point enfoncé; l'épine située au dessus de l'échancrure interne des tibias antérieurs est beaucoup moins divergente.

L'individu que j'ai sous les yeux est récemment transformé ; il est entièrement brun, avec le corselet rougeâtre.

Cayenne. 1 ind. ♀. Coll. Dejean.

13. *A. comma.*

Nigra, nitida, in elytris æneo-micans, palpis testaceis, antennis, elytrorum maculis posticis obsoletis, pedibusque testaceis ; pronoto transversim globoso ; elytris oblongis, basi subrotundatis, crenato-striatis, interstitiis tertio et quinto quinquepunctatis ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6. El. 4 3/4. Lat. 2 1/8 mill.

Elle diffère de l'*A. cayennensis* par son corselet plus transversal, moins long, plus large en avant. Dans cette espèce, le rebord marginal, d'abord arqué, se dirige en ligne droite des angles postérieurs à la base ; ici, ce rebord forme un arc de cercle régulier depuis les angles antérieurs jusqu'à la base ; les élytres sont plus dilatées après le milieu du bord marginal, moins arrondies à la base ; les impressions de la tête sont plus distinctes ; les ailes de l'épistôme sont plus régulièrement arrondies et rebordées ; la 2e dent des tibias antérieurs est plus petite ; l'épine interne est plus divergente ; les taches fauves des élytres sont à peine distinctes.

Cuba. 2 ind. ♂. Coll. La Ferté.

14. *A. cribrata.* Reiche. (Coll.).

Nigra, nitida, elytris æneo-micantibus, palpis testaceis, antennarum basi, pedibus, elytrorum apice margineque subtus, rufis ; vertice transversim irregulariter trisulcato, oculis subprominulis ; pronoto subgloboso, obsolete in medio sulcato ; elytris elongato-oblongis, crenato-striatis, interstitio tertio quadripunctato ; tibiis anticis extus unidigitatis atque unidentatis. — Long. 4 1/2. El. 2 3/4. Lat. 1 1/2 mill.

L'épistôme est rebordé et légèrement sinué au milieu ; ses ailes sont larges, arrondies et unies par une ligne droite aux rebords latéraux de la tête ; le vertex porte deux ou trois sillons transversaux et interrompus ; les yeux sont plus saillans que dans l'*A. intermedia*, mais moins que dans les autres espèces du genre ; les antennes grossissent de la base à l'extrémité et atteignent les angles postérieurs du corselet ; le 2e article est le plus étroit, en massue allongée, d'un cinquième plus long que le 3e qui est triangulaire ; les suivans sont cylindriques et très-courts ; le dernier est de moitié plus long que le précédent, ovale, roux à son extrémité. Le corselet est presque globuleux, tronqué en avant : les angles antérieurs

sont droits, quoique arrondis à l'extrémité ; les côtés sont régulièrement arrondis et les bords inférieurs un peu proéminens aux angles postérieurs ; le sillon longitudinal est simple, peu marqué dans toute son étendue, partant de la base et ne dépassant pas l'impression antérieure ; celle-ci est profonde et lisse. Les élytres sont d'un cinquième plus larges que le corselet, oblongues, de 3/5 plus longues que larges, avec la base et les épaules très-arrondies et l'extrémité à peine rétrécie ; leurs stries sont moins profondes et les points moinss gros que dans l'*A. crenata ;* ces points disparaissent dès le dernier quart des stries ; les intervalles sont plus larges et plus plans ; le 3e porte quatre points enfoncés. Les tibias antérieurs sont peu élargis ; la digitation terminale est longue et étroite ; la 2e est très-courte et peu distincte.

Bahia. 1 ind. Coll. Reiche.

15. *A. ærata.* Klug. (inéd.).

Nigro-picea, palpis, antennis pedibusque dilute brunneis ; mandibulis porrectis, acutis ; clypeo subtruncato, alis prominulis rotundatis, vertice unipunctato ; pronoto suborbiculato, sulco longitudinali obsoleto ; elytris oblongo-ovatis, convexis, striato-punctatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 4 1/2, 5. El. 2 1/2, 3. Lat. 1 1/2, 2 mill.

D'un noir de poix, brune en dessous, avec les palpes, les antennes et les pattes d'une couleur plus claire. La dent du menton est large ; les lobes latéraux sont beaucoup plus élevés et leurs côtés se réunissent au dessus en formant un angle aigu ; la languette est allongée, aigue et se bifurque à l'extrémité en deux pointes membraneuses ; les paraglosses sont aussi élevées que le point de bifurcation ; les mandibules sont longues, aigues et relevées à leur extrémité. Les antennes sont épaisses et cependant elles atteignent les angles postérieurs du corselet ; le labre est légèrement dentelé en avant ; l'épistôme, dont le bord antérieur est relevé, est un peu sinué ; les ailes sont plus avancées, arrondies à leur sommet ; la tête ne porte aucun sillon transversal et sur le vertex on ne distingue qu'un point enfoncé souvent peu marqué ; les rebords latéraux du front ne dépassent pas le milieu des yeux. Le corselet est globuleux, parfaitement arrondi en arrière, un peu rétréci en avant, avec le bord antérieur légèrement sinué ; le sillon longitudinal est très-finement marqué ; le sillon transversal antérieur est plus large et plus profond. Les élytres sont convexes, ovales, arrondies à la base et aux épaules, s'élargissant jusqu'au dernier tiers, puis se rétrécissant vers l'extrémité ; leur base est rebordée ; elles sont munies de stries profondes dans toute leur étendue, mais dont la ponctuation disparaît peu après le milieu ; le 3e intervalle porte quatre ou cinq points de même grosseur que ceux des stries. Les ti-

bias antérieurs ont extérieurement deux dents dont l'inférieure surtout est très-longue ; les tibias intermédiaires ne sont point éperonnés ; l'épine terminale des tarses est un peu plus longue que les crochets.

Souvent le bord externe des élytres et l'extrémité de la suture sont bruns ; dans les individus récemment transformés, la tête et quelquefois même le corselet sont ferrugineux.

Antilles. 6 ind. Coll. Dejean, Dupont, Chevrolat, Hope, Buquet et Schaum.

L'individu de la collection Dejean a été envoyé par M. Klug sous le nom que je lui ai conservé.

16. *A. intermedia.* Dej.

Nigra, nitida, in elytris æneo-micans, palpis testaceis, antennis, pedibus, elytrorum apice summo margineque inferiore rufis ; pronoto suborbiculato, antice angustato, sulco longitudinali obsoleto, in medio depresso; elytris oblongo-ovatis, crenato-striatis, interstitio tertio tripunctato ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 5 1/2. El. 3 1/3. Lat. 2 mill.

Dej. Spec. V. p. 507. 36.

Le milieu du labre est un peu avancé ; l'épistôme est rebordé en avant, échancré au milieu ; ses ailes sont moins proéminentes que dans l'*A. crenata* et plutôt obtuses qu'arrondies à leur angle externe ; elles s'unissent en ligne droite aux rebords latéraux de la tête ; le corselet est, entre les angles postérieurs, de la même largeur que les élytres à leur base ; les élytres sont plus ovales que dans les autres espèces.

Cet insecte, qui a beaucoup de ressemblance avec l'*A. crenata*, est plus large dans toutes ses proportions.

Buénos-Ayres. 1 ind. ♀. Coll. Dejean.

G. ARDISTOMIS.

Le *menton*, ordinairement granuleux, a ses lobes latéraux aigus ; le lobe intermédiaire, large, est tantôt simple, tantôt échancré à son extrémité. La *languette* est cornée, étroite, allongée, et se rétrécit de la base à l'extrémité qui se termine en une longue pointe membraneuse ; les paraglosses, qui sont membraneuses, sont aigues, mais beaucoup moins élevées que la languette. Les *palpes labiaux* ont leur 3e article un peu dilaté avant son extrémité, comprimé et arqué en dehors ; le 4e est de la même longueur que le précédent, ou de très-peu plus court ; il est légèrement dilaté au milieu et aussi large à sa base qu'à son extrémité qui est tron-

quée. Les *mâchoires* sont allongées, étroites, courbes vers leur extrémité qui est pointue ; les *palpes maxillaires* internes sont un peu plus courts. Le 1er article des palpes maxillaires externes est court, étroit, conique ; le 2e est plus long, très-élargi à la base d'où il se rétrécit jusqu'à l'extrémité : le 3e est un peu plus long, arqué, de la longueur du suivant qui forme avec lui une sorte de fuseau atteignant ou même dépassant un peu l'extrémité des mandibules. Les *mandibules* sont étroites, longues, droites, courbes et aigues à l'extrémité, triangulaires et munies intérieurement vers la base de deux dents peu prononcées. Le *labre* est arrondi, proéminent ou même denté au milieu. Les *antennes* sont filiformes et atteignent ordinairement la base du corselet ; elles ne grossissent pas vers l'extrémité ; leur 1er article est cylindrique, allongé ; les 2e et 3e sont plus étroits, en massue, de longueur égale ; quelquefois le 2e est plus court et alors il est moins étroit à la base ; le 4e, de la longueur du 3e, est un peu plus épais à la base et plus rétréci à l'extrémité ; les suivans sont d'égale longueur et cylindriques ; le dernier est presque pointu. L'*épistôme* est tronqué en avant ; ses angles latéraux ne sont nullement proéminens ; ils sont arrondis et s'unissent aux parties latérales de la tête. Des deux côtés du vertex on remarque deux sillons profonds qui prennent naissance dans les angles de l'épistôme (où ils se confondent avec une fossette assez large) et se dirigent ensuite sur chacun des yeux qu'ils atteignent à leur premier tiers, et qu'ils longent ensuite jusqu'en dessous ; on ne remarque qu'un seul sillon transversal ; il est placé immédiatement en arrière des yeux. Les bords latéraux du *corselet* sont indiqués par un petit rebord, souvent peu distinct, qui se prolonge jusqu'à la base en laissant ordinairement à découvert les côtés inférieurs ; l'impression transversale antérieure prend naissance près des angles antérieurs. Les *élytres* sont toujours plus larges que le corselet, ordinairement ovales ; la 3e strie est toujours arquée à sa naissance où elle se réunit sur la strie basale à la strie marginale ; les stries disparaissent quelquefois avant l'extrémité ; la strie suturale se prolonge toujours directement jusqu'à l'extrémité ; les 7e, 8e et 9e n'y parviennent qu'en se recourbant ; un peu avant l'extrémité, le bord marginal est profondément échancré et le bord inférieur y forme quelquefois un repli aussi marqué que dans le genre *Ozæna* ; on remarque souvent une bande ferrugineuse oblique placée avant l'extrémité des élytres. Les *cuisses* antérieurs sont simplement en massue ; les *tibias* sont peu élargis, fortement échancrés intérieurement ; simplement et, en général, assez faiblement denticulés extérieurement, l'extrémité interne porte une longue épine droite et l'extrémité opposée est munie d'une digitation encore plus prolongée, plus forte et recourbée inférieurement. Dans les ♂, le 1er article des *tarses* est triangulaire, très-allongé ; le 2e, plus large que long, arrondi sur les côtés ; le 3e, encore plus large et tout aussi court ; le 4e, un peu plus étroit, coupé obliquement sur les côtés, légèrement échancré

en avant ; ils sont munis en dessous de poils nombreux et épais ; le dernier article est cylindrique, rétréci à sa base ; entre les crochets, on remarque une épine droite, transparente et souvent aussi longue que les crochets mêmes. Les cuisses et les tibias intermédiaires sont encore plus étroits ; ces derniers portent quelques poils couchés et n'ont aucun éperon ; les tarses sont plus étroits et composés d'articles presque carrés. Les jambes postérieures sont plus allongées que les autres, et beaucoup plus grêles ; leurs trochanters sont en massue, arrondis à l'extrémité ; ils atteignent presque le milieu des cuisses. Les ♀ ont les tarses conformés comme les ♂, mais notablement plus étroits.

Dans l'*A rostrata* et les espèces voisines, les bords du corselet et des élytres portent quelques longs poils ; les jambes sont plus courtes, plus larges et plus fortement denticulées ; les tarses sont moins élargis.

1. *A. fasciolata.* Chevrolat. (Coll.).

Nigra, nitida, elytris nigro-æneis, ore, antennis, pedibus elytrorumque macula postica obliqua rufis, abdominis summo margine testaceo ; pronoto convexo, ovato, postice dilatato ; elytris latioribus, oblongis, tenuiter striato-punctatis, interstitio tertio septempunctato ; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis.—Long. 8 1/2. El. 4 3/4. Lat. 3 mill.

Le menton est granuleux, beaucoup plus large à la base qu'à l'extrémité ; ses lobes latéraux forment un angle aigu dont la pointe est obtuse ; la dent qui s'élève entre eux est plus courte et échancrée à son extrémité ; la tête est lisse ; les yeux sont médiocrement proéminens. Le corselet est très-convexe, en ovale allongé, plus étroit en avant où il est un peu échancré, très-arrondi en arrière ; le sillon longitudinal est moins profond antérieurement et il ne dépasse pas l'impression transversale. Les élytres sont oblongues ; leur base et leurs épaules sont arrondies ; l'extrémité est légèrement rétrécie ; les stries sont fines et très-faiblement ponctuées, à peine distinctes dès avant l'extrémité ; les intervalles sont tout-à-fait plans, le 3e porte six ou sept gros points ; au dernier tiers de chaque élytre on remarque une bande oblique d'un demi-mill. de largeur, qui prend naissance au 2e intervalle et se termine au 7e. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux petites dents dont la supérieure surtout est à peine distincte ; les trochanters des jambes postérieures sont en massue allongée et presque de la moitié de la longueur des cuisses.

Brésil. (Nouvelle Fribourg). 1 ind. Coll. Chevrolat.

2. *A. obliquata.*

Nigra, nitida, ore, antennis, pedibus, elytrorumque macula postica obliqua rufis ; pronoto convexo, ovato, antice angustato ; elytris ovatis, convexis,

profunde striatis, striis vix punctatis, interstitiis convexis, tertio tripunctato ; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 1/3 mill.

Cet insecte diffère de l'*A. fasciolata* par les points suivans : le corselet est un peu plus court, plus large postérieurement et plus retréci antérieurement ; les élytres sont moins larges, proportionellement plus étroites à la base et à l'extrémité ; les stries sont profondes et les intervalles convexes ; la bande oblique est du double plus large.

Amérique boréale. 1 ind. Coll. Buquet. (Leroux).

3. *A. annona.* Buquet. (Coll.).

Brunnea, palpis, antennis pedibusque testaceis ; vertice unipunctato ; pronoto quadrato, profunde sulcato ; elytris oblongis, nigris, macula postica rufa notatis, profunde striatis, punctis striarum minutis, interstitio tertio punctis sex majoribus impresso ; tibiis anticis extus valide unidigitatis atque unidentatis. — Long. 3 3/4. El. 2. Lat. 1 1/3 mill.

La couleur générale est brune ; l'abdomen est un peu plus obscur ; les palpes, les antennes et les pattes sont testacés ; les élytres sont noires, avec une tache ferrugineuse vers l'extrémité. Le devant de la tête est moins lisse que dans les espèces voisines, un peu inégal et muni de quelques points très-petits ; le vertex porte à son sommet un point plus gros ; de chaque côté, au milieu des yeux, on remarque le commencement d'une strie transversale dirigée un peu en arrière et interrompue ; en arrière des yeux se trouve un sillon transversal profond ; les yeux sont un peu moins saillans et plus fortement granulés que dans les espèces voisines. Le corselet est d'un quart plus large que la tête, carré, très-arrondi en arrière, assez fortement rebordé ; le sillon longitudinal est très-profond ; l'impression transversale est lisse. Les élytres sont de moitié plus larges que le corselet, oblongues, de même largeur à leur extrémité, avec la base déprimée ; l'échancrure postérieure est peu marquée ; les stries sont profondes, surtout vers l'extrémité, à peine distinctement ponctuées, si ce n'est vers les bords ; les intervalles sont convexes ; le 3e porte cinq ou six gros points enfoncés ; au dernier tiers des élytres on remarque une tache ferrugineuse à-peu-près arrondie, qui dépasse à peine la 1re et la 7e stries. Les cuisses sont assez larges ; les tibias antérieurs portent extérieurement une digitation de moitié moins longue que la digitation terminale, et immédiatement au dessus, une petite dent.

Cayenne. 1 ind. Coll. Buquet. (Leprieur).

4. *A. oxygnatha.* Chaud.

Nigra, nitida, ore, antennis, pedibus elytrorumque macula postica obliqua

rufis ; pronoto convexo, breviter ovato, postice latiore ; elytris oblongis, valide striatis, punctis striarum parum distinctis, interstitio tertio punctis sex majoribus impresso ; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 3/4 mill.

Chaud. Bull. Mosc. 1843. n° IV. p. 738. n° 4.

Elle ressemble beaucoup à l'*A. fasciolata*, mais son corselet est notablement plus court, plus large dans toutes ses dimensions, et proportionellement plus dilaté en arrière ; le sillon longitudinal est plus profond. Les élytres ont la même forme, mais elles sont un peu plus courtes ; les stries sont beaucoup plus profondes et les intervalles sont convexes ; la bande est placée plus près de l'extrémité ; elle est un peu plus large et elle s'élève plus haut ; les points placés sur le 3e intervalle sont moins près de la 3e strie ; les cuisses sont un peu plus épaisses.

Cayenne.

Cette espèce se trouve dans les collections sous les noms de *Cliv. Cayennensis* Dej. et *Guyanensis* Buquet.

La *Cliv. Cayennensis* du Catalogue de Dejean appartient à un autre genre.

5. *A. unicolor.*

Nigra, nitida, ore, antennis pedibusque rufis ; pronoto globoso ; elytris latioribus, oblongis, valide striatis, punctis striarum parum distinctis, interstitio tertio punctis sex majoribus impresso ; tibiis anticis extus bidenticulatis. — Long. 7. El. 4. Lat. 2 3/4 mill.

Cet insecte ne diffère de l'*A. oxygnatha* que par son corselet qui est tout aussi large en avant qu'en arrière, de telle sorte qu'il paraît presque globuleux ; la première dent des tibias antérieurs est plus allongée ; les élytres ne portent pas de bande fauve.

Cayenne. 1 ind. Coll. Buquet. (Leprieur).

6. *A. Leprieurii.* Chaud.

Nigra, nitida, ore, antennis, pedibus elytrorumque macula postica obliqua rufis ; pronoto convexo, ovato ; elytris breviter ovatis, valide striatis, punctis striarum parum distinctis, interstitio tertio punctis sex majoribus impresso ; tibiis anticis extus obsolete bidenticulatis. — Long. 5 1/2. El. 3. Lat. 2 mill.

Chaud. Bull. Mosc. 1843. n° IV. p. 740. n° 5.

Cette espèce, encore très-voisine de l'*A. oxygnatha*, est d'une taille plus petite ; ses élytres sont proportionellement plus courtes et plus larges,

moins fortement échancrées à l'extrémité ; le corselet est plus étroit, presque ovale, moins brusquement rétréci en arrière et un peu plus élargi en avant ; la tête porte entre les yeux une impression arquée peu distincte ; les dents des tibias antérieurs sont un peu plus aigues, mais pas plus longues.

Cayenne. 3 ind. Coll. Buquet (Leprieur), Dejean et Reiche.

7. *A. seriepunctata.* Aud. (Inéd. Dej. *Catal.* 1837).

Ænea, nitida, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis, antennarum apice femoribusque anticis brunneis ; clypeo sinuato-truncato, alis haud prominulis, vertice lævi ; pronoto ovato, sulco longitudinali in medio obsoletiore ; elytris ovatis, profunde striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6 1/2. El. 3 1/2. Lat. 2 1/2 mill.

Dysch. seriepunctatus? Brullé. Voy. d'Orb. p. 41. n° 170.

D'un brun de poix ; la tête, le corselet et les élytres d'un bronzé brillant ; les palpes, la base des antennes et les pattes testacés ; les mandibules, les derniers articles des antennes et les cuisses antérieures, bruns. Les antennes sont longues et atteignent la base du corselet ; le labre est large, court, légèrement sinué en avant ; l'épistôme est faiblement arqué antérieurement, rebordé ; ses ailes, qui ne le dépassent point et en sont séparées par une fossette profonde, s'arrondissent obliquement en arrière et se réunissent aux carènes interoculaires ; celles-ci sont lisses, peu saillantes et ne dépassent pas le milieu des yeux ; le vertex est entièrement lisse, sans sillon transversal ; les sillons longitudinaux sont profonds et viennent aboutir contre le milieu des yeux qu'ils contournent ensuite ; un sillon transversal se remarque à la partie postérieure de la tête. Le corselet est en avant de la largeur de la tête avec les yeux, en ovale court, à peine plus large aux angles postérieurs qu'au milieu où il est de 3/7 plus étroit que les élytres ; le bord antérieur est tronqué ; ses angles sont droits, les côtés finement rebordés ; les angles postérieurs sont indiqués par un gros point pilifère placé intérieurement au dessus du premier tiers ; un peu au dessus du dernier tiers, on remarque un point semblable ; le dessous du corselet ne déborde pas plus fortement que dans l'*A. fasciolata ;* le sillon longitudinal et l'impression antérieure sont bien marqués et lisses ; le premier est moins profond au milieu qu'en avant et en arrière. Les élytres sont oblongues, arrondies à la base, s'élargissant un peu dès avant le milieu, fortement échancrées avant l'extrémité qui est rétrécie ; leurs stries sont profondes, surtout vers l'extrémité, et paraissent lisses ; les intervalles sont assez convexes ; le 3e porte cinq points placés à égale distance les uns des autres, si ce n'est que dans un individu le dernier est plus éloigné du 4e. Chaque segment abdominal porte deux points pili-

fères un peu avant le milieu ; le dernier en a deux de chaque côté le long du bord terminal ; chacun de ces points est prolongé obliquement en arrière par un trait enfoncé de même longueur que le poil qu'il est sans doute destiné à recevoir. Les cuisses antérieures sont comprimées, convexes extérieurement, concaves intérieurement, dilatées dans leur milieu au dessus, excavées et carénées en dessous ; les tibias antérieurs sont peu élargis, lisses ; la digitation terminale externe est longue, arquée depuis la base et pointue à l'extrémité au dessus ; le long du bord externe on distingue deux dents bien marquées et aigues, dont la supérieure est de moitié moins avancée que l'inférieure.

Brésil. 2 ind. ♀. L'un de ces individus se trouve dans la collection Dejean ; c'est celui qui est désigné dans le Catalogue de cette collection sous le nom que je lui ai conservé ; une étiquette de la main de Dejean porte qu'il vient des bords de l'Orénoque et qu'il est la *Cliv. gilvipes* Klug ; l'autre fait partie de la collection de M. Chevrolat et vient de la Nouvelle Fribourg.

Il m'est impossible d'affirmer si le *Dysch. seriepunctatus* Brullé se rapporte à cet insecte ou à l'une des espèces voisines.

8. *A. soror.*

Ænea, nitida, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis, antennarum apice, femoribusque anticis brunneis ; clypeo sinuato-truncato, alis haud prominulis ; vertice lævi ; pronoto ovato, antice subemarginato ; elytris ovatis, profunde striatis, interstitii tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6 1/4. El. 3 1/8. Lat. 2 1/3 mill.

Très-voisine de l'*A. seriepunctata*, plus petite, et surtout plus étroite ; le corselet est très-légèrement échancré en avant ; il est moins convexe ; ses bords latéraux sont moins arrondis.

Colombie. 2 ind. (Coll. Chevrolat et Dupont).

9. *A. tropicalis.*

Ænea, nitida, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis, antennarum apice femoribusque anticis brunneis ; labro supra in medio porrecto, clypeo sinuato-truncato, alis nec prominulis, vertice arcuatim impresso et unipunctato ; pronoto breviter ovato ; elytris ovatis, profunde striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus bidentatis. — Long. 6. El. 3 1/4. Lat. 2 1/4 mill.

Elle ne diffère de la *seriepunctata* que par les points suivans : le labre est plus prolongé en avant ; les yeux sont un peu plus proéminens ; le ver-

tex porte au centre un point enfoncé et, en avant, un sillon transversal arqué de devant en arrière ; le corselet est plus court et plus large antérieurement ; le sillon longitudinal est à peine moins profond dans son milieu ; les élytres sont un peu moins élargies en arrière, et les stries sont plus régulières.

Cayenne. 1 ind. Coll. Buquet.

10. *A. Brasiliensis.* Reiche. (Coll.).

Ænea, nitida, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis, antennarum apice femoribusque anticis brunneis ; clypeo sinuato-truncato, alis nec prominulis, vertice lævi ; pronoto ovato, postice latiore ; elytris oblongo-ovatis, profunde striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus bidenticulatis, denticulo superiore obsoleto.—Long. 6. El. 3 3/4. Lat. 2 1/3 mill.

Semblable à l'*A. seriepunctata*, si ce n'est que le corselet est plus élargi aux angles postérieurs, que les élytres sont plus allongées, et que les dents des tibias antérieurs sont plus courtes ; la supérieure est à peine distincte.

Brésil intérieur. 2 ind. Coll. Reiche et Chevrolat.

11. *A. constricta.*

Ænea, nitida, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis, antennarum apice femoribusque brunneis ; clypeo sinuato-truncato, alis nec prominulis, vertice lævi ; pronoto ovato ; elytris oblongis, profunde striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus bidenticulatis, denticulo superiore obsoleto. — Long. 6. El. 3 1/2. Lat. 2 mill.

Diffère de l'*A Brasiliensis* par son corselet plus étroit et moins dilaté aux angles postérieurs, plus profondément sillonné au milieu ; ses élytres sont notablement plus étroites ; les 1er et 3e points du 3e intervalle sont plus rapprochés que les autres (caractère qui, probablement, n'est pas constant) ; les cuisses postérieures sont brunes en dessous.

Brésil. 1 ind. Coll. La Ferté.

12. *A. dubia.*

Ænea, nitida, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis, antennarum apice femoribusque brunneis ; clypeo sinuato-truncato, alis nec prominulis ; vertice lævi ; pronoto ovato, in medio parum dilatato ; elytris oblongis, profunde striatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus bidenticulatis, denticulo superiore obsoleto.—Long. 5 3/4. El. 3 1/3. Lat. 2 1/4 mill.

Cet insecte ressemble tellement à l'*A. constricta* que j'hésite à le considérer comme une espèce distincte ; le corselet est seulement un peu plus étroit et les élytres sont un peu plus courtes. Si ce n'était la différence d'*habitat*, je ne douterais pas que ce ne fût une simple variété de l'espèce ci-dessus citée.

Colombie. 2 ind. Coll. La Ferté et Putzeys.

13. *A. Dyschirioides*. Reiche. (Coll.).

Picea, ore, antennis pedibusque testaceis : clypeo truncato-rotundato ; pronoto ovato, antice subangustato ; elytris oblongis, fortiter striatis, striis vix punctatis, interstitio tertio quinquepunctato ; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 4 1/4. El. 2 1/3. Lat. 1 1/2 mill.

La tête est comme dans l'*A. pallipes* ; le corselet est oblong, légèrement rétréci en avant, tronqué à son bord antérieur ; le sillon longitudinal est profond ; l'impression transversale est un peu moins marquée, et lisse. Les élytres sont d'un tiers plus larges que le corselet, un peu moins convexes que dans l'*A. pallipes*, en ovale plus allongé, avec les épaules plus arrondies ; les stries sont profondes, à peine ponctuées ; le 3e intervalle porte cinq points contre la 3e strie. La 1re dent des tibias antérieurs est plus longue que dans l'*A. pallipes*, et la 2e au contraire plus courte ; le dernier segment de l'abdomen ne porte que deux points de chaque côté.

Colombie. 1 ind. Coll. Reiche.

14. *A. ovata*.

Picco-brunnea, palpis antennisque testaceis, elytrorum margine externo inferioreque, segmentorum abdominalium margine posteriore pedibusque brunneis ; pronoto suborbiculato, antice angustiore ; elytris ovatis, punctato-striatis, stria tertia tripunctata ; tibiis anticis fortiter unidentatis, dente secundo obsoleto. — Long. 3 3/4. El. 3. Lat. 2 1/4 mill.

D'un brun de poix ; palpes et antennes testacés ; bord marginal et bord inférieur des élytres, bord postérieur des segmens abdominaux et pattes, bruns. Les antennes ne dépassent pas les angles postérieurs du corselet ; le labre est recouvert par le bord antérieur de l'épistôme qui est rebordé et largement arrondi de même que ses ailes ; les yeux sont très-peu proéminens et enchassés dans les rebords latéraux de la tête ; les arêtes interoculaires sont très-lisses ; la tête ne porte ni sillons transversaux ni points, pas même en arrière des yeux. Le corselet est large, très-convexe, presque orbiculaire, mais cependant plus large que long et plus étroit en avant qu'en arrière ; le bord antérieur est tronqué ; ses angles

sont déprimés et obtus, ses côtés arrondis, un peu plus dilatés vers les angles postérieurs qu'indiquent un point pilifère et une très-petite dent. Les élytres sont, au milieu, d'un tiers plus larges que le corselet, parfaitement ovales, si ce n'est qu'elles se rétrécissent vers l'extrémité; leurs stries sont moins profondes que dans les espèces précédentes et légèrement ponctuées; la 3e porte trois points plus gros. La 1re dent externe des tibias antérieurs est large et prolongée; de la 2e il reste à peine une trace peu distincte.

Nouvelle Grenade. 1 ind. Coll. La Ferté.

15. *A. Mannerheimii.* Dej. (Coll.).

Atra, nitida, antennis basi pedibusque brunneis; clypeo sinuato-truncato, alis nec prominulis, vertice lævi; pronoto ovato; elytris oblongo-ovatis, striis obsoletis, punctatis, stria tertia quinquepunctata; tibiis anticis extus bidenticulatis, dente superiore obsoleto. — Long. 6 1/3. El. 3 3/4. Lat. 2 1/3 mill.

D'un noir très-brillant, couleur de poix en dessous; la base des antennes et les pattes brunes. La tête et le corselet sont comme dans l'*A. seriepunctata;* seulement, le dernier est un peu plus étroit; les élytres sont moins larges et surtout plus allongées; les stries sont très-fines et ponctuées; la série de points, au lieu d'être située sur le 3e intervalle, est placée dans la 3e strie; la dent supérieure des tibias antérieurs est à peine distincte.

Je ne connais, de cette espèce, qu'un seul individu qui fait partie, sous ce nom, de la collection de M. Dejean, lequel l'a reçu de M. Mannerheim comme venant de Porto-Rico.

16. *A. pallipes.* Dej.

Nigro-ænea, supra viridi-ænea, nitida, elytrorum margine viridi, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis; labro in medio porrecto; clypeo marginato, in medio emarginato, alis subprominulis; capitis elevatione antica lata, obsoleta, oblonga, a clypeo ad verticem usque extensa; pronoto cordato; elytris convexis, subovatis, apice angustatis, humeris prominulis, profunde striato-punctatis, interstitio tertio pone striam tertiam tripunctato; tibiis anticis extus acute bidentatis. — Long. 5. El. 3. Lat. 2 mill.

Dej. Spec. V. p. 510. 40. (*Clivina pallipes*).

Colombie et Nouvelle Grenade.

Obs. Dans cette espèce et les voisines, la 2e strie commence beaucoup plus bas que les autres; le dernier segment de l'abdomen porte neuf points, dont six le long du bord apical et quatre le long de la base du segment.

17. *A. cærulea.*

Nigro-ænea, supra cærulea, nitida, palpis, antennis pedibusque obscure brunneis; clypeo emarginato, alis subprominulis; pronoto cordato; elytris convexis, subovatis, profunde striato-punctatis, interstitio tertio tripunctato; tibiis anticis extus acute bidentatis. — Long. 3. El. 3. Lat. 2 mill.

Cet insecte diffère principalement de l'*A. pallipes* par sa couleur, qui est en dessus d'un bleu brillant; les palpes, les antennes et les pattes sont d'un brun assez foncé; le corselet est proportionellement plus étroit et moins arrondi antérieurement. N'ayant vu qu'un seul individu, j'ignore si ces différences sont constantes et si l'insecte ne constitue pas une variété de l'*A. pallipes*.

Colombie. 1 ind. Coll. Dupont.

18. *A. cordicollis.*

Nigro-ænea, supra viridi-ænea, nitida, elytrorum margine viridi, palpis, antennarum basi pedibusque testaceis; labro in medio porrecto; clypeo marginato, in medio emarginato, alis subprominulis; pronoto cordato; elytris convexis, subovatis, profunde striato-punctatis, interstitio tertio tripunctato; tibiis anticis extus acute bidenticulatis.—Long. 4 1/2. El. 2 3/4. Lat. 2 1/8 mill.

Elle ressemble absolument à l'*A. pallipes*, mais elle est plus petite; le corselet est beaucoup plus élargi antérieurement et tout aussi rétréci en arrière; le sillon longitudinal est plus profond; les élytres sont plus courtes et un peu plus profondément striées en arrière.

Nouvelle Grenade. 1 ind. Coll. La Ferté.

19. *A. flavipes.* Dej.

Ænea, palpis, antennarum basi pedibusque brunneo-testaceis; clypeo emarginato, alis subprominulis; pronoto cordato; elytris convexis, oblongis, profunde striato-punctatis, interstitio tertio tripunctato; tibiis anticis extus acute bidenticulatis. — Long. 4. El. 2 1/4. Lat. 1 1/3 mill.

Dejean. Spec. V. 510. 39. (*Cliv pallipes*).

Elle diffère particulièrement de l'*A. pallipes* par sa taille beaucoup plus petite, son corselet plus étroit, moins dilaté sur les côtés, ses élytres allongées, plus étroites, dont les stries sont plus fortement ponctuées.

Brésil. 1 ind. Coll. Dejean.

20. *A. rostrata.* Dej.

Nigro-viridis, ore, antennarum basi pedibusque testaceis; vertice unipunctato; pronoto cordato, lateribus piloso-punctato; elytris oblongis, basi striatis, punctis distantibus piliferis impressis, apice sublævigatis; tibiis anticis extus tridenticulatis. — Long. 5. El. 3. Lat. 2 mill.

Dej. Spec. I. 419. 7. (*Cliv. rostrata*).
Say. Trans. etc. II. 21. (*Cliv. viridis*).

Je n'ai que peu de chose à ajouter à la description de Dejean.

Les antennes atteignent la base des élytres ; le labre est avancé dans son milieu ; l'épistôme est légèrement échancre au centre ; les côtés sont arrondis avec les ailes ; le vertex porte au centre un point enfoncé ; le corselet est convexe, cordiforme, étroit, fortement rétréci en arrière ; le long du bord externe, on remarque une dixaine de points d'où sortent autant de poils fauves et assez longs, dirigés extérieurement ; la base des élytres est tronquée ; les épaules sont arrondies ; les bords externes, parallèles jusqu'au dernier tiers, se rétrécissent ensuite jusqu'à l'extrémité ; les stries ne sont marquées qu'à la base ; les points sont gros et réguliers tant par leur dimension que par leur disposition ; le dernier segment de l'abdomen porte ordinairement douze points, et les précédens en ont à leur base quatre ou cinq.

Amérique boréale.

21. *A. puncticollis.* Dej.

Nigro-viridis, ore, antennarum basi pedibusque testaceis; vertice sulco transversali obsoleto impresso; pronoto transverso, rotundato, lateribus piloso-punctato, punctisque aliquot piliferis in disco vage impresso; elytris oblongis, basi striatis, punctis distantibus piliferis impressis, apice sublævigatis; tibiis anticis extus tridenticulatis. — Long. 5. El. 3. Lat. 2 mill.

Dejean. Spec. V. 508. 37. (*Cliv. puncticollis*).

Elle diffère de l'*A. vicina*, surtout par le corselet qui est plus convexe, moins long et point élargi en arrière ; les élytres sont un peu plus arrondies sur les côtés, et leurs points sont plus nombreux.

Amérique boréale. 1 ind. Coll. Dejean.

22. *A. vicina.*

Nigro-viridis, ore, antennarum basi pedibusque testaceis; vertice unipunctato; pronoto cordato, lateribus piloso-punctato; elytris oblongis, basi striatis, punctis distantibus piliferis impressis, apice sublævigatis; tibiis anticis extus tridenticulatis. — Long. 5 3/4. El. 3 1/2. Lat. 2 1/3 mill.

Elle est plus grande que l'*A. rostrata ;* le corselet est proportionellement plus large, surtout au milieu, et moins rétréci en arrière ; les élytres sont plus allongées et moins rétrécies en arrière.

Amérique boréale.

J'en ai vu 2 ind. dans la collection Dejean, confondus avec l'*A. rostrata*, provenant l'un de M. Leconte, l'autre de M. Say (sous le nom de *viridis* Say). Un 3e ind. fait partie de la collection Buquet.

23. *A. deleta.* Reiche. (Coll.).

Nigro-ænea vel ænea, ore, antennarum basi pedibusque testaceis ; vertice unipunctato, pronoto cordato, lateribus tripiloso-punctato ; elytris oblongis, basi striatis, punctatis, apice sublævigatis ; tibiis anticis extus tridenticulatis. — Long. 5. El. 3. Lat. 2 1/8 mill.

Elle ressemble beaucoup à l'*A. rostrata ;* l'épistôme est plus distinctement échancré au milieu ; le corselet commence à se rétrécir plus près du bord antérieur ; son bord marginal ne porte que trois points pilifères : celui de l'angle postérieur et deux autres au dessus ; les élytres ont les épaules un peu plus arrondies ; les stries sont plus fortement marquées ; les points sont plus serrés, inégaux en grosseur et non sétifères ; les dents des tibias antérieurs sont plus petites ; la 3e est à peine distincte.

Brésil. 2 ind. Coll. Reiche et Chevrolat.

24. *A. semipunctata.* Dej.

Viridi-ænea, ore, antennarum basi pedibusque testaceis ; vertice unipunctato ; pronoto cordato, margine tripiloso-punctato ; elytris oblongis, tenue striato-punctatis, interstitio tertio obsolete tripunctato, apice lævigatis ; tibiis anticis extus bidenticulatis. — Long. 5 1/2. El. 3 1/4. Lat. 2 mill.

Cet insecte est très-voisin de l'*A. deleta ;* il en diffère particulièrement par les stries et la ponctuation des élytres et par le nombre des dents externes des tibias antérieurs.

J'en ai vu 3 ind. dont deux dans la collection Dejean (l'un rapporté de Buénos-Ayres par M. Lacordaire, l'autre envoyé par M. Klug comme venant du Brésil), et le 3e dans la collection Hope où il est indiqué comme originaire du Brésil.

25. *A. labialis.* Chaud.

Viridi-ænea, ore, antennarum basi pedibusque testaceis ; vertice unipunctato ; pronoto cordato ; elytris oblongis, striato-punctatis, interstitio tertio tri-

punctato, ante apicem sublævigatis ; tibiis anticis extus tridenticulatis. — Long. 5 3/4, 5. El. 3 1/3, 3. Lat. 2 1/8, 2 mill.

Chaudoir. Bull. Mosc. 1837. n° 7. *(Cliv. labialis).*

La tête est comme dans l'*A. rostrata*, mais les antennes sont plus épaisses et plus courtes ; le corselet est plus large et plus arrondi sur les côtés ; les élytres ont la base plus déprimée ; leurs stries sont bien marquées et fortement ponctuées ; les trois premières restent plus distinctes jusqu'à l'extrémité ; la 3e porte trois points plus gros ; les dents des tibias antérieurs sont moins fortes ; la 3e surtout est à peine visible.

Cette espèce est la *Cliv. lucidula* du Catalogue de Dejean.

Mexique. Coll. Dejean, Buquet, Dupont et Reiche.

26. *A. Tuspanensis.*

Viridi-ænea, ore, antennarum basi pedibusque testaceis ; vertice unipunctato ; pronoto cordato ; elytris oblongis, striato-punctatis, interstitio tertio tripunctato, ante apicem sublævigatis ; tibiis anticis extus tridenticulatis. — Long. 5, 5 3/4. El. 3, 3 1/2. Lat. 1 3/4, 2 1/8 mill.

Elle est très-voisine de l'*A. labialis*, mais un peu plus petite ; le corselet est moins élargi en avant et par conséquent presque semblable par la forme à celui de l'*A. rostrata ;* les élytres sont plus rétrécies vers l'extrémité.

Tuspan. 3 ind. Coll. Chevrolat.

G. SCHIZOGENIUS.

Menton avec une petite dent au milieu ; ses lobes latéraux profondément échancrés, tellement que chacun d'eux semble partagé en deux ailes dont l'extérieure est étroite et aigue. *Languette* cornée, allongée, tronquée à l'extrémité, surmontée de deux pointes membraneuses et courtes ; paraglosses membraneuses, plus élevées que la languette. 3e article des *palpes* labiaux, large, presque cylindrique, un peu dilaté au milieu ; 4e article plus étroit et plus long que le précédent, se rétrécissant de la base à l'extrémité où il est tronqué. *Palpes* maxillaires à 1er article court, conique ; le 2e arqué et dilaté comme dans les *Dyschirius*, mais plus étroit à la base que dans ce genre et surtout tronqué plus largement à son extrémité. *Mandibules* aussi longues que dans les *Ardistomis*, mais plus larges, et beaucoup plus arquées, surtout à l'extrémité. Le *labre* est court et sinué en avant. L'*épistôme* est sillonné ; son milieu et ses angles sont relevés en forme de cornes ; la tête est également sillonnée longitudi-

nalement. Les *antennes*, qui grossissent un peu vers l'extrémité, sont composées d'articles presque cylindriques, un peu rétrécis à leur base; dans certaines espèces cependant, elles sont presque moniliformes, à partir du 4e article, et alors le 2e article est plus long que le 3e. Le *corselet* ressemble à celui des *Clivina*; de chaque côté du sillon longitudinal, plus près de ce sillon que du bord externe, on remarque un autre sillon oblique qui se dirige vers la base qu'il n'atteint point; son extrémité inférieure se recourbe en crochet. Les *élytres* sont étroites et allongées. Les *tibias* antérieurs sont profondément échancrés. Les articles des *tarses* sont conformés comme dans les *Ardistomis*, mais ils sont plus étroits; le dernier article est presque aussi large à la base que le pénultième; il se rétrécit vers l'extrémité; les crochets sont courts et assez épais; les tibias intermédiaires sont étroits et ne portent que quelques poils spiniformes; les jambes postérieures sont plus longues et plus grêles que dans les autres genres; les cuisses sont fortement arquées intérieurement.

Les espèces de ce genre habitent particulièrement les contrées les plus chaudes de l'Amérique centrale; cependant on en trouve une au Pérou et une autre dans l'Amérique boréale.

1. *S. strigicollis*. Dej. (Coll.).

Supra nigro-æneus, elytris margine viridi-aureo, palpis, antennis pedibusque testaceis; clypeo triconi, vertice plurisulcato, occipite punctato; pronoto convexo, subquadrato, antice angustato, basi angustissimo, trisulcato: elytris oblongis, striatis, striis obsolete punctulatis, interstitiis tertio, quinto atque septimo multipunctatis; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. — Long. 5 1/4. El. 3. Lat. 1 1/2 mill.

Noir en dessous, d'un noir verdâtre sur la tête et le corselet; les élytres sont bronzées, avec le bord extérieur d'un vert doré; les palpes, les antennes et les pattes sont testacés. L'épistôme est couleur de poix; il porte en avant trois cornes relevées, l'une au milieu, les deux autres entre la première et les angles extérieurs qui eux-mêmes sont relevés; au pied de la corne du milieu se prolonge une carène élevée qui se bifurque et dont les deux branches vont s'appuyer sur la partie antérieure du front. Le milieu de la tête est également couleur de poix; il est occupé par un sillon large et profond qui, prenant naissance entre les deux branches de la carène centrale de l'épistôme, se prolonge jusqu'à l'occiput où il est un peu dilaté; ses bords sont relevés en carène; entre les yeux et le sillon du milieu on remarque trois carènes noires un peu plus étroites et moins relevées. Les yeux sont proéminens; toute la partie postérieure de la tête est couverte de points serrés. Le corselet est convexe, plus étroit en avant

qu'en arrière ; le bord antérieur est largement échancré ; les bords latéraux (que longe intérieurement, depuis les angles antérieurs jusqu'aux angles postérieurs, une forte carène noire) sont arrondis jusqu'à la base qui est fortement rétrécie, doublement rebordée et échancrée au milieu; toute la surface est couverte de petites stries dirigées en divers sens ; l'impression transversale antérieure est bien marquée et porte intérieurement plusieurs stries longitudinales ; le sillon du milieu est plus profond ; les sillons obliques sont courts et arqués ; leur sommet, qui dépasse à peine le milieu du corselet, est moins profond et moins large. Les élytres sont oblongues, un peu plus larges que le corselet à la base qui est arrondie ; elles se rétrécissent légèrement à l'extrémité ; le rebord basal, qui forme dans son milieu un angle obtus, est interrompu entre la suture et la 1re strie, de même qu'à la 4e strie. Les stries sont profondes, surtout vers l'extrémité ; leur ponctuation se remarque beaucoup plus lorsqu'on regarde l'insecte de côté ; les intervalles sont relevés ; les 3e, 5e et 7e portent un rang d'une quinzaine de gros points placés contre les 2e, 4e et 6e stries. Les tibias antérieurs, qui sont arrondis et assez étroits, ont la digitation terminale longue et courbée, la 1re digitation externe de moitié moins longue, la 2e de moitié plus courte que la précédente ; au dessus, on distingue une dent large et obtuse.

Mexique et Colombie. 5 ind. Coll. Dejean, Dupont, Buquet et La Ferté.

L'un des individus de la collection Dupont est d'une couleur testacée avec des reflets vert.

2. *S. canaliculatus.* Buquet. (Coll.).

Nigro-subæneus, palpis, antennis pedibusque testaceis ; clypeo tricorni, vertice plurisulcato, occipite punctato ; pronoto subquadrato, basi angustissimo, trisulcato ; elytris oblongis, striatis, striis obsolete punctulatis, interstitiis tertio, quinto atque septimo multipunctatis ; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. — Long. 4 3/4. El. 2 3/4. Lat. 1 1/3 mill.

Il ressemble beaucoup au *S. strigicollis*, mais il est un peu plus petit ; ce n'est que sur les élytres que l'on remarque un léger reflet bronzé ; leur extrémité est brune ; le corselet est moins convexe, moins rétréci en avant, et les sillons obliques de chaque côté du corselet ne prolongent jusqu'au dernier tiers ; les cuisses sont plus épaisses.

Cayenne. 1 ind. (Leprieur). Coll. Buquet.

3. *S. tristriatus.* Chevr. (Coll.).

Nigro-brunneus, palpis, antennis pedibusque testaceis ; clypeo tricorni, vertice plurisulcato, occipite punctato ; pronoto subquadrato, antice angusta-

to, angulis posticis dentatis, basi angustissimo, trisulcato ; elytris oblongis, planis, striatis, striis obsolete punctulatis, interstitiis tertio, quinto, septimoque pluri-punctulatis ; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. — Long. 5. El. 3. Lat. 1 1/2 mill.

Il est d'un noir un peu brunâtre, quelquefois avec un léger reflet bleuâtre sur les élytres. Il ressemble au *strigicollis* dont il diffère par son corselet plus plan, dont les angles postérieurs sont plus fortement indiqués par une petite dent; les sillons obliques sont plus longs et atteignent le dernier tiers ; ils ne sont pas moins profonds à leur sommet ; les élytres sont beaucoup plus planes, plus étroites et un peu plus longues : leur extrémité est brune ; les points des stries sont plus gros et ceux des 3e, 5e et 7e intervalles sont moins distincts et moins nombreux ; les tibias sont plus larges à leur base.

Mexique. 3 ind. Coll. Dejean, Hope et Chevrolat.

4. *S. sulcatulus.* Reiche. (Coll.).

Nigro-brunneus, palpis, antennis pedibusque testaceis ; clypeo tricorni, vertice plurisulcato, occipite punctato ; pronoto subquadrato, angulis posticis dente instructis, basi angustissimo, trisulcato ; elytris oblongis, planis, striatis, striis obsolete punctulatis, interstitiis tertio, quinto atque septimo pluri-punctulatis ; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. — Long. 4 3/4. El. 2 3/4. Lat. 1 1/3 mill.

Plus petit, plus étroit que le *tristriatus;* il diffère particulièrement de cette dernière espèce par son corselet, qui est encore plus plan, moins large en arrière et par conséquent plus carré ; les angles antérieurs sont plus déprimés, les côtés plus parallèles et les angles postérieurs marqués par une dent plus forte ; la dent supérieure des tibias antérieurs est un peu plus aigue.

Colombie. 1 ind. Coll. Reiche.

5. *S. sulcifrons.* Dej. (Coll.).

Nigro-brunneus, palpis, antennis pedibusque testaceis ; clypeo tricorni, vertice plurisulcato, occipite punctato ; pronoto subquadrato, antice angustato, angulis posticis dentatis, basi angustissimo, trisulcato, sulcis lateralibus rectis ; elytris elongato-oblongis, planis, striatis, striis obsolete punctulatis, interstitiis tertio, quinto septimoque pluri-punctulatis; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. — Long. 4 3/4. El. 2 3/4. Lat. 1 1/3 mill.

Plus petit, plus étroit que le *tristriatus;* la base du corselet est plus rétrécie ; les sillons obliques sont plus étroits, plus prolongés et droits,

tandis que dans le *tristriatus* ils sont courbés en dehors ; les élytres sont d'ailleurs plus planes et plus parallèles.

Amérique boréale. 2 ind. Coll. Dejean (Leconte) et Hope.

6. *S. gracilis.* Buquet. (Coll.).

Nigro-subæneus, palpis, antennarumque articulis duobus basalibus testaceis, pedibus brunneis ; clypeo tricorni, vertice plurisulcato, occipite punctato ; pronoto subquadrato, trisulcato ; elytris elongato-oblongis, striato-punctatis, interstitiis tertio, quinto septimoque quadripunctatis ; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. — Long. 4 1/2. El. 3. Lat. 1 1/2 mill.

Il diffère du *strigicollis* par sa couleur qui est un noir légèrement bronzé ; ses antennes, dont les deux premiers articles seuls sont testacés ; son corselet plus plan, plus étroit, également rétréci en avant et en arrière, ayant ses deux sillons obliques plus prolongés ; ses élytres plus distinctement ponctuées, surtout à la base, et n'ayant que trois ou quatre points sur les 3e, 5e et 7e intervalles ; les jambes sont noirâtres.

Colombie. 1 ind. (Rostaine). Coll. Buquet.

7. *S. impressicollis.* Dupont. (Coll.).

Nigro-subæneus, palpis, antennis pedibusque brunneis ; clypeo tricorni, vertice plurisulcato, occipite punctato ; pronoto subquadrato, basi angustissimo, trisulcato ; elytris oblongis, punctato-striatis, interstitiis tertio, quinto septimoque quadripunctatis ; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. —Long. 3 1/2. El. 2. Lat. 1 1/8 mill.

D'un noir très-légèrement bronzé, avec le bord externe des élytres finement rebordé de bronzé-verdâtre, et leur extrémité brunâtre ; les palpes, les antennes et les pattes sont bruns. Le corselet est plus plan, plus carré que dans le *strigicollis ;* les angles postérieurs sont plus marqués, la base est moins échancrée ; le rebord intérieur que l'on remarque dans le *strigicollis,* est remplacé par un sillon très-rugueux et pointillé ; les élytres sont plus planes, plus parallèles ; les stries sont fortement ponctuées et paraissent presque crénelées ; les intervalles sont relevés et plus étroits ; les 3e, 5e et 7e ne portent que trois ou quatre points.

Colombie. 3 ind. Coll. La Ferté et Dupont.

8. *S. ferrugineus.*

Ferrugineus ; clypeo tricorni, vertice plurisulcato, occipite punctato ; pro-

noto quadrato, basi prolongato, trisulcato ; elytris angustis, oblongis, punctato-striatis, interstitiis tertio, quinto septimoque quadripunctatis ; tibiis anticis extus bidigitatis denteque superiore armatis. — Long. 3 1/3. El. 2 Lat. 7/8 mill.

Ferrugineux, avec les palpes d'un testacé pâle et l'extrémité des mandibules noire. La tête est semblable à celle du *strigicollis*, mais les yeux sont moins proéminents ; les antennes grossissent légèrement vers l'extrémité et ont leurs derniers articles moniliformes comme dans le genre *Clivina;* le corselet est plus carré et plus allongé que dans les autres espèces ; les côtés de la base sont arrondis et prolongés ; la base même est échancrée ; le bord marginal est très-légèrement arrondi ; le bord antérieur est à peine échancré ; le sillon longitudinal est bien marqué ; le sillon transversal est très-rapproché du bord antérieur et tout l'espace compris entre lui et ce bord est fortement chagriné ; les deux sillons latéraux prennent naissance plus près du sillon longitudinal, auquel ils sont presque parallèles, que du bord externe ; ils remontent jusqu'aux deux tiers du corselet. Les élytres sont étroites, allongées, cylindriques ; la base est arrondie ; les stries sont profondes, mais leurs points sont très-peu distincts ; les 3e, 5e et 7e intervalles portent plusieurs points moins distincts que dans les autres espèces. Les tibias antérieurs portent extérieurement deux digitations et au dessus une petite dent bien distincte.

Texas (Galveston). 1 ind. Coll. Pilate.

Outre les espèces précédentes, que j'ai sous les yeux, je crois devoir rapporter à ce genre une *Clivina* décrite par M. Brullé dans le Voy. d'Orbigny (*Ins.* p. 39. n° 164) et dont je me contenterai de citer la diagnose :

Sch. xanthopus. Brullé.

Nigra, elytris, pedibus antennisque rufis ; elytrorum macula communi rotundata, nigra; capite longitudinaliter et oblique plicato; thoracis angulis anterioribus lobatis ; elytris profunde punctato-striatis. — Long. 3 1/2, 4 1/2. Lat. 1, 1 1/2 lin.

Prov. de Moxos. (Bolivia).

La *Cliv. Leprieurii*, Laporte (*Etud. Entom.* p. 64) est sans doute un *Schizogenius*, et ce ne peut être que par erreur qu'elle est indiquée comme venant de Java ; elle est probablement originaire de Cayenne et identique avec la seule espèce de ce pays que contienne la collection de M. Buquet et qui en a précisément été rapportée par M. Leprieur *(Schiz. canaliculatus)*.

APPENDIX.

Scapterus longicollis. Buquet. (Coll.).

Ater, subnitidus, palpis piceis, antennis nigro-piceis; clypeo profunde emarginato, rugoso-sulcato, tuberculo medio lævi; pronoto subcylindrico, antice late emarginato, angulis anticis prominulis; elytris cylindricis, elongatis, punctato-striatis, interstitiis latis, elevatis, secundo quartoque bipunctatis; tibiis anticis extus tridentatis. — Long. 9. El. 5. Lat. 2 1/2 mill.

Le menton est un peu plus large que haut; sa base porte au milieu une fossette profonde et arrondie au dessus de laquelle prend naissance une carène très-prononcée qui remonte jusqu'à l'extrémité de la dent centrale; celle-ci est étroite, aigue et dépasse les lobes latéraux qui sont tronqués à leur sommet. La languette, qui est tronquée, disparaît derrière la dent du menton; on n'aperçoit que les paraglosses qui sont arquées et dépassent cette dent. Les palpes labiaux ont leur 3e article de la longueur du 4e, mais plus étroit et un peu en massue; le dernier est fusiforme. Les mâchoires sont très-courbes, pointues; le dernier article du lobe interne dépasse le corps de la mâchoire; il est plus large vers son extrémité qui est arrondie; le premier article des palpes maxillaires est petit, conique, un peu plus court que le 3e qui a la même forme; le 2e s'élargit brusquement près de sa base; il est de la grosseur du dernier et presque cylindrique; le dernier est un peu plus court que le 3e, plus étroit à la base et à l'extrémité, dilaté à son côté interne et presque tronqué obliquement vers le bout. Les mandibules sont courtes, peu arquées extérieurement; leur extrémité est arrondie; elles sont très-larges à la base, fortement rugueuses et portent intérieurement au milieu deux fortes dents obtuses et lisses; chaque mandibule est partagée par une ligne médiane élevée qui s'étend jusqu'à la hauteur des yeux. Les antennes ne dépassent pas le premier tiers du corselet; elles grossissent de la base à l'extrémité; leur 1er article est subcylindrique, un peu arqué extérieurement; le 2e, en massue, est plus étroit et plus court que le 1er, mais il est de moitié plus long que le 3e qui est conique; les autres sont globuleux; le dernier est un peu plus allongé. La tête est courte, transversale, enchassant l'épistôme dans ses rebords latéraux; l'épistôme est étroit, brusquement et profondément échancré au milieu; le labre, qui est très-court, avancé dans son milieu et dont les angles sont arrondis et un peu proéminens, s'aperçoit dans cette échancrure; les yeux sont oblongs, très-proéminens et en partie cachés par le rebord latéral de la tête; toute la surface de la tête est chagrinée; l'épistôme porte au milieu deux lignes élevées et ar-

quées qui se réunissent en avant; au milieu du vertex, on remarque un tubercule lisse, élevé et oblong; entre ce tubercule et le bord marginal, on voit d'abord une ligne longitudinale élevée assez courte, puis trois autres plus longues; du milieu de la 3e part une ligne semblable, mais oblique; près du bord on en distingue encore deux autres plus courtes et irrégulières. Le corselet est plus large que la tête, à peine plus long que large (bien qu'il paraisse réellement allongé); vu de dessus, il paraît cylindrique et seulement un peu rétréci antérieurement; il est très-déprimé sur les côtés, échancré en avant et arrondi en arrière; ses angles postérieurs ne sont point marqués; le bord marginal se rétrécit dès après le premier tiers, puis il est coupé droit jusqu'aux angles antérieurs qui sont presque aigus; les bords, tant latéraux que postérieurs, sont rebordés; le sillon longitudinal est profond; il part de la base, mais ne dépasse pas l'impression antérieure; celle-ci longe tout le bord antérieur; elle est irrégulière au fond et traversée par des stries longitudinales très-marquées; toute la surface du corselet porte des rugosités transversales qui sont particulièrement distinctes antérieurement et le long du sillon médian; de chaque côté de la base, à égale distance du sillon médian et du bord marginal, part un sillon profond qui remonte un peu obliquement presque jusqu'au milieu du corselet. Les élytres sont cylindriques, un peu plus étroites que le corselet et presque du double plus allongées; la base est tronquée, avec l'angle huméral marqué; chaque élytre porte huit stries profondes, ponctuées au fond, entre lesquelles s'élèvent des côtes saillantes, lisses et arrondies, dont la 6e et la 7e se réunissent vers les angles postérieurs et parviennent seules jusqu'à l'extrémité où elles rejoignent la suture; la 2e et la 4e de ces côtes portent deux ou trois points enfoncés; il y a des ailes sous les élytres. Les cuisses antérieures sont très-comprimées, très-dilatées extérieurement; les tibias sont courts, triangulaires, très-larges, ponctués extérieurement au milieu; ils se terminent extérieurement par une digitation très-longue et intérieurement par une épine plus courte; au côté extérieur, on remarque trois dents, dont les deux inférieures sont plus marquées; les jambes intermédiaires sont plus étroites; elles sont carénées et portent à leur partie inférieure externe un éperon saillant et peu aigu. Le 1er article des tarses est allongé et triangulaire; les trois suivans sont de moitié moins longs, plus étroits, rétrécis et arrondis en arrière, tronqués en avant; le dernier est plus étroit et de moitié plus long que le 4e et cylindrique; les crochets sont courts, assez épais et peu divergens. Le dessous de la tête est très-fortement chagriné et ponctué; lisse au milieu; le dessous du corselet est vaguement ponctué; il porte au milieu une carène encore plus marquée que celle de la tête; la poitrine et l'abdomen sont couverts de gros points souvent confluens.

Sénégal. 1 ind. Coll. Buquet (Leprieur).

G. OXYSTOMUS.

Languette courte et cependant plus élevée que les paraglosses, large, échancrée au dessus, arrondie sur les côtés ; 2e article des palpes labiaux très-recourbé à sa base, presque aussi long que le 3e ; le 4e presque fusiforme ; le côté interne est coupé droit.

1. *O. Sancti Hilarii.* Latr., *R. An.* Ed. 1829. IV. 385.—Guérin, *Iconog. Ins.* pl. 5. fig. 2. — *Grandis*, Perty, *Del. An.* p. 9. pl. 9. f. 7.
2. *O. cylindricus.* Dej.

G. CAMPTODONTUS.

Dejean (*Spec.* II. 476) a établi ce genre sur des caractères extérieurs que je ne reproduirai point ici. Je me bornerai à insister sur des caractères plus importans et qui ont été passés par lui sous silence.

Je trouve dans la collection de M. Dupont sous le genre *Oxygnathus* : 1° *O. cayennensis*, décrit par Dejean d'après un individu reçu de M. Dupont lui-même ; 2° une seconde espèce de Cayenne que je regarde comme identique avec l'*O. anglicanus* Steph. ; 3° l'insecte décrit par M. de Laporte sous le nom de *Camptod. clivinoides.*

1° *C. cayennensis.* Dej.

Ne pouvant décomposer les organes de la bouche, je ne puis rien dire de la languette qui est entièrement couverte par la dent du menton : il est probable qu'elle diffère peu de celle des *Oxystomus.* Les palpes sont très-grêles ; le 2e article des labiaux est court, élargi à l'extrémité ; le 3e est long, presque cylindrique, coupé droit extérieurement, bisinué intérieurement, un peu élargi vers l'extrémité ; le 4e est à peine plus court que le précédent, un peu dilaté au-delà du milieu, tronqué à l'extrémité. Le 2e article des palpes maxillaires est encore plus long que le 3e des palpes labiaux, beaucoup plus large, coupé droit intérieurement, arqué extérieurement ; le 3e est plus allongé que le précédent, plus grêle, de moitié plus long que le dernier ; il est plus large vers l'extrémité et arqué intérieurement un peu au-delà du milieu ; le dernier est semblable à l'article correspondant des palpes labiaux. Le 1er article du lobe externe des mâchoires est semblable au 3e des palpes maxillaires ; le dernier, qui est plus court que la mâchoire est en fuseau très-court et assez large. Les mandibules ont à leur base deux petites dents obtuses. Les lobes latéraux du menton sont arrondis et moins élevés que la dent du milieu.

2° *C. anglicanus.* Steph. *(Oxygnathus).*

Je ne pense pas me tromper en rapportant cet insecte à l'espèce évidemment exotique décrite et figurée par M. Stephens.

Voici ses principales différences avec le *C. cayennensis* : il est plus petit (11 1/2 mill.) ; les mandibules sont proportionellement plus courtes : le labre, qui est brun, est plus large et en demi-cercle; il n'est point rugueux comme dans le *C. cayennensis*. La tête est entièrement lisse ; le rebord latéral de la tête est plus proéminent en avant des yeux. Le corselet est presque carré ; sa base est peu prolongée, ses angles postérieurs sont marqués par une dent obtuse ; de chaque côté du corselet il n'existe qu'un seul sillon longitudinal moins marqué au milieu. Les élytres sont plus allongées, mais planes au dessus, plus cylindriques ; les stries sont moins profondes et moins fortement ponctuées, les intervalles moins relevés ; le 3e porte trois gros points enfoncés ; les digitations des tarses antérieurs sont beaucoup plus longues.

L'insecte décrit par M. de Laporte, sous le nom de *Camptodontus clivinoides*, me paraît ne pas appartenir à ce genre dont il diffère particulièrement par la forme du menton et par les palpes maxillaires dont le pénultième article est beaucoup plus court que les autres. Je propose d'en faire le type d'un genre nouveau qui serait caractérisé de la manière suivante :

G. STRATIOTES.

Menton très-étroit, ayant au milieu une dent large et arrondie, *plus courte que les lobes latéraux dont le sommet figure un angle aigu* ; la *languette* n'est pas visible. Tous les *palpes* sont moins grêles et plus courts que dans le *G. Camptodontus* ; les maxillaires ont leur 2e article long, cylindrique, plus étroit à la base ; le 3e de 3/4 *plus court que le précédent*, en massue allongée et atténuée à l'extrémité ; le dernier fusiforme, tronqué à l'extrémité, deux fois plus long que le 3e et cependant d'un tiers encore plus court que le 2e. Les palpes labiaux sont plus étroits ; leurs 3e et 4e articles sont conformés comme les 2e et 4e des palpes maxillaires, mais le 3e est un peu arqué au milieu. *Mâchoires* à pointe très-aigue, presque recourbée, de même longueur que le lobe externe dont le dernier article est ovale allongé, comme le dernier article des palpes labiaux chez les *Dyschirius*. Le *labre* est large, court, bisinué en avant. Les *mandibules* sont longues, grêles, pointues, arquées, formant la tenaille par leur réunion, unidentées à la base. Les *antennes* sont assez grêles ; elles grossissent à peine vers l'extrémité, et n'atteignent pas les angles postérieurs du corselet ; leur 1er article est en massue arquée avant l'extrémité, de la longueur des

deux articles suivans réunis ; les 2e, 3e, 4e et 5e sont en triangle allongé et à-peu-près de la même largeur ; les suivans sont cylindriques ; le 11e est en ovale court. Les *yeux* sont ovales, nullement proéminens, enchassés dans les rebords antérieur et postérieur de la tête. Le *corselet* est carré, prolongé obliquement en arrière ; sa base est échancrée. L'*écusson* est large, cordiforme, arrondi en arrière ; il porte à l'intérieur de son pourtour un sillon profond et un autre sillon longitudinal au milieu. Les *élytres* sont en ovale allongé, planes au dessus ; la strie marginale parvient seule à l'extrémité suturale ; les autres viennent s'arrêter contre le 7e intervalle qui se prolonge jusqu'à la suture ; les 4e et 6e intervalles sont plus courts que les autres. Les *pattes* sont plus courtes et plus épaisses que dans les *Camptodontus ;* les cuisses antérieures sont en massue ; les tibias antérieurs, en triangle allongé, sont bi-sillonnés en dessus ; la digitation externe est courte, mais très-aigue à l'extrémité ; extérieurement on remarque une forte dent au dessus de laquelle il reste à peine une légère trace d'une dent supérieure ; les tibias intermédiaires portent un fort éperon avant l'extrémité.

Je crois devoir donner une nouvelle diagnose de l'espèce décrite par M. de Laporte, d'après l'exemplaire même que j'ai sous les yeux.

S. clivinoides. Lap.

Niger, nitidus, palpis, antennis tarsisque testaceis ; labro brunneo, septempunctato ; capite lævigato, sulcis duobus postice divergentibus impresso ; clypeo truncato, alis prominulis, rotundatis ; pronoto subquadrato, antice emarginato, angulis anticis subprominulis, obtusis, lateribus marginatis, arcuatis, angulis posticis subdentatis, basi utrinque impressione obliqua signato, sulcis longitudinali atque transversali profundis, marginem anticum non attingentibus ; elytris oblongo-ovatis, dorso planis, profunde striato-punctatis, interstitiis convexis, tertio tripunctato ; tibiis anticis bisulcatis, extus bidentatis, intermediis calcaratis ; abdomine seriebus tribus punctorum fasciatim dispositorum impresso. — Long. 17 1/2. El. 6. Lat. 5 mill.

Camptod. clivinoides. Lap. Ann. Soc. Ent. I. 293. 12. Hist. nat. des Ins. I. 66. n° 8.

Cayenne. 1 ind. Coll. Dupont.

Je profiterai de cette occasion pour signaler quelques changemens à faire a mon travail intitulé : *Prémices entomologiques*, publié dans ce volume p. 353 et suivantes.

Pag. 372. *Agra Klugii.*

Ce nom ayant déjà été employé par M. Brullé (*Voy. d'Orbigny. Ins.* p. 10) je dois le remplacer par le suivant : *Agra humilis.*

Pag. 386. *Lebia rugiceps.*

M. Brullé (*Voy. d'Orbigny.* p. 16) ayant déjà appliqué ce nom à une autre espèce de *Lebia*, je lui substitue celui de : *Lebia distinguenda.*

Pag. 393. *Lebia apicalis.*

Je remplace ce nom par celui de : *Lebia terminalis*, celui de *L. apicalis* ayant été employé par M. Chevrolat (*Col. du Mex.*).

Pag. 410. Ligne 17, au lieu de *præcedente*, lisez : *sequente.*

Table. 1re col. ligne 16, au lieu de *Agra Klugii*, lisez : *A. humilis.*

Dernière ligne, au lieu de *Lebia rugiceps*, lisez : *L. distinguenda.*

2e col. ligne 12, au lieu de *L. apicalis*, lisez : *L. terminalis.*

Après ligne 30, ajoutez : *Tachys striatus*, p. 59.

J'ai reçu de M. Dupont, comme étant le *mexicanus*, un *Pasimachus* rapporté du Yucatan par M. Pilate. Quoique ressemblant beaucoup au *P. depressus*, il en est évidemment bien distinct. Son corselet, au lieu d'être cordiforme, est plutôt en carré rétréci en arrière, à-peu-près comme dans le *P. sublævis;* les côtés ne sont nullement échancrés au dessus des angles postérieurs qui, par conséquent, ne sont point proéminens; le bord postérieur est plus profondément échancré que dans le *depressus*, et les angles antérieurs sont beaucoup moins avancés; les élytres sont proportionellement plus étroites et plus longues; les mandibules sont plus aigues.

LISTE ALPHABÉTIQUE

DES ESPÈCES MENTIONNÉES DANS CE MÉMOIRE.

Ardistomis	annona	659	Ardistomis	labialis	648
	Brasiliensis	655		Leprieuri	640
	cœrulea	646		Mannerheimii	645
	constricta	643		obliquata	658
	cordicollis	646		ovata	644
	deleta	648		oxygnatha	659
	dubia	643		pallipes	645
	dyschirioides	644		puncticollis	647
	fasciolata	658		rostrata	647
	flavipes	646		semipunctata	648

Ardistomis	seriepunctata	641	Clivina	corvina	610
	soror	642		dentifemorata	608
	tropicalis	642		dentipes	610
	Tuspanensis	649		dissimilis	614
	vicina	647		Dumolinii	587
Aspidoglossa	ærata	635		*dyschiria*	555
	cayennensis	633		*elongata*	567
	comma	634		elongata	597
	crenata	629		ephippiata	602
	cribrata	634		erythropus	606
	fraterna	632		extensicollis	601
	Guadeloupensis	632		fasciata	624
	intermedia	636		femoralis	590
	mexicana	631		fissipes	607
	rivalis	631		fossor	593
	sphærodera	628		foveiceps	595
	submetallica	627		*fulvipes*	558
	torrida	631		fuscicornis	614
	vicina	632		fuscipes	618
	vulnerata	633		*gracilis*	541
Attelabus	*fossor*	594		grandis	583
Camptodontus	anglicanus	657		indica	585
	Cayennensis	658		Javanica	592
Carabus	*remotus*	539		Klugii	624
Clivina	*ænea*	558		*labialis*	649
	Americana	597		*lævicollis*	539
	analis	599		laticeps	613
	angustata	560		latimana	610
	angustata	601		Lebasii	607
	Assamensis	584		lobata	599
	armata	609		Madagascariensis	591
	aucta	597		mandibularis	584
	basalis	595		marginipennis	619
	Bengalensis	603		media	619
	bidentata	612		melanaria	586
	bipustulata	616		memnonia	588
	bisignata	620		*metallica*	567
	Boliviensis	606		*minima*	539
	brunnea	605		morio	622
	brunnipennis	626		picea	621
	collaris	594		picipes	625
	columbina	611		*punctata*	545
	cordata	604		*puncticollis*	647

Clivina	*rostrata*	647	Dischyrius	globosus	539
	rufescens	598		globulosus	540
	rugiceps	595		gracilis	541
	sabulicola	560		hæmorrhoidalis	552
	sabulosa	600		impressus	551
	scripta	596		inermis	571
	sculptifrons	625		intermedius	550
	Senegalensis	589		lævisculus	547
	sobrina	589		Lafertei	550
	stenocephala	611		lucidens	557
	stigmula	622		*minimus*	559
	striata	592		minutus	545
	striatopunctata	617		nitidus	569
	testacea	602		numidicus	555
	thoracica	548		oblongus	570
	tristis	620		obscurus	556
	tuberculata	615		obsoletus	556
	viridis	647		pallipennis	561
	ypsilon	595		planicollis	551
Cryptomma	multistriatum	575		politus	566
Dischyrius	abbreviatus	552		pumilus	546
	æmulus	542		punctatus	544
	æneus	547		*punctatus*	558
	Africanus	555		punctipennis	555
	Algiricus	545		pusillus	559
	angustatus	560		*pusillus*	560
	apicalis	556		quadraticollis	552
	areno-us	568		*riparius*	555
	bimaculatus	564		rotundipennis	541
	bipunctatus	565		ruficornis	555
	Bonellii	555		rufipes	542
	brevicarinatus	571		*rufo-æneus*	542
	chalceus	569		rufus	564
	chalybeus	552		salinus	558
	curvispinus	569		semistriatus	546
	cylindricus	564		sphæricollis	557
	cylindricus	554		striatopunctatus	556
	Dejeanii	545		strumo-us	568
	digitatus	558		sublævis	562
	edentulus	569		substriatus	565
	euphraticus	557		thoracicus	555
	extensus	566		tristis	542
	fulvipes	557		uliginosus	554

Lachenus	impunctipennis	575	Schizogenius	canaliculatus	651
Pyramis	crassicornis	576		ferrugineus	655
Scapterus	longicollis	655		gracilis	655
Scarites	*æneus*	567		impressicollis	655
	arenarius	594		sulcatulus	652
	fossor	594		sulcifrons	652
	gibbus	559		strigicollis	650
	globosus	559		tristriatus	651
	substriatus	563		xanthopus	654
	thoracicus 548	567	*Tenebrio*	*fossor*	594
Stratiotes	clivinoides	659			

TABLE

DES MATIÈRES.

Pages.

De Sélys-Longchamps. *Énumération des insectes Lépidoptères de la Belgique.* 1

Lecointe. *Théorie générale de la Polaire des courbes du second degré.* 36

Malherbe. *Notice sur quelques espèces de* Pics *du Brésil.* 65

Trasenster. *Recherches théoriques et expérimentales sur les machines destinées à l'aérage des Mines.* 71

Kupperschlæger. *Observations sur le procédé indiqué par M. E. Frémy pour séparer la Potasse de la Soude.* 142

Noel. *Mémoire sur les propriétés de l'Ellipse.* 145

Decaisnes. *Mémoire sur le genre* Diplosiphon. 217

Lamarle. *Essai sur les principes fondamentaux de l'Analyse transcendante.* 221

Brasseur. *Note sur un nouvel énoncé des conditions d'équilibre d'un système de forces.* 349

Putzeys. *Prémices entomologiques.* 353

Schmit. *Extrait d'un Mémoire sur l'architecture en Italie, depuis la décadence de l'art romain jusqu'à nos jours.* 419

Martynowski. *Mémoire sur la résolution des équations numériques* (suite). 445

Gloesener. *Mémoire sur la réfraction.* 477

— *Notice sur deux petits appareils propres à changer la direction des courans électriques.* 489

Noel. *Résumé des Méthodes élémentaires en géométrie.* 493

Putzeys. *Monographie des* Clivina *et genres voisins, précédée d'un tableau synoptique des genres de la tribu des* Scaritides. 521

ERRATA.

Pag.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
41	15	, après sécante, ajoutez :	. et en exprimant que le point $(x'y')$ est sur la droite.
41	16	$y \quad x$.	$y'' \quad x'$.
42	7	$y \quad x$.	$y' \quad x'$.
42	8	(ϕ).	(4).
47	dernière	$>=$ou$<$	$\begin{matrix}>\\<\end{matrix}=ou\begin{matrix}<\\>\end{matrix}$.
47	16	les axes	l'axe des abscisses.
48	2	$>=$ou$<$	$\begin{matrix}<\\>\end{matrix}=ou\begin{matrix}>\\<\end{matrix}$.
48	3	après—E^2, ajoutez :	. . . (quantité évidemment négative, si lieu (ϕ') exisie).
48	4 et 5	$>=$ou$<$	$\begin{matrix}>\\<\end{matrix}=\begin{matrix}<\\>\end{matrix}$.
49	15	$+Y^2R$.	$+Y^2$.
65	8 en remont.	le point M. ,	le point N.
108	4 en rem	complément.	complètement.
109	4 en rem	donc deux.	donc ici deux.
116	4 en rem	Ay'	Ay'^2.
153	9 en rem	lisez : $S=\frac{1}{2}ay$	$-\frac{1}{6}xy$.
166	14	4 cinquièmes	8 septièmes.
177	19	derniers.	premiers.
477	18 en rem	$z=45°$.	$z=40°$.
479	16 en rem	lorsqu'ils	lorsqu'elles.
480	11	AdS'S'' , ,	AdS''.
481	15	après : à cet effet, ajoutez :	écrivons pour n'' le rapport $\frac{n''}{n'}$; employons partout cette valeur de sin α et différentions.
481	3 en rem	$\sqrt{(1+\alpha p)^3}$	$2\sqrt{(1+xp')^3}$.
481	9 en rem	d'où.	en.
482	équation (6)	dp'	xp'.
483	8	dr^2	dr.
484 et suivantes.		$p'de$	$dp'.s$.
489	dernière	lames	lames en ivoire.
163	4 en rem	$20x^2 17y^2$	$20x^2+17y^2$.

NATURAL HISTORY

Fig 1

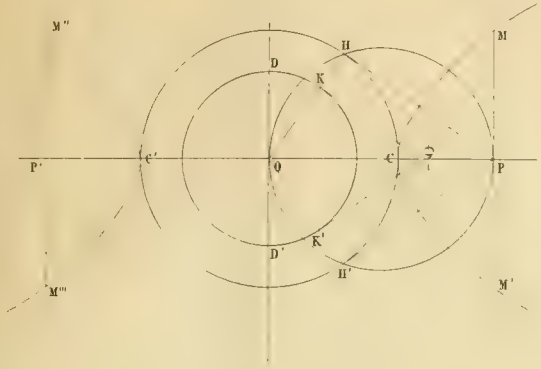


Fig 2

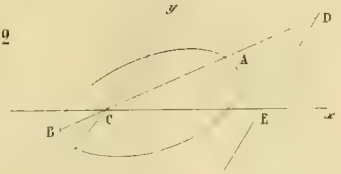
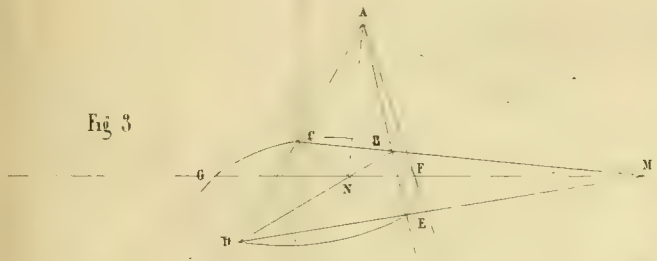
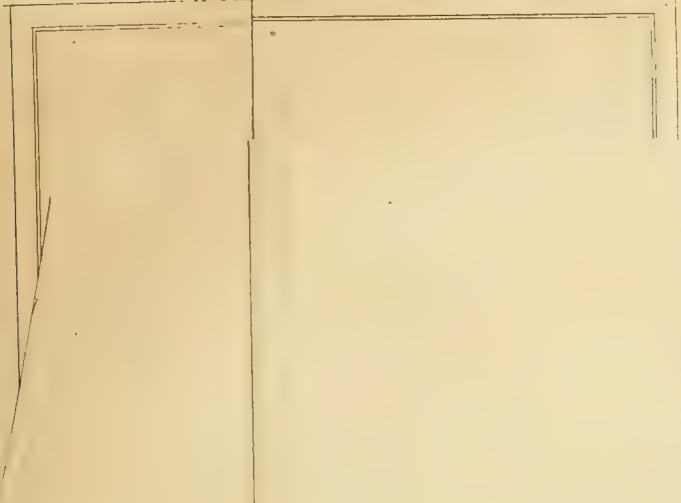
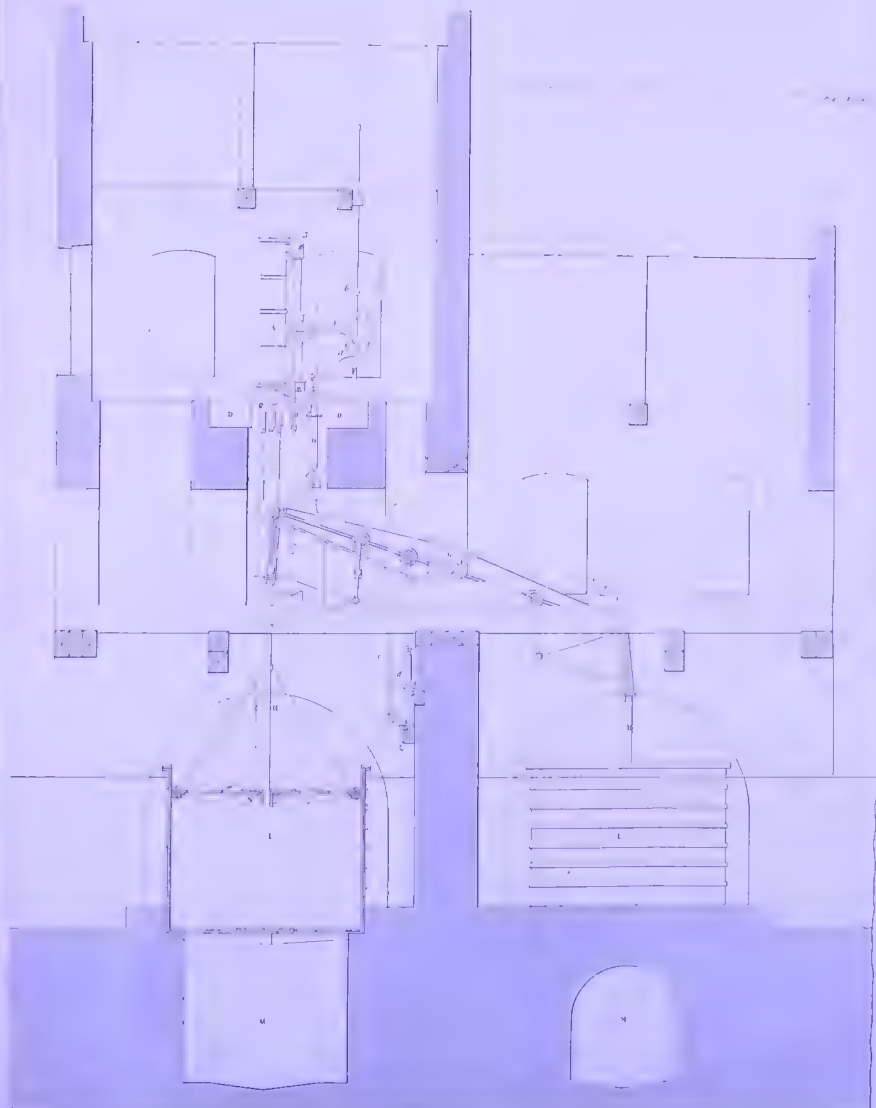


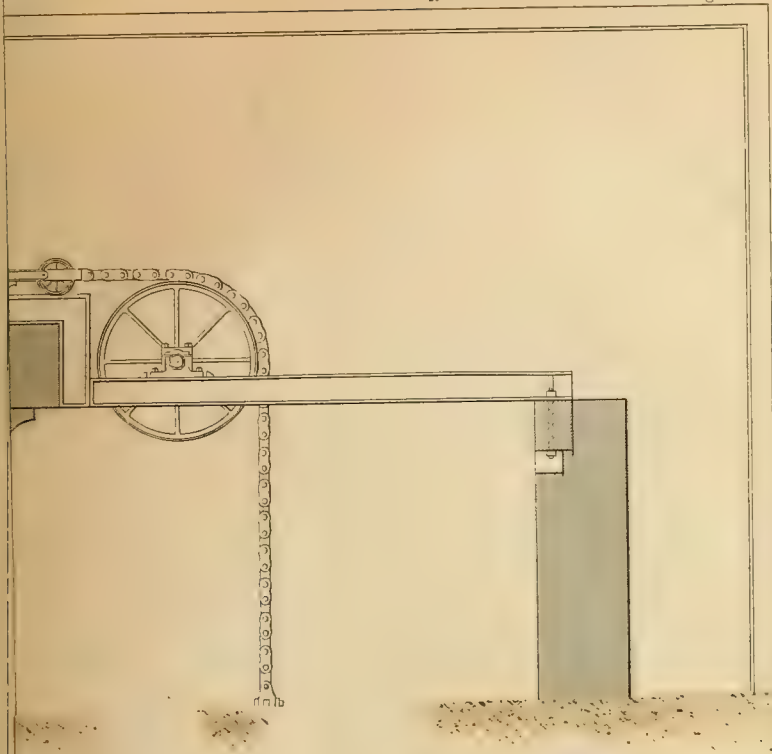
Fig 3





Elévation





MACHINE À CLOCHES PLONGEANTES DE MARIHAYE

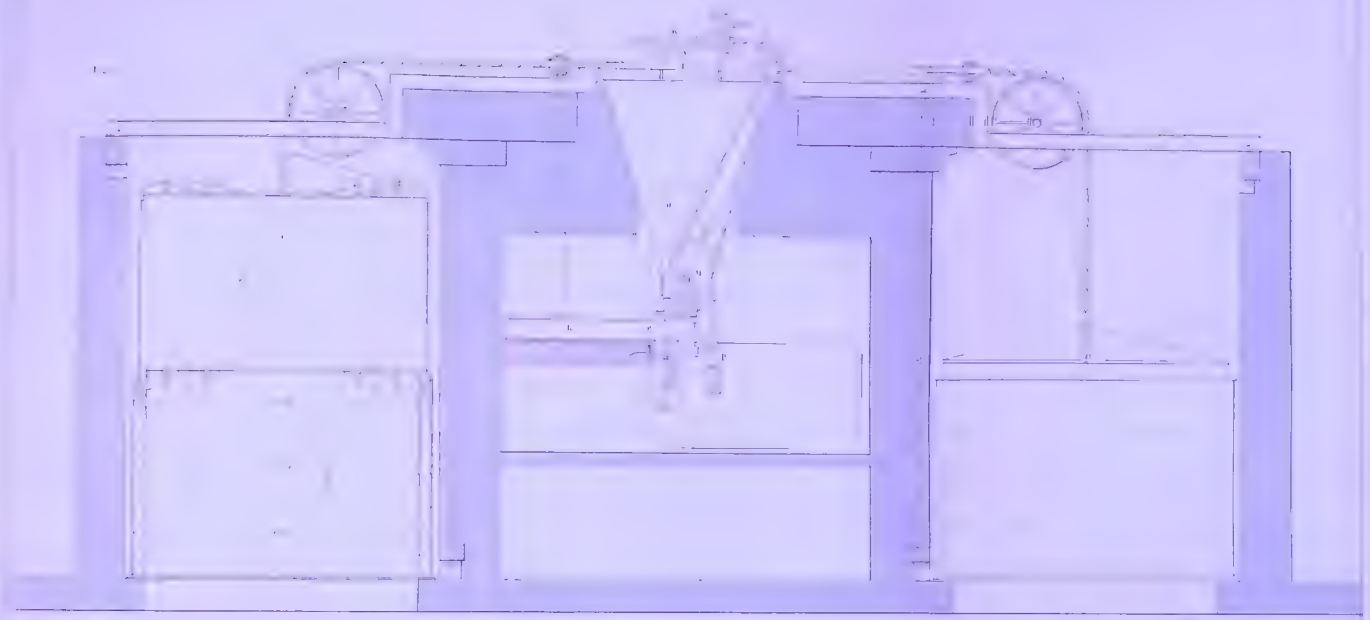


Fig. 1

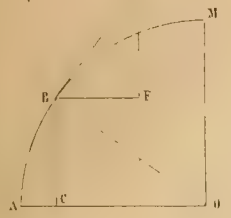


Fig. 2

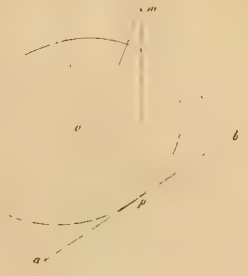


Fig. 3

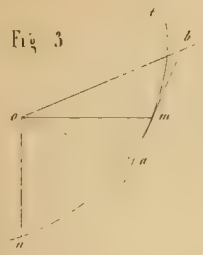


Fig. 4

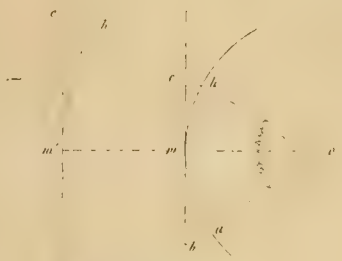
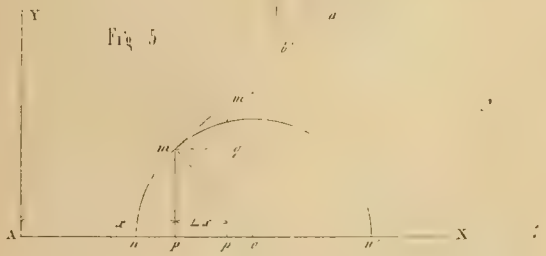
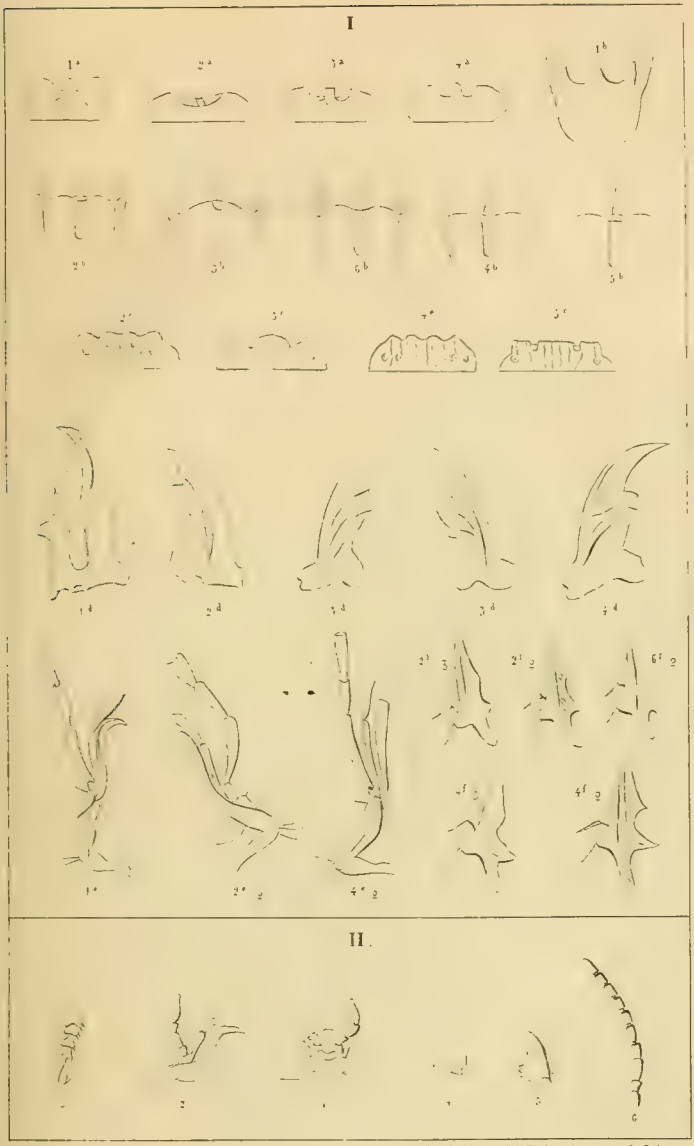
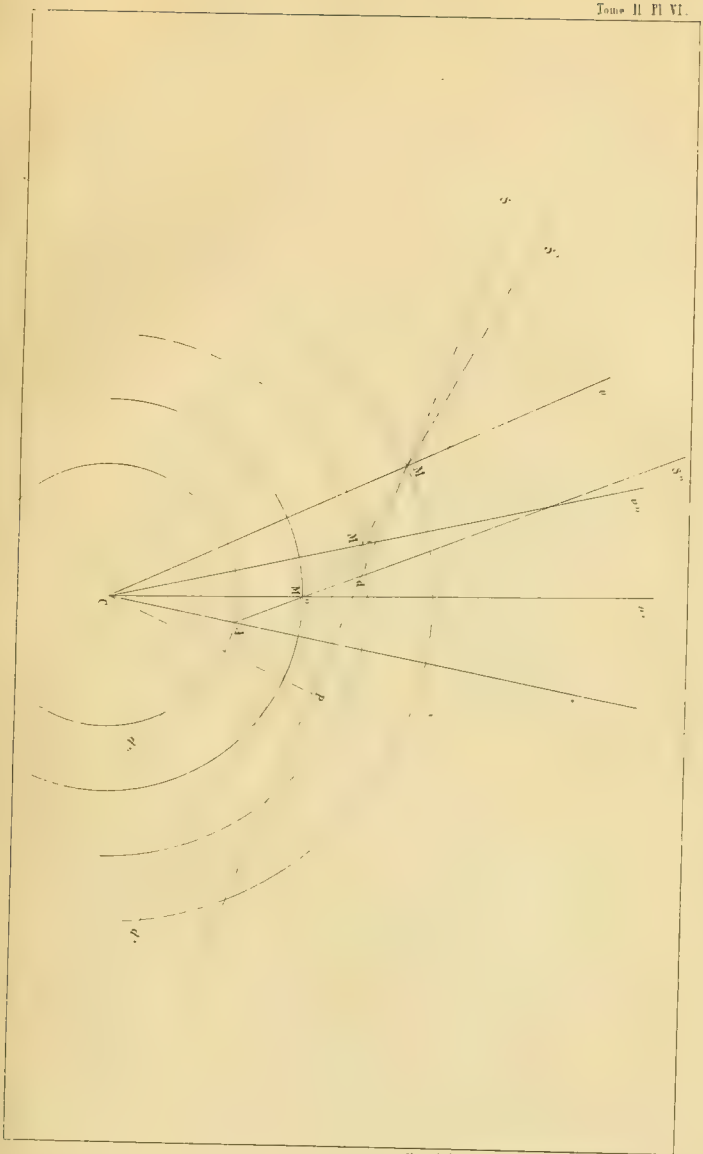


Fig. 5




I
II.